# 〔美〕陈惠开教授论文选集

## ——网络图论、量纲分析、宽带匹配

吴新余 戴旦前译 刘美轮 王兆明 欧阳珉校

湖南科学技术出版社

【美】陈惠开教授论文选集
——网络图论、量频分析、宽带匹配
责任编辑：陈清山

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路3号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年12月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/16 印张：26 插页：4 字数：654,000
印数：1—1,000
ISBN 7—5357—0023—2／TN・1

统一书号：15204・190　定价：9.20元

湘目87—29



陈惠开教授像

# 译者的话

陈惠开教授是一位在国际电路与系统学术界享有盛名的学者，现任美国芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系系主任。30年来，他从事网络理论方面的研究工作，其涉及的主要领域有：应用图论、无源与有源滤波器、有源网络与反馈放大器、宽带匹配网络理论与设计、网络流与通信网等。在上述各学科领域中他均有较大的建树与贡献。他的代表性著作有：(1)《应用图论》(英)、(2)《宽带匹配网络理论与设计》(英、俄、中)、(3)《有源网络与反馈放大器理论》(英、中)、(4)《线性网络与系统》(英、中)。30年来，他共撰写了160余篇论文，其中有不少是开创性的或有较大贡献的重要文献，并在国际上广为流传与引用。因此，他是一位在国际上知名度很高的学者。他曾在25种杂志中被列名，并列入美国2000名科学领袖之中。到目前为止，他指导过的世界各国的博士生和访问学者达50余人，仅中国大陆访问美国的学者在他门下深造的也有十多人。

陈教授不但是一位造诣高深的国际著名学者，同时他还是国际《电路与系统》界有影响的干练的活动家和组织者，他担任过IEEE-CAS杂志的副主编，两次担任过国际CAS学术会议的主席，在ISCAS-86会议上，他担任技术筹备主席，为组织这次规模盛大的国际学术会议做了许多具体和繁重的组织工作。

陈教授为了促进祖国的四化建设，多次回到祖国讲学。他在应用图论和宽带匹配网络理论方面作了独创性的工作，由于他不知疲倦地进行讲学活动，有力地推动了国内有关学科的蓬勃开展。

为了使陈教授的学术成果能供更多的教师和研究生学习与研究，我们从160篇论文中精选出30篇汇编成选集予以出版。由于陈教授的论文较多，面本书的篇幅有限，故对未列入本书的论文，读者需要时可根据本书末的总文献目录去查找。

关于本书出版的意义，在此，我们引用陈教授致湖南科学技术出版社此书的责任编辑陈清山先生信中所写的一段话即足以说明：

“本集中包括了我个人的许多贡献，这些论文并非是在任何各地都可容易获得的。虽然本集是倾向于欲受严格训练的研究者用的一本参考书，但是，它也可用来作为关于网络拓扑、线性电路与系统的研究生教材，某些专题适合于高级讨论班使用。事实上，这些材料在时间上是离散的，在空间上是遍布的（它分散刊载于世界各国的多种杂志中），因此本集对于网络理论的研究者来说是极有价值的材料。”

我们愿乘此机会，首先最诚挚地感谢陈惠开教授，他给我们提供了系统而丰富的学习材料，同时也给我们的研究工作提供了方便。其次，我们要衷心感谢三位同行专家在译文的校订过程中所付出的辛勤劳动，其中，有天津大学刘美轮教授、成都电讯工程学院王兆明教授以及南京邮电学院欧阳琨教授。

最后，由于我们的水平有限，尽管我们作了最大努力，但译文中错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

南京邮电学院　吴新余
华 中 工 学 院　戴旦前
1986年3月

## 内 容 提 要

在《电路与系统》的国际性学术界中，陈惠开教授是一位享有盛名的学者。他现任美国芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系系主任。由于他在网络拓扑、线性电路和系统等理论方面的杰出贡献，仅1986年他就获得三项重大科学奖：西德的"汉勃德"奖、日本的"JSPS Fellowship"奖、美国伊里诺大学的"最杰出荣誉学者"奖。

我国读者迫切地希望了解他的科研成果，但是，他的论文在空间上是遍布的（即发表于世界各地的许多杂志之中），在时间上是离散的（指研究的时间长达30年左右），因此，本书搜集的论文十分珍贵。

本书从160篇论文中精选出30篇论文，其内容涉及到3个专题：网络图论及其应用、量纲分析、宽带匹配网络理论与设计。读者从这些论文中，不但能学习到上述理论的最新结论，了解到其发展方向，而且还能学习到写作科学论文的方法。

本书可供大专院校电专业的研究生、教师、高年级学生和电专业科研工作者、工程技术人员参考。

# 目 录

# 陈惠开教授简历

陈惠开教授在1960年以最高的荣誉获得俄亥俄大学电气工程系的学士学位（1960年毕业总人数为1260名，陈为第一名，总平均为满分）。1961年获得该校硕士学位，1964年在伊里诺大学（Champaign-Urbana）的电气工程系获得博士学位。

在1960年与1961年他是伊里诺大学研究生奖学金和华美协进会罗氏奖（C.T.Loo奖）的获得者，从1962～1964年加入伊里诺大学联合科学实验室(Coordinated Science Laboratary)，曾任科研助理、副研究员，1964年加入俄亥俄大学电气工程系，任该系助理教授。1967年被授于副教授，1971年被授于正教授。在1970～1971年间，他曾在普渡大学电工学校(即研究生院)作访问教授。从1981年9月以来，他担任芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系的教授与系主任。

陈除了讲授研究生、硕士生与博士生的课程之外，其主要的兴趣与著作是在网络与系统理论、应用图论、反馈放大器与应用数学等领域方面。由于他对这些领域所作的贡献，1967年他曾获得美国数学协会的福特奖、1972年俄亥俄大学研究会的院士奖、1973年的美国杰出教育家奖、1974年的贝克奖以及1978年的贝克科研奖。他还获得了1975年俄亥俄大学工程学院的最优秀教育奖、1978年俄亥俄大学中国学生联合会的荣誉教授以及1978年该校电气工程研究生的感激奖。

1977年他获得IEEE授于的院士奖，表彰其“对图论与网络理论的贡献”。1978年，他获得两项重大荣誉：即美国科学促进会的院士奖，表彰其“对网络理论的贡献，特别是他将图论应用于电网络方面的发展”，以及俄亥俄大学授予的最杰出的教授奖，这是该校所赠予的最高荣誉。

1984年他获得美国科学院两张高等教育荣誉证书，一是表彰其在电工教育方面的杰出贡献，二是表彰其在计算机科学方面的杰出贡献。

1985年在中国荣获七所高等院校所授予的荣誉教授称号，这些院校是：东北工学院、浙江大学、南京工学院、华东工学院、南京邮电学院、安徽大学、成都电讯工程学院。

1986年他获得的三项重大奖励是：(1) 6月份联邦德国授于其亚历克山特尔·冯·汉勃德奖（资深美国科学奖）；(2) 日本科学促进会授于其JSPS Fellowship 奖，并有6所高等院校邀请他于1987年赴日讲学；(3) 伊里诺大学最杰出荣誉学者奖（本次奖励是在该校两大校园——芝加哥校园和Champaign-Urbana 校园之一千两百余名教授中所选出的九名之一）。

陈教授是在各种专业杂志上发表过185篇论文的作者，也是下列各书的编著者：

1.《应用图论》（北荷兰出版公司，Amsterdam，The Netherlands，484页，207个习题，1971）。

2.《宽带匹配网络理论与设计》（英国，牛津出版社，432页，129个习题，1976；俄译本，莫斯科，288页，1979；中译本，中国四川，成都，384页，1982）。

3.《应用图论：图及电网络》（美国纽约，伊尔赛维尔出版公司，542页，228个习题，1976）

4.《有源网络及反馈放大器理论》（纽约，麦克格罗-歇尔图书公司，494页，297个习题，1980）。

5.《线性网络与系统》（加里福尼亚，蒙特利尔，Brooks/Cole 出版公司，712页，534个习题，1983）。

6.《无源与有源滤波器：理论与实现》（纽约，约翰·威康父子公司，504页，408个习题，1986）。

7.《解题手册》（出版社同上，139页，1986）。

8.《网的理论》（出版社同上，1988）。

此外，他对下列书籍的编著也有所贡献：《网络拓扑及其工程应用》（台湾，国立台湾大学出版社，1975），以及《KIRK/OTHMER》化工技术百科全书（纽约威廉国际科学出版社，1979年第三版，1984年第四版）。

陈惠开教授在其专业上有极为广泛的社交活动，他曾是IEEE 杂志的副主编以及电路与系统论文评审委员会的成员。他组织与主持过几届国际会议并任主席，其中包括1970年在东京举行的电路与系统理论国际会议；1979、1982与1983年国际电路与专题会议。他曾是1979年国际电路与系统学术讨论会的筹备主席以及1985年日本京都ISCAS国际会议的技术筹备主席、1985年中国北京ISCAS 国际会议技术筹备主席，在1987年担任IEEE-CAS学会的执行副主席。从1980年10月以来他是《电路、系统与信号处理》杂志的副主编，并任电气工程与计算机科学 Brooks/Cole 丛书的主编。

陈教授在38种杂志、书刊上均有列名，它们是：

1. 中西部名人录
2. 美国的科学领袖
3. 美国男女科学家
4. 国际名人传记辞典
5. 计算机和数据处理名人录
6. 美国的社团领袖
7. 国际服务社团名人录
8. 美国杰出的教育家
9. 今日技术名人录
10. 美国(经正式鉴定的)丛书
11. 杰出的美国人辞典
12. 中国名人录(台湾)
13. 社团领袖和著名美国人
14. 有成就的男士
15. 美国名人录
16. 百年来的美国知名人士
17. 北美名人录
18. 西部和中西部人物
19. 美国人物
20. 杰出的美国男子和女士
21. 1980年世界研究者辞典
22. 2000个知名美国人
23. 边缘科学和技术名人录
24. 计算机图形工业传记名人辞典
25. 国际工程名人录
26. 世界社团领袖
27. 世界名人录
28. 边缘技术名人录
29. 电气工程名人录
30. 大学教授（电气工程）名人录
31. 大学教授（计算机科学）名人录
32. 国际传记
33. 1986年传记
34. 国际杰出领导者辞典
35. 国际教育名人录
36. 美国名人录
37. 国际荣誉书
38. 世界5000个知名人士

# 序 言

1982年夏，我应中国科学院研究生院的邀请，在由圣他·克勒拉（Santa Clara）大学陈树柏（S.P.Chan）教授组织的《图论及其应用》的暑期讲习班上作了一系列《有向图及其应用》的讲演。在这次讲习班上的其他讲演者还有伯克利的加里福尼亚大学葛守仁（E.S. Kuh）教授和普渡大学的林本铭（P.M.Lin）教授。值得注意的事实是，在此讲习班中这四位讲演者所提供的资料几乎全部是他们有独创性的科研文献，因而，向讲习班的参加者所提供的信息是精确而完整的，而绝非只是对其他人的研究工作进行阐述。经过了两年，即在1984年夏，我又应华东工学院和南京邮电学院的邀请，在南京讲习班上，作了《网络图论专题与宽带匹配网络理论》的又一系列讲演，在这次讲习班上还有另一位讲演者，即日本东京工业大学的梶谷洋司教授。令人欣慰的是，这两次讲演引起了国内有关人士对图论及其应用、对宽带匹配网络理论这两个课题的浓厚兴趣。

讲习班的大多数参加者是中国各大学的教师，他们的共同要求之一是渴望得到大量的原始研究论文。本论文选集旨在满足这一方面的需要。我对这些课题的兴趣开始于在伊里诺大学和俄亥俄大学的实验，在那里，我把自己的一些开创性的论文提供给我的学生，这在培养学生的兴趣方面获得了满意的结果。由此，我确信，为了提高网络理论的研究水平，可阅读该领域中的许多开创性文献，因为这些文献有力地提供了通常在教科书中所缺乏的见解和清晰的证明。

网络理论作为一个领域来说，其源远流长，而许多其它工程领域和专业的历史却非如此悠久。它可以被认为是从欧姆定律（1827年）和基尔霍夫定律（1845年）提出后开始的。这一领域在近30年内发展十分迅速。目前，每年大约有400种出版物问世，其中还未包括专利、论文和报告，更没有迹象表明这一数字会减少。上述数字从一个侧面说明了这一领域的迅速发展程度。

我在伊里诺大学工作时，自1962年开始对网络理论发生兴趣，当时我在该大学的前田渡（Watara Mayeda）教授指导下工作。这些年来我对网络理论的兴趣是多方面的，包括应用图论、分布放大器、量纲分析、无源和有源滤波器、宽带匹配网络理论、有源网络、反馈放大器理论、网络流及通信网。我认为本书是涉及上述课题中的有关两个专题的一本论文选集。也就是说，本书的内容主要是集中在应用图论和宽带匹配理论这两个学科领域。我希望这一著作的翻译出版将有助于中国的研究者们深入地理解开创性论文及其尔后发展而成的论著。

我愿借此机会向南京邮电学院吴新余副教授表示衷心感谢，并对他热心于科学研究的精神和他力图为中国工程学术团体服务的信念表示赞赏。我十分感谢湖南科技出版社的领导及有关成员，特别是责任编辑陈清山先生，如果没有他们的不懈努力和大力支持，此项工作的完成是完全不可能的。

我想对进行中文翻译的成员，首先对吴新余副教授，其次也对戴旦前副教授（参加了部分翻译工作）表示诚挚的谢意。他们做了一件极有意义的工作。我深深地知道，在该论文选

集的翻译、出版中需要做大量的工作，而这些工作确实是十分艰难而繁重的。我还要向所有对译文提出过意见和进行过认真校阅的人员表示衷心感谢，其中有天津大学刘美轮教授、成都电讯工程学院王兆明教授以及南京邮电学院欧阳珉教授。最后，我向对此项工作给以过帮助和对这一成果感到高兴的人们表示衷心的感谢。

陈惠开

1986年3月

# 第一部分　图论及其应用

## 一、论一个图的树、补树、回路和割集之间的代数关系


### 摘　　要

本文给出了一个图的树（$k$-树）和回路、补树（补$k$-树）和割集之间的代数关系。它们可作为Hakimi与Green的关于列举树与$k$-树的方法的推广与发展。还给出了利用初等变换产生树与补树的代数关系。


**1.引言**

在线性电路的拓扑分析中，最终是将问题化简为在有关的图中求树与求$k$-树的问题。许多作者已研究了产生树和k-树的有效方法〔1〕～〔9〕。本文的目的是指出在树、$k$-树、补树、补$k$-树、回路、通路和割集之间存在着紧密的关系。

**2.定义与预备知识**

在本文中我们仅研究无向的、带标号的线图$G$，即用符号$e_1$，$e_2$，…，$e_m$来标记边，用$v_1$，$v_2$，…，$v_{r+c}$来标记节点；这里$m$是$G$的边数；$r$是$G$的秩；$c$是$G$的连通片的数目；以及$n$是$G$的零度。为方便起见，$G$的每一个子图$S$也用其边的“乘积”或并置来表示，即$G$的一个树可用乘积$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$来表示。

四种集合论的二元运算，“并”、“交”、“环和”与“差”分别用$\cup$、$\cap$、$\oplus$及$-$来表示。它们用于两种稍有不同的对象。例如，若$g_1$和$g_2$是$G$的两个子图，那么$g_1\cup g_2$表示了一个包含有既在$g_1$中或在$g_2$中、或在二者之中元素所构成的子图。如果$H_1$和$H_2$是两个集合，那么$H_1\cup H_2$表示两个集合的并。这对于$\cap$、$\oplus$及$-$也是成立的。为方便起见，$\phi$用来表示零图[1]，即$G$的边是一个空集、且$H_0=\{\}$、表示空集。

下面，我们定义$G$的任意两个非空子集$H_1$和$H_2$的“笛卡儿乘积”运算（用符号$H_1\times H_2$表示）为：

$H_1\times H_2=\{g_i\cup g_j;\ g_i在H_1中,\ g_j在H_2中\}$，以及$H_1\times H_0=H_0\times H_1=H_0$，

即是将$H_1$中的子图与$H_2$中的子图取所有可能的并而得到的集合。

令$g$是$G$的一个子图，$e$是$G$的一条边。我们定义$g$对$e$的“偏导数”为（见〔1〕）：

$$\frac{\partial g}{\partial e}=\partial g/\partial e=g\oplus e，当e在g中时。$$

---

1　为简单起见，我们已经假设$G$的每一个子图是用其边的“乘积”来表示的。因此，它包括了孤立节点集合的模糊情况。从网络理论观点看来，这完全是满足的，因此在本文中，零图是否包含孤立节点的集合是无关紧要的，关于这一点的严格处理，可参阅〔9〕。

$= \phi$，当$e$不在$g$中时。

如果$H$是$G$的子图的一个集合，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \partial H / \partial e = \left\{ \frac{\partial g}{\partial e};\ g\text{在}H\text{中}，e\text{在}g\text{中} \right\}$$

如果$g = e_1 e_2 \cdots e_k$是$G$的子图，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \partial H / \partial g = \frac{\partial H}{\partial e_1} \oplus \frac{\partial H}{\partial e_2} \oplus \cdots \oplus \frac{\partial H}{\partial e_k}$$

所谓$\partial^2 H/(\partial g_1 \partial g_2)$，我们意指$\partial(\partial H/\partial g_2)/\partial g_1$。容易证明求偏导数的次序是无关紧要的。还能证明（见[1]）

$$\frac{\partial(H_1 \oplus H_2)}{\partial g} = \frac{\partial H_1}{\partial g} \oplus \frac{\partial H_2}{\partial g} \tag{1}$$

如果在$H_1$中的子图均不包含$H_2$中子图的边时，则

$$\frac{\partial(H_1 \times H_2)}{\partial g} = \left( H_1 \times \frac{\partial H_2}{\partial g} \right) \cup \left( H_2 \times \frac{\partial H_1}{\partial g} \right) \tag{2}$$

特别地，若$H_2$中的子图均不含$g$中的一条边，由于$\partial H_2/\partial g = H_0$，故我们有：

$$\frac{\partial(H_1 \times H_2)}{\partial g} = H_2 \times \frac{\partial H_1}{\partial g}$$

如果$H_1$和$H_2$是$G$的两个子图的集合，使得$H_1$中的子图均不包含$H_2$中子图的一条边，并且$H_2$中的子图均不包含$G$的任何一个子图$g_1$，$g_2$，…，$g_k$的一条边，则

$$\frac{\partial^k(H_1 \times H_2)}{\partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k} = H_2 \times \left( \frac{\partial^k H_1}{\partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k} \right) \tag{3}$$

**3.树、k-树和独立回路之间的关系**

为了不失一般性起见，我们假设给定的图$G$是连通的。通过节点$v_1$，$v_2$，…，$v_t$的集合将$G$分解为两个子图$G'$与$G''$，使得$G$由$G'$的节点$v_1'$，$v_2'$，…，$v_t'$分别与$G''$的节点$v_1''$，$v_2''$，…，$v_t''$重合而形成。我们假设$G'$是连通的且$G''$有$k$个连通片。令$T^x$与$T_k^x$分别是$G$与$G^x$中的树与$k$–树的集合（$x$='或"）。对于$k=1$的情况，我们定义$T^x = T_1^x$，即是$G^x$中树的集合。又令$P_{ij}'$与$P_{ij}''$分别是在$G'$与$G''$中，连接节点$v_i'$与$v_j'$之间以及$v_i''$与$v_j''$之间的两条通路。因为$G''$有$k$个连通片，所以$v_1''$，$v_2''$，…，$v_t''$可分为$k$个互不相交的子集。为简单起见，我们假设在一个子集中的节点依顺序标记。例如$v_9''$，$v_{10}''$，$v_{11}''$，$v_{12}''$以及$v_{13}''$是一个子集的节点。

**引理1.**（*Hakimi*和*Green*）

如果$k=1$，那么

$$T = \frac{\partial^{t-1}(T' \times T'')}{\partial(P_{12}' \cup P_{12}'')\partial(P_{23}' \cup P_{23}'') \cdots \partial(P_{t-1,t}' \cup P_{t-1,t}'')}$$

**定理1.**

$$T = \frac{\partial^{t-k}(T' \times T_k'')}{\partial(P_{12}' \cup P_{12}'')\partial(P_{23}' \cup P_{23}'') \cdots \partial(P_{t-1,t}' \cup P_{t-1,t}'')}$$

对于$P_{ij}'' = \phi$，不用对$(P_{ij}' \cup P_{ij}'')$取偏导数。（注意有$k-1$条这种零通路。[1]）

证明：我们对$G''$中的连通片数$k$用归纳法来证明该定理。对于$k=1$的情况，该定理成立。

1　类似定理1的结果最近由Jong等人给出。

假设该定理对于任何具有$k-1$个（或少于$k-1$个）连通片的$G''$成立，我们将证明该定理对具有$k$个连通片的$G''$也成立。

令$G''_1$，$G''_2$，…，和$G''_k$是$G''$的各个连通片，使得$G''_i$与$G'$通过节点$t_i$的一个集合而连接，即$t=t_1+t_2+\cdots+t_k$。为方便起见，我们假设在$G''$中$v''_1$，$v''_2$，…，$v''_t$已采用这种方法标号，即$v''_y$在$G''_i$中，$v''_z$在$G''_j$中，且若$i<j$，则$y<z$。利用归纳法的假设，子图$G-G''_k$的树的集合$T^*$由下式给出：

$$T^*=\frac{\partial^{t-t_k-k+1}T'\times T^{\#}_{k-1}}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-t_k-1,t-t_k}\cup P''_{t-t_k-1,t-t_k})}$$

此处$T^{\#}_{k-1}$是在$G''-G''_k$中（$k-1$）树的集合。利用引理1，$G$中的树的集合由下式给出：

$$T=\frac{\partial^{t_k-1}T^*\times T^{@}}{\partial(P'_{t-t_k+1,t-t_k+2}\cup P''_{t-t_k+1,t-t_k+2})\cdots\partial(P'_{t-1,t}\cup P''_{t-1,t})}$$

此处$T^{@}$ 是$G''_k$中树的集合。因为利用(3)式

$$T^*\times T^{@}=\frac{\partial^{t-t_k-k+1}T'\times T^{\#}_{k-1}\times T^{@}}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-t_k-1,t-t_k}\cup P''_{t-t_k-1,t-t_k})}$$

且$T^{\#}_{k-1}\times T^{@}=T''_k$立即得到此定理。定理证毕。

在下面，所谓$G$的$f$回路集，我们是指$G$的基本回路的一个集合。

**定理2**

如果$C_{f1}$，$C_{f2}$，…，$C_{fn}$是$G$的基本回路集，那么

$$T=\frac{\partial^n\{G\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{fn}}$$

证明：对零度$n$我们利用归纳法来证明该定理。对于$n=1$的情况显然此定理成立，因为该图仅包含了一个回路。我们假设该定理对于任意一个零度为（$n-1$）［或少于($n-1$)］的图成立。令$G'$是从$G$移去了相对所选树的一个连支$e$而得到的图。因为$e$仅包含在一个基本回路集内，令该基本回路集为$C_{fn}$。容易证明$G'$仍然是连通的且其零度为$n-1$，此外，$C_{f1}$，$C_{f2}$，…，$C_{f(n-1)}$是$G'$的$f$回路集。利用归纳法的假设，$G'$的树的集合$T'$为：

$$T'=\frac{\partial^{n-1}\{G'\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{f(n-1)}}$$

利用引理1，$G$的树的集合$T$由下式给出

$$T=\partial(T'\times\{e\})/\partial C_{fn}$$

因为利用(3)式，

$$T'\times\{e\}=\frac{\partial^{n-1}\{G'\}\times\{e\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{f(n-1)}}$$

且$\{G'\}\times\{e\}=\{G\}$，该定理立即得到，定理证毕。

**引理2**

如果$g$、$g_1$与$g_2$是$G$的子图，$H$是$G$的子图集合，那么

$$\frac{\partial H}{\partial(g_1\oplus g_2)}=\frac{\partial H}{\partial g_1}\oplus\frac{\partial H}{\partial g_2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial g\partial g}=\frac{\partial^2 H}{\partial g^2}=H$$

**定理3**

如果$C_1$，$C_2$，…，$C_n$是$G$的独立回路或为几个边不相重的回路之并，那么

$$T=\frac{\partial^n\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_n}$$

重复應用(1)式、引理2，同时考虑到任何一个回路或几个边不相重的回路之并可以表示为$f$回路集的线性组合（环和）。上述定理便容易得到证明。

**推论1.**

如果$G_k$是一个从$G$将节点$v_1$，$v_2$，…，$v_k$合并（短接）在一起然后移去所有由此而产生的自环而得到的图，那么将节点$v_1$，$v_2$，…，$v_k$分离的$k$-树集合$T_{1,2,\cdots,k}$由下式给出：

$$T_{1,2,\cdots,k}=\frac{\partial^u\{G_k\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_u}$$

式中$C_1$，$C_2$，…，$C_u$是$G_k$中的$u$个独立回路或为几个边不相重的回路之并，$u$是$G_k$的零度。

我们将用下列例子来说明这一点。

**例1.**

假设如图1($a$)所示图$G$的树集合是所求取的。又假设图$G$已分为如图1($b$)所示的两个子图$G'$与$G''$。令$P'_{12}=bd$，$P'_{34}=bc$，$P''_{12}=f$以及$P''_{34}=e$。注意我们并不关心求取$P'_{23}$，因为$P''_{23}=\phi$。$G'$和$G''$的树集合$T'$和2-树集合$T''_2$分别给出如下：

$$T'=\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd\}\text{和}T''_2=\{ef\}$$

根据定理1，$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T=\frac{\partial^2 T'\times T''_2}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{34}\cup P''_{34})}=\frac{\partial^2\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd\}\times\{fe\}}{\partial bdf\ \partial bce}$$

$$=\frac{\partial}{\partial bdf}(\{abcf,abdf,acdf,bcdf\}\oplus\{abef,adef,bdef\}\oplus\{acfe,adfe,\ dcfe\})$$

$$=\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd,\ abe,\ bde,\ ace,\ dce\}$$

$$\oplus\{abf,\ acf,\ bcf,\ bfe,\ cfe\}\ominus\{acf,\ adf,\ dcf,\ afe,\ dfe\}$$

$$=\{abc,\ abd,\ acd,\ bdc,\ abe,\ bde,\ ace,\ dce,\ abf,\ bcf,\ bfe,\ cfe,\ adf,\ dcf,\ afe,\ dfe\}$$

我们也可利用定理3来产生$G$的树集合$T$。令$C_1=ade$，$C_2=bce$和$C_3=bdf$。则

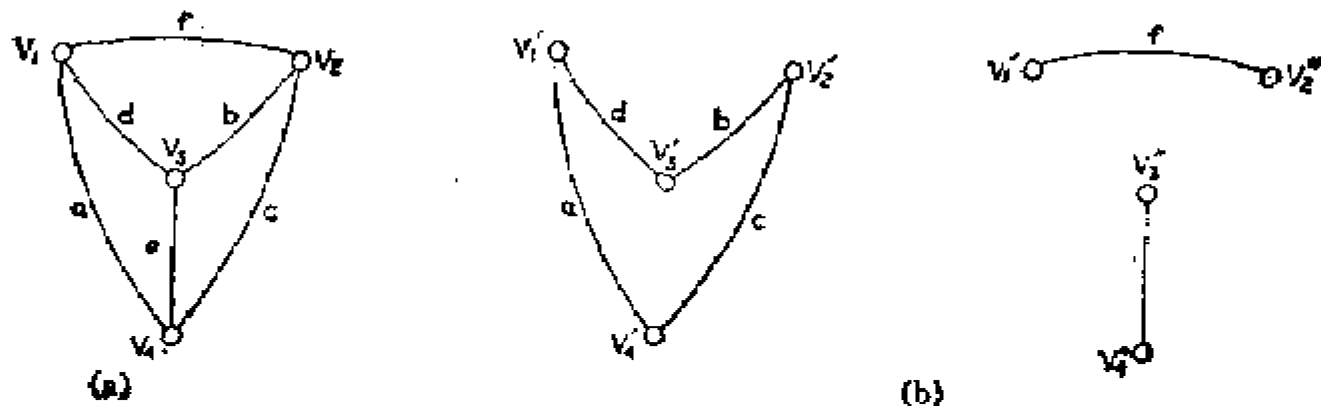



图1　线图$G$及其分解($a$)$G$，($b$)$G'$与$G''$

$$T=\frac{\partial^3\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\partial C_3}=\frac{\partial^3\{abcdef\}}{\partial ade\ \partial bce\ \partial bdf}=\frac{\partial^2(\{abcde\}\ominus\{abcef\}\oplus\{acdef\})}{\partial ade\ \partial bce}$$

$$=\frac{\partial(\{abcd\}\oplus\{abde\}\oplus\{acde\}\oplus\{abcf\}\oplus\{abef\}\oplus\{acef\}\oplus\{acdf\}\oplus\{adef\})}{\partial ade}$$

$$=\{abc\}\oplus\{bcd\}\oplus\{abd\}\oplus\{abe\}\oplus\{bde\}\oplus\{acd\}\oplus\{ace\}\oplus\{cde\}\oplus\{bcf\}$$
$$\oplus\{abf\}\oplus\{bef\}\oplus\{acf\}\oplus\{cef\}\oplus\{acf\}\oplus\{cdf\}\oplus\{adf\}\oplus\{aef\}\oplus\{def\}$$
$$=\{abc,\ bcd,\ abd,\ abc,\ bde,\ acd,\ cde,\ bdf,\ abf,\ bef,$$
$$cef,\ cdf,\ adf,\ aef,\ def,\ ace\}$$

**4.补树、补$k$-树和独立割集之间的关系**

本节的目的是导出与前一节中相对偶的一些定理。我们将用一组独立的割集来代替一组独立的回路从而得到补树及补$k$-树的集合。

一个补树及一个补$k$-树分别定义为给定图$G$的一个树的补图及一个$k$-树的补图。为方便起见，符号$\bar{t}_{1,2,\cdots,k}$用来表示取$k$-树$t_{1,2,\cdots,k}$的补图而得到的补$k$-树，此处$t_{1,2,\cdots,k}$是$G$中节点$v_1$，$v_2$，…，$v_k$分离的一个$k$-树。类似地，$T_{1,2,\cdots,k}$及$\bar{T}_{1,2,\cdots,k}$分别表示在$G$中由$t_{1,2,\cdots,k}$及$\bar{t}_{1,2,\cdots,k}$得到的$k$-树及补$k$-树的集合。对于$k=1$的情况，我们定义$t=t_1$，即是$G$中的一个树；$\bar{t}=\bar{t}_1$是$G$中的一个补树；$T=T_1$，即是$G$的树集合；$\bar{T}=\bar{T}_1$是$G$的补树集合。

**定理4.**

如果$Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_k$是一个割集，它把$G$中的节点$v_i$与$v_j$分离，如果$Y(e_q)$是$G$的2-树$t_{i,j}$的集合，其中每一个2-树不含有$e_q$边，$q=1,\ 2,\ \cdots k$，那么$G$的树集合$T$由下式给出为：

$$T=Z(e_1)\oplus Z(e_2)\oplus\cdots\oplus Z(e_k)$$

式中$Z(e_q)=\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$，$q=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

证明：显然每一个$Z(e_q)$的元素或者是含有$G$中$e_q$边的一个树，或者是含有$G$的一个回路的子图。下面，我们将证明如果是一个树的话，它必须在$Z(e_q)$的集合中出现奇数次，且如果是含有一个回路子图的话，它将在$Z(e_q)$的集合中出现偶数次。

令$t$是$G$的一个树且$P_{ij}$是$t$中连接$v_i$和$v_j$之间的唯一通路。因为$P_{ij}$和$Q_{ij}$必须具有奇数个共有元素[2]。为不失一般性起见，我们假定，$t=e_1e_2\cdots e_{2h-1}\cup t'$，此处$2h-1\leq k$，$t'$是从$t$移去了$e_1$，$e_2$，…，$e_{2h-1}$后而得到的子图，$e_1$，$e_2$，…，$e_{2h-1}$是通路$P_{ij}$和割集$Q_{ij}$之间的公共边。由此得出$t$将出现在集合$Z(e_1)$，$Z(e_2)$，…，$Z(e_{2h-1})$中。下面，我们必须证明树$t$不出现在集合$Z(e_u)$中，$u=2h,\ 2h+1,\ \cdots,\ k$。假定不是如此，即假设树$t$也包含在$Z(e_u)$中，显然，边$e_u$必须包含在$P_{ij}$中。否则，子图$t-e_u$将不是$G$中形如$t_{i,j}$的一个2-树。于是$e_u$在$P_{ij}\cap Q_{ij}$中，因为$P_{ij}\cap Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_{2h-1}$，同时$e_u$又不在$e_1e_2\cdots e_{2h-1}$之中，于是出现了矛盾。因此，$G$的每一个树都在集合$Z(e_q)$中出现奇数次。

令$z$是在集合$Z(e_q)$中包含有一个回路的子图，因为一个回路和一个割集的公共边总是为偶数的[2]，为不失一般性起见，我们假设$z=e_1e_2\cdots e_{2w}\cup z'$，此处$2w\leq k$，$z'$是从该回路由$z$移去$e_1,e_2,\cdots$,和$e_{2w}$而得到的子图。于是，$z$将出现在含有集合$Z(e_q)$的$2w$个集合中，即出现$Z(e_1)$，$Z(e_2)$，…及$Z(e_{2w})$中，显然Z不会出现在任何集合$Z(e_v)$中，$v=2w+1,\ 2w+2,\ \cdots,\ k$。否则，子图$z-e_v$将不是$G$中形如$t_{i,j}$的一个2-树，因为它含有一个回路。于是，$Z(e_q)$的任何元素，如果不是一个树，它将在集合$Z(e_q)$中出现偶数次。这就完成了本定理的证明。

现在定理4可用来产生$G$的补树集合。

**定理5.**

如果$Q_{ij}$是把$G$中的节点$v_i$和$v_j$分离的割集，那么$G$的补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$$\bar{T}=\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial Q_{ij}}$$

证明：

$X(e_q)=\{x;\ x在\bar{T}_{i,j}中，且e_q在x中\}$，

$X(\bar{e}_q)=\{x;\ x在\bar{T}_{i,j}中，且e_q不在x中\}$，$q=1,\ 2,\ \cdots,\ k$以及$Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_k$。

因为

$$\bar{T}_{i,j}=X(e_1)\oplus X(\bar{e}_1)=X(e_2)\oplus X(\bar{e}_2)=\cdots=X(e_k)\oplus X(\bar{e}_k)$$

由此得到：

$$\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial Q_{ij}}=\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial e_2}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial e_k}$$

$$=\left[\frac{\partial X(e_1)}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial X(\bar{e}_1)}{\partial e_1}\right]\oplus\cdots\oplus\left[\frac{\partial X(e_k)}{\partial e_k}\oplus\frac{\partial X(\bar{e}_k)}{\partial e_k}\right]$$

$$=\frac{\partial X(e_1)}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial X(e_2)}{\partial e_2}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial X(e_k)}{\partial e_k}$$

下面，我们观察到$\partial X(e_q)/\partial e_q$的每一个元素是$\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$中唯一元素的补，此处$Y(\bar{e}_q)$是$G$的2-树$t_{i,j}$的集合，其中每一个2-树不包含$e_q$边。因此，我们定义：

$\bar{H}=\{x;\ x是G中h的补，h在H中\}$，

此处$H$是$G$的子图的集合，$Z(e_q)=\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$，我们有：

$$\frac{\partial \bar{T}_{i,j}}{\partial Q_{ij}}=\bar{Z}(e_1)\oplus\bar{Z}(e_2)\oplus\cdots\oplus\bar{Z}(e_k)=\bar{H}_1$$

此处$H_1=Z(e_1)\oplus Z(e_2)\oplus\cdots\oplus Z(e_k)$。利用定理4，我们有$H_1=T$，即$G$的树集合。立即得出该定理，定理证毕。

上述定理的一个简单的推广如下。

**推论2.**

如果$Q_{k,12\cdots(k-1)}$是一个割集，它把$v_k$与$v_1$，$v_2$，…，及$v_{k-1}$分离，那么

$$\bar{T}_{1,2,\cdots,k-1}=\frac{\partial \bar{T}_{1,2,\cdots,k}}{\partial Q_{k,12\cdots(k-1)}}$$

下面，所谓$G$的$f$割集，我们意指它是$G$的基本割集的一个集合。

**定理6**

如果$Q_{f1}$，$Q_{f2}$，…，及$Q_{fr}$是$G$的$r$个$f$割集，那么

$$\bar{T}=\frac{\partial^r\{G\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{fr}}$$

证明：对$G$的秩$r$我们将用归纳法来证明此定理。显然，对于$r=1$的情况，该定理成立。假设该定理对于秩为$r-1$（或小于$r-1$）的任何图成立，我们将证明该定理对于任何秩为$r$的图也成立。

令$G'$是一个从$G$首先将一条边$e$的两端点合并（短接）在一起，然后移去$e$而得到的图形。此处$e$是$f$割集的确定树中的一个树支。因为$e$仅可能在$f$割集的一个集合中，令该割集为$Q_{fr}$。现在$G'$的秩为$r-1$，且它含有割集$Q_{f1}$，$Q_{f2}$，…，$Q_{f(r-1)}$作为其$f$割集。利用归纳法的假设，$G'$的补树$\bar{T}'$的集合为

$$T' = \frac{\partial^{r-1}\{G'\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{f(r-1)}}$$

因为$\{e\}\times \overline{T}'$是分离$e$的两个端点的$G$之补2-树的集合，$Q_{fr}$是一个把$e$的两个端点分离的割集（根据定理5)，则$G$的补树集合$\overline{T}$由下式给出：

$$\overline{T} = \frac{\partial(\{e\}\times \overline{T}')}{\partial Q_{fr}} = \frac{\partial}{\partial Q_{fr}}\left[\{e\}\times \frac{\partial^{r-1}\{G'\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{f(r-1)}}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q_{fr}}\left[\frac{\partial^{r-1}\{e\}\times\{G'\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{f(r-1)}}\right] = \frac{\partial^{r}\{G\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{fr}}$$

定理证毕。

因为每一割集或几个边不相重的割集之并可以表示为$f$割集的线性组合，下列定理是定理6的一个简单推广，并且可完全类似用定理3的证明方法来加以证明。

**定理7**

如果$Q_1$，$Q_2$，…，与$Q_r$是$r$个独立割集或为几个边不相重的割集之并，那么

$$\overline{T} = \frac{\partial^{r}\{G\}}{\partial Q_1\partial Q_2\cdots\partial Q_r}$$

**推论3**

如果$G_k$是从$G$将节点$v_1$，$v_2$，…$v_k$合并在一起然后移去所有的由此而产生的自环之所得图，则$G$的补树集合$\overline{T}_{1,2,\cdots,k}$由下式给出：

$$\overline{T}_{1,2,\cdots,k} = \frac{\partial^{v}\{G\}}{\partial Q_1\partial Q_2\cdots\partial Q_v}$$

此处$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_v$是$G_k$的$v$个独立割集或几个边不相重的割集之并，$v$是$G_k$的秩。

通过一组节点$v_1$，$v_2$，…，$v_t$将$G$分解为两个子图$G'$和$G''$，使得$G$可由$G'$的节点$v'_1$，$v'_2$，…，$v'_t$分别与$G''$的节点$v''_1$，$v''_2$，…，$v''_t$重合而形成。还令符号$T'_{1,2,\cdots,t}$和$T''_{1,2,\cdots,t}$用来分别表示在$G'$和$G''$中形如$t_{1,2,\cdots,t}$的树$t$的集合，此处下标$_{1,2,\cdots,t}$或者表示$G'$中的节点$v'_1$，$v'_2$，…，$v'_t$，或者表示$G''$中的节点$v''_1$，$v''_2$，…，$v''_t$。类似地，$\overline{T}'_{1,2,\cdots,t}$与$\overline{T}''_{1,2,\cdots,t}$分别表示在$G'$与$G''$中形如$\overline{t}_{1,2,\cdots,t}$的补树的集合。$G$的关联割集定义为与$G$的一个节点相关联的边之集合。为方便起见，我们将分别用符号$q_i$，$q'_i$与$q''_i$来表示$G$、$G'$与$G''$中相应于$v_i$，$v'_i$与$v''_i$的关联割集。利用这些定义，现在可叙述一条与定理1相对偶的结论。

**推论4**

$$\overline{T} = \frac{\partial^{t-1}H}{\partial q_1\partial q_2\cdots\partial q_{t-1}}$$

此处$H=\overline{T}'_{1,2,\cdots,t}\times \overline{T}''_{1,2,\cdots,t}$，$\overline{T}$是$G$中补树的集合。

证明：为方便起见，令$G$的节点用下列方法标记。在$G'$中除了$v_1$，$v_2$，…，$v_t$以外的节点用$v_{t+1}$，$v_{t+2}$，…，$v_{t+m'}$来标记，在$G''$中所包含的节点除了$v_1$，$v_2$，…，$v_t$以外的节点用$v_{t+m'+1}$，$v_{t+m'+2}$，…，$v_{t+m'+m''}$来标记，此处$m'+t$和$m''+t$分别表示$G'$和$G''$中的节点数。于是$q_i=q'_i$，$i=t+1$，…，$t+m'$；$q_i=q''_i$，$i=t+m'+1$，…，$t+m'+m''$，$q_i$是$q'_i$和$q''_i$的互不相重之并，$i=1$，2，…，$t$，利用定理7，我们有：

$$\overline{T} = \frac{\partial^{m'+m''+t-1}\{G\}}{\partial q_1\partial q_2\cdots\partial q_{t-1}\partial q_{t+1}\partial q_{t+2}\cdots\partial q_{t+m'}\partial q_{t+m'+1}\cdots\partial q_{t+m'+m''}}$$

$$=\frac{\partial^{m'+m''+t-1}\{G'\}\times\{G''\}}{\partial q_1\partial q_2\cdots\partial q_{t-1}\partial q'_{t+1}\partial q'_{t+2}\cdots\partial q'_{t+m'}\partial q''_{t+m'+1}\cdots\partial q''_{t+m'+m''}}$$

$$=\frac{\partial^{m'+t-1}}{\partial q_1\cdots\partial q_{t-1}\partial q'_{t+1}\cdots\partial q'_{t+m'}}\left[\{G'\}\times\frac{\partial^{m''}\{G''\}}{\partial q''_{t+m'+1}\cdots\partial q''_{t+m'+m''}}\right]$$

$$=\frac{\partial^{t-1}}{\partial q_1\cdots\partial q_{t-1}}\left[\frac{\partial^{m'}\{G'\}}{\partial q'_{t+1}\cdots\partial q'_{t+m'}}\times\frac{\partial^{m''}\{G''\}}{\partial q''_{t+m'+1}\cdots\partial q''_{t+m'+m''}}\right]$$

$$=\frac{\partial^{t-1}}{\partial q_1\cdots\partial q_{t-1}}\left[\frac{\partial^{m'}\{G'_s\}}{\partial q'_{t+1}\cdots\partial q'_{t+m'}}\times\frac{\partial^{m''}\{G''_s\}}{\partial q''_{t+m'+1}\cdots\partial q''_{t+m'+m''}}\right]$$

$$=\frac{\partial^{t-1}\bar{T}'_s\times\bar{T}''_s}{\partial q_1\partial q_2\cdots\partial q_{t-1}}$$

式中$\bar{T}'_s$和$\bar{T}''_s$分别表示$G'_s$和$G''_s$的补树的集合，并且$G'_s$和$G''_s$分别是从$G'$和$G''$、利用将节点$v'_1$，$v'_2$，…，$v'_t$合并在一起和将$v''_1$，$v''_2$，…，$v''_t$合并在一起而得到的两个图[1]。该定理是从下列事实而得到，即$G'_s$和$G''_s$中的补树分别也是$G'$和$G''$的补树。于是，我们得到了所希望的结果。

我们将用下列例子来说明上述结果。

例2.

研究图1($a$)所示的图。令$Q_1=adf$，$Q_2=abef$，且$Q_3=bcf$，利用定理7，$G$的补树集合$\bar{T}$由下式给出，

$$\bar{T}=\frac{\partial^3\{abcdef\}}{\partial adf\,\partial abcf\,\partial bcf}$$

$$=\frac{\partial(\{abcd\}\oplus\{acde\}\oplus\{bcde\}\oplus\{abde\}\oplus\{abdf\}\oplus\{adef\}\oplus\{bdef\}\oplus\{acde\}\oplus\{acdf\}\oplus\{cdef\})}{\partial adf}$$

$$=\frac{\partial\{abcd,bcde,abde,abdf,adef,bdef,acdf,cdef\}}{\partial adf}$$

$$=\{abd,ade,acd,cde,abc,bce,abe,abf,,aef,bef,acf,cef,bcd,bdf,def,cdf\}$$

我们还可利用推论4来产生$G$的补树集合$\bar{T}$。令该图如图1($b$)所示地分解。那么

$$\bar{T}=\frac{\partial^3(\{abcd\}\times\{ef\})}{\partial adf\,\partial bcf\,\partial bde}$$

$$=\frac{\partial^3\{abcdef\}}{\partial adf\,\partial bcf\,\partial bde}$$

$$=\frac{\partial^2\{acdef,abcef,abcdf\}}{\partial adf\,\partial bcf}$$

$$=\frac{\partial\{adef,acde,acef,abef,abce,acdf,abdf,abcd\}}{\partial adf}$$

$$=\{def,aef,ade,cde,cef,bef,abe,bce,cdf,acf,acd,bdf,abf,abd,bcd,abc\}$$

1 我们不移去所有由此而产生的自环。

当然，这与我们早先所得的结果是相同的。

注意在应用推论4时，分解图$G'$和$G''$无需是连通的。这是一个非常希望的特性，因为我们可以把$G$分解为$G'$和$G''$，使得每个子图都含有很多连通片。这将大大地减少在列举$G'$和$G''$的树时所需的工作量。

**5. 利用初等树变换来产生树**

在本节中，我们将利用初等树变换来导出得到$G$的树集合的方法。此方法与 Mayeda 和 Seshu[4]，Hakimi[6]，Fujisawa[7]和Chen[8]的方法有明显的相似性。

令$g$是$G$的一个子图。符号$p(g)$表示$g$的边数。如果$g_1$和$g_2$是$G$的子图，在$p(g_1)=p(g_2)$时，那么$g_1$和$g_2$之间的距离用$d(g_1, g_2)$表示，它定义为存在于一个子图中而不存在于另一个子图中的边数，即$d(g_1, g_2)=\frac{1}{2}p(g_1 \oplus g_2)$。特别地$g_1$和$g_2$可能是$G$的树和补树。

令$t$是$G$的一个树，$e_1$是在$G$中但不在$t$中的一条边，那么若$t'$是$G$的一个树，则称下列运算

$$e_1 \cup t - e_2 = t'$$

是一个初等树变换，其中$e_2$是$t$的一条边。

为方便起见，令$t_0$及$\bar{t}_0=e_1e_2\cdots e_n$分别是$G$的基准树及基准补树，使得$G=e_1e_2\cdots e_n \cup t_0$，此处$n$再次地表示$G$的零度。符号$t(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$用来示$G$的一个树，使得$\bar{t}_0 \cap t(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$。类似地，$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$是用来表示$G$中形如$t(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$的树的集合。显然，$t(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$是$G$中的一个树，它离基准树的距离为$q$。

**定理8.**

$$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}\}\times\frac{\partial^q\{t_0\}}{\partial P_{i_1}\partial P_{i_2}\cdots\partial P_{i_q}}$$

$q=1, 2, \cdots, n$。此处$P_{i_x}$是在$t_0$中连接$\bar{t}_0$中连支$e_{i_x}$的两个节点之间的唯一通路，$x=1, 2, \cdots, q$，以及$\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个非空子集。

证明：

因为对于在$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$中的每一个$t$，$\bar{t}_0 \cap t=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$，由此得到在$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$的元素和$G_s$的树之间存在着一一对应关系，此处$G_s$是从$G$首先利用把$e_{i_1}$，$e_{i_2}$，…，$e_{i_q}$短路，然后再移去所有包含在$\bar{t}_0$中的边而得到的图。现在$G_s$具有的零度为$q$，并且$P_{i_1}$，$P_{i_2}$，…，$P_{i_q}$是$G_s$中的$q$个独立回路或若干个回路作边不相重的并。要不然，因为本定理可完全类似于定理10那样加以证明，所以它是容易得到满足的。利用定理3，$G_s$的树的集合$T_s$由下式给出：

$$T_s=\frac{\partial^q\{G_s\}}{\partial P_{i_1}\partial P_{i_2}\cdots\partial P_{i_q}}$$

因为$\{G_s\}=\{t_0\}$，在$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$中的每一个$t$是$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$与$T_s$中的某个$t_s$的互不重之并，反之亦然，把这两种情况代入便得出该定理。定理证毕。

**推论5.**

当且仅当$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\neq\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$，则$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})\cap T(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_m})=H_0$此处$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$和$\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的子集。

**推论6.**

---

* 在原文中此公式有印刷错误，译者已作更正，在推论7的公式中也有类似情况。

$$T=\bigcup_{q=0}^{n}\bigcup_{(i_1 i_2\cdots i_q)}T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}),$$

此处$q=0$时，$\cup\cup T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{t_0\}$，第二个并运算是对所有可能的$\{1,2,\cdots,n\}$的非空子集$\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$而求取。

**定理.9**

$$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{e_{i_q}\}\times\frac{\partial T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})}{\partial P_{i_q}}$$

$q=1, 2, \cdots, n$，此处$\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的非空子集，且在$q=1$时，$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})=\{t_0\}$。

证明：

$$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$$

$$=\frac{\partial}{\partial P_{i_q}}\left[\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}\}\times\frac{\partial^{q-1}\{t_0\}}{\partial P_{i_1}\partial P_{i_2}\cdots\partial P_{i_{q-1}}}\right]$$

$$=\{e_{i_q}\}\times\frac{\partial T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})}{\partial P_{i_q}}$$

上述定理指出，离开$t_0$距离为$q$的树集合$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$可以从离开$t_0$距离为$q-1$的树集合$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})$而得到。在方程式中的偏导数的运算实际上是对应于前面所定义的初等树变换。应该注意，在求取$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$时，宗量的次序是无关紧要的，即$T(e_1e_2\cdots e_q)=T(e_qe_{q-1}\cdots e_1)$。研究$P_{i_1}\oplus P_{i_2}\oplus\cdots\oplus P_{i_q}=\varnothing$成立与否是有用的。我们知道，相应的连支$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_q}$至少形成$G$的一个回路，于是$T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\varnothing$。

例3.

研究图1(a)中所示的图。令$t_0=ace$和$\bar{t}_0=bdf$。那么$P_b=ce$，$P_d=ae$，和$P_f=ac$。离开$t_0$距离为1的树集合由下式给出：

$$T(b)=\{b\}\times\frac{\partial\{t_0\}}{\partial P_b}=\{abc\}\oplus\{abe\}=\{abc,abe\}$$

$$T(d)=\{d\}\times\frac{\partial\{t_0\}}{\partial P_d}=\{acd\}\oplus\{ced\}=\{acd,ced\}$$

$$T(f)=\{f\}\times\frac{\partial\{t_0\}}{\partial P_f}=\{aef\}\oplus\{cef\}=\{aef,cef\}$$

离开$t_0$距离为2的树集合由下式给出：

$$T(bd)=\{d\}\times\frac{\partial T(b)}{\partial P_d}=\{d\}\times\frac{\partial\{abc,abe\}}{\partial ac}$$

$$=\{d\}\times\{bc,be,ab\}=\{bcd,bde,abd\}$$

$$T(bf)=\{f\}\times\frac{\partial T(b)}{\partial P_f}=\{f\}\times\frac{\partial\{abc,abe\}}{\partial ac}$$

$$=\{f\}\times\{bc,be,ab\}=\{bcf,bef,abf\}$$

$$T(df)=\{d\}\times\frac{\partial T(f)}{\partial P_d}=\{d\}\times\frac{\partial\{aef,cef\}}{\partial ae}$$

$$=\{d\}\times\{ef,af,cf\}=\{def,adf,cdf\}$$

离开$t_0$距离为3的树集合由下式给出：

$$T(bdf)=\{f\}\times\frac{\partial T(bd)}{\partial P_f}=\{f\}\times\frac{\partial\{bcd,bde,abd\}}{\partial ac}=\{f\}\times H_0=H_0$$

因此，$G$的树$T$的集合由下式给出：

$$\begin{aligned}T&=\{t_0\}\cup T(b)\cup T(d)\cup T(f)\\&\quad\cup T(bd)\cup T(bf)\cup T(df)\cup T(bdf)\\&=\{abc,abe,acd,cde,aef,cef,abd,bcd,bed,\\&\qquad abf,bcf,bef,adf,def,cdf,ace\}\end{aligned}$$

**6. 利用初等补树变换产生树**

现在我们已经作好研究利用初等补树变换来产生补树的准备。推导是与第5节相平行的。

令$\bar{t}$是$G$的一个补树，$e_1$是在$G$中而不在$\bar{t}$中的一条边，那么如果$\bar{t}'$是$G$的一个补树，下列运算

$$e_1\cup\bar{t}-e_2=\bar{t}'$$

称为一个初等补树变换，式中$e_2$是$\bar{t}$的一条边。

令$\bar{t}_0$是一个基准补树，$t_0=e_1e_2\cdots e_r$是相应于$G$的基准树，使得$G=e_1e_2\cdots e_r\cup\bar{t}_0$，此处$r$再次表示$G$的秩，为方便起见，符号$\bar{t}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$表示$G$的补树，使得 $t_0\cap\bar{t}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$。类似地，$\bar{T}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$是$G$中形如$\bar{t}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$的补树集合。显然，$\bar{t}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$是在$G$中离开基准补树$\bar{t}_0$距离为$q$的一个补树。

**定理10**

$$\bar{T}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}\}\times\frac{\partial^q\{\bar{t}_0\}}{\partial Q^*_{i_1}\partial Q^*_{i_2}\cdots\partial Q^*_{i_q}}$$

$q=1, 2, \cdots, r$，此处$Q_{fi_x}=e_{i_x}\cup Q^*_{i_x}$，$x=1, 2\cdots, r$是相对于$G$中$t_0$的$r$个基本割集。$Q^*_{i_x}$是$Q_{fi_x}$中的树支$e_{i_x}$的补图。$\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个非空子集，注意$\partial\{\bar{t}_0\}/\partial\varnothing=H_0$。

证明：因为$\bar{T}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$中的元素和$G_r$的补树存在着一一对应的关系，式中$G_r$是首先把包含在$(t_0-e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$中的所有边短接，然后移去包含在基准树$t_0$中的所有边而得到的图。不难看出，如果$Q^*_{i_x}$是线性相关的，则存在集合$\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$的一个非空子集$\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$，使得

$$Q^*_{j_1}=Q^*_{j_2}\oplus Q^*_{j_3}\oplus\cdots\oplus Q^*_{j_k}$$

从(1) 式和引理(2) 得到：

$$\frac{\partial_q\{\bar{t}_0\}}{\partial Q^*_{i_1}\partial Q^*_{i_2}\cdots\partial Q^*_{i_q}}=H_0$$

$$\begin{aligned}&Q_{fj_1}\oplus Q_{fj_2}\oplus\cdots\oplus Q_{fj_k}\\&\qquad=e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k}\oplus Q^*_{j_1}\oplus Q^*_{j_2}\oplus\cdots\oplus Q^*_{j_k}\\&\qquad=e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k}\end{aligned}$$

因为$e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k}$是一个割集，或是若干个边不相重割集之并，它不能出现在$G$的任何补树中。因此，$\bar{T}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=H_0$，该定理容易地得到满足。

下面，我们假设$Q^*_{i_x}$是线性独立的。因为$G_r$的秩是$q$，从定理7得到$G_r$的补树集合$\bar{T}_r$，并由下式给出：

$$\bar{T}_r=\frac{\partial^q\{G_r\}}{\partial Q^*_{i_1}\partial Q^*_{i_2}\cdots\partial Q^*_{i_q}}$$

因为$\{G_r\}=\{\bar t_0\}$，且每一个$\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$中$\bar t$是$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$与$T_r$中的某个$\bar t_r$作边不相接之并，反之亦然。将这些情况代入后即得出本定理。定理证毕。

**推论7.**

$$\bar T=\bigcup_{q=0}^{r}\bigcup_{\{i_1 i_2\cdots i_q\}}\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})^*$$

此处$\cup\cup\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{\bar t_0\}$，在$q=0$时，第二个并运算是对$\{1，2，\cdots，r\}$中所有可能的非空子集$\{i_1，i_2，\cdots，i_q\}$而求取的。

**定理11**

$$\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})=\{e_{i_q}\}\times\frac{\partial\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})}{\partial Q^*_{i_q}}$$

在$q=1，2，\cdots，r$时，$\{i_1 i_2\cdots i_q\}$是集合$\{1，2，\cdots，r\}$的非空子集，$\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{q-1}})=\{\bar t_0\}$，

**例4**

再次研究图1(a)中所示的图。$\bar t_0=bdf$及$t_0=ace$，因此$Q_a^*=df$，$Q_c^*=bf$，及$Q_e^*=bd$。离开$\bar t_0$距离为1的补树集合由下式给出：

$$\bar T(a)=\{a\}\times\frac{\partial\{\bar t_0\}}{\partial Q_a^*}=\{a\}\times\frac{\partial\{bdf\}}{\partial df}=\{a\}\times\{bf，bd\}=\{abf,abd\},$$

$$\bar T(c)=\{c\}\times\frac{\partial\{\bar t_0\}}{\partial Q_c^*}=\{c\}\times\frac{\partial\{bdf\}}{\partial bf}=\{c\}\times\{df，bd\}=\{cdf,bcd\},$$

$$\bar T(e)=\{e\}\times\frac{\partial\{\bar t_0\}}{\partial Q_e^*}=\{e\}\times\frac{\partial\{bdf\}}{\partial bd}=\{e\}\times\{df，bf\}=\{def,bef\}$$

离开$\bar t_0$距离为2的补树集合由下式给出：

$$\bar T(ac)=\{c\}\times\frac{\partial\bar T(a)}{\partial Q_c^*}=\{c\}\times\frac{\partial\{abd,abf\}}{\partial bf}=\{c\}\times\{ad，af，ab\}$$

$$=\{acd，acf，abc\},$$

$$\bar T(ae)=\{e\}\times\frac{\partial\bar T(a)}{\partial Q_e^*}=\{e\}\times\frac{\partial\{abd,abf\}}{\partial bd}=\{e\}\times\{ad，af，ab\}$$

$$=\{ade，aef，abe\},$$

$$\bar T(ce)=\{c\}\times\frac{\partial\bar T(e)}{\partial Q_c^*}=\{c\}\times\frac{\partial\{bef,def\}}{\partial bf}=\{c\}\times\{ef，be，de\}$$

$$=\{cef，bce，cde\}$$

离开$\bar t_0$距离为3的补树集合为：

$$\bar T(ace)=\{e\}\times\frac{\partial\bar T(ac)}{\partial Q_e^*}=\{e\}\times\frac{\partial\{acd,acf,abc\}}{\partial bd}=\{e\}\times H_0=H_0$$

因此，G的补树集合由下式给出：

$$\bar T=\{\bar t_0\}\cup\bar T(a)\cup\bar T(c)\cup\bar T(e)\cup\bar T(ac)\cup\bar T(ae)\cup\bar T(ce)\cup\bar T(ace)$$
$$=\{bdf,abd,abf,bcd,cdf,bef,def,acd,acf,abc,ade,aef,abe,cde,bce,cef\}$$

再次地注意，$\bar T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q})$的宗量的次序是无关紧要的。且如果$Q^*_{i_1}\oplus Q^*_{i_2}\oplus\cdots\oplus Q^*_{i_q}=$

---

* 原文印刷有误，译者已作更正。

$\Phi$，那么 $T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_4})=H_0$。

## 结　　论

本文给出了树、$k$-树、回路、补树、补$k$-树和割集之间的代数关系。它们就其本身来说是重要的，某些公式可用来产生一个图的树、$k$-树、补树和补$k$-树。另外一些公式仅有理论意义。

公式是紧凑的、运算是简单的。一旦从原始拓扑图得到了独立割集和独立回路，在计算过程的任何一步就无需返回到原始图。这在数字计算机中是一个极重要的因素。但是一般说来这些方法尚未消除重复项，仅仅可以通过适当地选取独立割集和独立回路的方法使重复项最少，即使得这些子图间的交集为最小。看来，推论 4 即通过分解的方法可十分有效地产生一个图的树及补树。在这一方面的研究已经取得了很大的进展。有关这一课题的详细论述可参阅Chen[13]。

最后，可以相信这里所介绍的方法和公式可以推广到有向图的情况，即一个网络含有有源元件和变压器的情况。

## 参　考　文　献


[1] S. L. Hakimi and D. G. Green, "Generation and realization of trees and *k-trees*," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-11, pp. 247-255, June 1964.

[2] S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961.

[3] W. Mayeda, "Reducing computation time in the analysis of networks by digital computer," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-6, pp. 136-137, March 1959.

[4] W. Mayeda and S. Seshu, "Generation of trees without duplications," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-12, pp. 181-185, June 1965.

[5] H. Watanabe, "A computational method for network topology," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-7, pp. 296-302, September 1960.

[6] S. L. Hakimi, "On trees of a graph and their generation," *J. Franklin Inst.*, vol. 272, pp. 347-359, November 1961.

[7] T. Fujisawa, "On a problem of network topology," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-6, pp. 261-266, September 1959.

[8] W. K. Chen, "On the generation of non-singular submatrices and their corresponding subgraphs," *Proc. 1966 4th Allerton Conf. on Circuit and System Theory* (University of Illinois, Urbana), pp. 207-217.

[9] ——, "On directed trees and directed $k$-trees of a digraph and their generation," *J. SIAM on Appl Math.*, vol. 14, pp. 550-560, May 1966.

[10] S. K. Mark and W. K. Chen, "On the generation of trees, cotrees, $k$-trees, and $k$-cotrees," *Proc. 1967 1st Asilomar Conf. on Circuits and Systems* (Santa Clara University), pp. 659-668.

[11] W. K. Chen, "Unified theory on topological analysis of linear systems," *Proc. IEE* (London), vol. 114, pp. 1630-1636, November 1967.

[12] W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen, and N. Deo, "Generation of complete trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-15, pp. 101-105, June 1968.

[13] W. K. Chen, "Generation of trees and cotrees of a graph by decompositions," Dept. of Elec. Engrg., Ohio University, Athens, Tech. Rept. EER 10-16, March 1968.

[14] M. T. Jong, H. C. Lau, and G. W. Zobrist, "Tree generation," *Electron. Letters*, vol. 2, pp. 318-319, August 1966.

# 二、在多端网络的级联中树与补树的计算机生成


## 摘　　要

本文给出了任意无耦合的多端网络级联中树和补树的生成公式，在这些公式中，将树与补树集合表示为各连通片子图的笛卡儿乘积的环和或取并。如果各连通片网络的子图是给定的，则这种方法不会产生任何重复项，冗余项或相消项。文中还给出了说明性的例子。


**1.引言**

线性系统的拓扑分析最终归结为生成相应图中的树与补树的问题。在文献[1]～[12]中已发表了许多生成树与补树的方法。对于大系统来说，拓扑方法似乎是最好的方法[14]，但从实用观点来看，现有的方法并非完全令人满意。

对于一个非常复杂的图，为了减少利用数字计算机的计算困难，可以把原图分解为几个连通片，在每一个连通片中确定适当的子图，然后把这些子图组合起来得到所需的结果。在这一方面已经取得了相当大的进展[15]。本文的目的是给出任意无耦合的多端网络级联中树及补树集合的新生成公式，这些公式建立了树及补树集合和连通片子图之间的联系。如果网络的连通片子图是给定的，那么这种方法不会产生任何重复项，冗余项或相消项。

**2.预备知识与定义**

在本文中，我们仅研究无向的、带标记的线图$G$，其各条边用符号$e_1$，$e_2$，…，或用字母表示，节点用符号$v_1$，$v_2$，…表示。为方便起见，$G$的每一个子图$g$用其元素的“乘积”形式表示，例如$G$的一个树可以表示为$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$，此处$r$是$G$的秩。

一个$G$的生成子图$g$是$G$的一个子图，它包含了$G$的所有节点。$G$的树$t$是连通图和不包含回路的生成子图。如果$G$的生成子图具有$k$个连通片且不包含回路，则将这个子图称为$G$的$k$-树。某些连通片可能只是一个孤立节点。通常，在$k$-树中某些被标识的节点需出现在不同的连通片中。为简单起见，用符号$t(v_{i_1}v_{i_2},\ v_{i_3}v_{i_4}v_{i_5},\ v_{i_6}v_{i_7})$或简写为$t(I)$，此处$I=\{i_1i_2,\ i_3i_4i_5,\ i_6i_7\}$，它表示$G$的一个3-树，其中$v_{i_1}$和$v_{i_2}$在一个连通片中，$v_{i_3}$、$v_{i_4}$与$v_{i_5}$在第2个连通片中，以及$v_{i_6}$与$v_{i_7}$在第3个连通片中。特别地如果$I$仅由一个元素所组成，则我们定义$t(I)=t$，即是$G$的一个树。推广到一般情况是自然的，无需作进一步的阐明。例如，如果$I$具有$k$个元素，那么$t(I)$表示$G$的一个$k$-树。我们还用符号$T(I)$来表示$G$中形如$t(I)$的所有可能的$k$-树的集合。我们令$T(H_0)=H_0$为空集，并且如果$I$仅由一个元素所组成，则$T(I)=T$，即是$G$的树之集合。

对于一个给定的集合$A$，$\alpha(A)$表示$A$中元素数目。用$I\subseteq A$表示$I$是集合$A$的一个子集。除非另有规定，$S_k$表示整数1，2，…$k$的集合。

分别用符号$\cup$、$\cap$、$\oplus$及$-$表示集合论的四种二元运算“并”、“交”、“环和”及“差”。它们用来表示两类稍为不同的对象。例如$g_1$和$g_2$是$G$的两个子图，那么$g_1\cup g_2$表示了一个子

图，它由所有在$g_1$中或在$g_2$中或在两者之中的元素所组成。另一方面，如果$H_1$和$H_2$是两个集合，那么$H_1 \cup H_2$表示两个集合的并。这对于交、环和与差也同样成立。为方便起见，用符号$\varnothing$表示零图，即$G$的边数为零，用$H_0 = \{\quad\}$表示空集。

下面，将$G$的子图的任意两个集合$H_1$和$H_2$的"笛卡儿积"运算$H_1 \times H_2$定义为：

$$H_1 \times H_2 = \{g_i \cup g_j; g_i\text{在}H_1\text{中以及}g_j\text{在}H_2\}\text{中}\}$$

以及$H_1 \times H_0 = H_0 \times H_1 = H_0$，即将$H_1$的子图与$H_2$的子图作所有可能的组合、再取并从而得到的子图集合。

为了节省篇幅，一个子图或子图集合对于一个子图的偏导数的定义在这里不重新给出；这可参阅Hakimi与Green的原始论文[1]。

在本文中，术语"图"指带标记的无向图。它对应一个无耦合的$n$端口网络的级联。其它一些没有特别说明的术语的定义可在Seshu和Reed的著作中查到[16]。

**3.集合的基本互补划分**

在本节中我们先定义一个集合的"基本互补划分"，然后提出一个简单而有效的算法，用以检验一对划分是否为基本互补划分。最后，我们将指出如何用来无重复地生成一个图的树。无重复地生成树的问题对数字计算机计算来说是极为重要的，因为我们无需在计算机的存贮器中保留所有树的集合。因为实际网络中树的数目可达到上百万个[14]，所以校验工作是一个极费时间的过程。

一个集合$S_k$的划分，用$P(S_k)$来表示，是$S_k$的非空子集$I_x(x=1,2,\cdots,m)$的集合，使得$S_k = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$以及$I_u \cap I_v = H_0$，$1 \leq u < v \leq m$。如果对于所有的$x = 1,2,\cdots,m$，$\alpha(I \cap I_x) = 1$，则$S_k$的$m$个相异的元素的集合$I$称为$P(S_k)$的相异代表集。显然，对于一个给定的划分，可能有两个以上的相异代表集。

**定义1**

$S_k$的一对划分$P'(S_k)$与$P''(S_k)$，记作$C_j[P'(S_k),\ P''(S_k)]$，若在$S_k$中存在一个子集$I$，使得$I$和$\overline{I-\{j\}}$分别是$P'(S_k)$与$P''(S_k)$的相异代表集，则称其为相对于$j$的互补划分。此处$\overline{I-\{j\}}$表示在$S_k$中$I-\{j\}$的补，假设$j$在$I$中。

显然，$\alpha(P'(S_k)) + \alpha(P''(S_k)) = k+1$，即如果$P'(S_k)$具有$m$个元素，那么$P''(S_k)$必定有$k-m+1$个元素。注意，若$i \neq j$，一般说来$C_j[P'(S_k), P''(S_k)]$不等于$C_i[P'(S_k), P''(S_k)]$。因此要使一对互补划分含有确切意义，那么下标必须加以规定。

**定义2**

$C_j[P'(S_k),\ P''(S_k)]$是一个互补划分，如果不存在一个$C_j[P'(I),\ P''(I)]$，其中$I$是$S_k$的一个非空真子集，$P'(I) \subseteq P'(S_k)$以及$P''(I) \subseteq P''(S_k)$，则称$C_j[P'(S_k),\ P''(S_k)]$为基本互补划分。

**引理1**

在$C_j[P'(S_k),\ P''(S_k)]$中存在一个在$P'(S_k)$中或者在$P''(S_k)$中的元素$I$，使$\alpha(I) = 1$。

证明：假设引理1不成立。那么有$k \geq 2m$以及$k \geq 2(k-m+1)$，此处$m = \alpha(P'(S_k))$。由此得到了一个矛盾的式子：$k \geq k+1$，引理1证毕。

下面，我们将要定义两类算子$D'$和$D''$。这些算子的主要用途不仅仅是为了证明我们的主要结果，而且我们使用它们是为了在下面所讨论的算法中作为一种工具——它检验一对互补划分是否为基本互补划分。

在$C_j[P'(S_k),\ P''(S_k)]$中，令$I$与$\overline{I-\{j\}}$分别是$P'(S_k)$与$P''(S_k)$的相异代表集。如果$R'$

与$R''$分别是$P'(S_k)$ 与$P''(S_k)$ 的子集，则算子$D'$与$D''$定义为：

$D'(R')=\{p''$；$p''$ 在 $P''(S_k)$ 中，并且在$R'$中存在一个$r'$，使得$p''$与$r'-(r'\cap I)$ 之交是非空集$\}$，

$D''(R'')=\{p'$；$p'$在 $P'(S_k)$ 中，并且在$R''$中存在一个$r''$，使得$p'$与 $r''-[r''\cap\overline{(I-\{j\})}]$ 之交是非空子集$\}$。

有时，上述类型的算子可以多次重复计算。例如，令$D_3(R')=D'(D''(D'(R')))$，$D_4(R')=D''(D'(D''(D'(R'))))$， $D_3(R'')=D''(D'(D''(R'')))$， 以及 $D_4(R'')=D'(D''(D'(D''(R''))))$。推广到一般情况是自然的，无需作进一步的阐明。利用这些定义，我们介绍以下引理。

**引理2**

在$C_j[P'(S_k),P''(S_k)]$中，如果$p'\cap p''=\{j\}$，则对于所有可能的$u$与$v$来说（其中$u$与$v$是整数），$D_u(p')\cap D_v(p'')=H_0$，式中$p'$与$p''$分别是$P'(S_k)$ 与$P''(S_k)$ 中的元素。

在引理2中，如果令$u_m$和$v_m$分别为$u$与$v$在$D_u(p')$ 与$D_v(p'')$ 所获得的最大整数，使

$D_{u_m}(p')\neq H_0$

$D_{v_m}(p'')\neq H_0$

那么下列引理是显然的。

**引理3**

如果$d$是$D_{u_m}(p')$ 或$D_{v_m}(p'')$ 的一个元素，则$\alpha(d)=1$。

**定理1**

令$B'$是集合$p'$,$D_{2x}(p')$，以及$D_{2y-1}(p'')$ 的并，$x=1,2,\cdots,w\leq\frac{1}{2}u_m$，以及$y=1,2,\cdots,z\leq\frac{1}{2}(v_m+1)$，$B''$是集合$p''$,$D_{2x-1}(p')$，以及$D_{2y}(p'')$ 的并，$x=1,2,\cdots,w\leq\frac{1}{2}(u_m+1)$，$y=1,2,\cdots,z\leq\frac{1}{2}v_m$。当且仅当 $B'=P'(S_k)$ 或 $B''=P''(S_k)$，此处$p'$、$p''$与引理2的定义相同，则$C_j[P'(S_k),P''(S_k)]$是基本互补划分。

证明：如果$B'\neq P'(S_k)$，那么$B'$必定是$P'(S_k)$ 的一个真子集，亦即 $P'(S_k)-B'\neq H_0$。那么$C_j[B',D'(B')\cup p'']$是$S_k$的非空真子集的一对互补划分。这与假设 $C_j[P'(S_k),P''(S_k)]$是基本互补划分相矛盾。反之，如果$B'=P'(S_k)$ 与 $C_j[P'(S_k),P''(S_k)]$不是基本互补划分，则存在$C_j[P'(I),P''(I)]$，此处$I$是$S_k$的一个非空真子集，$j$在$I$中，不难看出，$B'\subseteq P'(I)$。于是$B'\neq P'(S_k)$，又出现了矛盾。类似地我们可以证明其它情况。定理证毕。

上述定理实际上是检验一对互补划分是否为基本互补划分的简单与有效的算法。该定理的直接结果如下，它是由一位审阅者所指出的。

**推论1**

如果$C_j[P'(S_k)$，$P''(S_k)]$是基本互补划分，那么对于$S_k$中所有的$i$与$j$来说，$C_i[P'(S_k),P''(S_k)]=C_j[P'(S_k),P''(S_k)]$。

换句话说，一对基本互补划分$C_j[P'(S_k)$，$P''(S_k)]$是与参考点的选取（即与下标$j$）无关。为简单起见，它将用符号$C[P'(S_k)$，$P''(S_k)]$来表示。为了避免采用多重大括号，用分号来区分各子集，而一个子集的各元素之间用逗号隔开。例如，作为一个例子，令划分对$P'(S_{12})=\{1;2,8;3,6,7;4,5;9,10,11,12\}$以及$P''(S_{12})=\{5;6;7;8;9;4,10;3,11;1,2,12\}$。

相对于元素12互补，因为存在一个$S_{12}$的子集$I=\{1,2,3,4,12\}$使得$I$与$\overline{I-\{12\}}$分别是$P'(S_{12})$与$P''(S_{12})$的相异代表集。利用早先定义过的算子$D'$与$D''$，我们得到下列集合：

$$D'(\{\{9,10,11,12\}\})=\{9;4,10;3,11\}$$

$$D''(D'(\{\{9,10,11,12\}\}))=D''(\{9;4,10;3,11\})=\{3,6,7;4,5\}$$

$$D'(D''(D'(\{\{9,10,11,12\}\})))=D'(\{3,6,7;4,5\})=\{5;6;7\}$$

$$D''(\{\{1,2,12\}\})=\{1;2,8\}$$

$$D'(D''(\{\{1,2,12\}\}))=D'(\{1;2,8\})=\{\{8\}\}$$

因为$B'=D_2(\{\{9,10,11,12\}\})\cup D_1(\{\{1,2,12\}\})\cup\{\{9,10,11,12\}\}=\{3,6,7;4,5\}\cup\{1;2,8\}\cup\{\{9,10,11,12\}\}=P'(S_{12})$，根据定理1，$C_{12}[P'(S_{12}),\ P''(S_{12})]$是基本互补划分，不难校验对$S_{12}$中的任何元素，这对划分仍然是基本互补划分。于是，我们有下列推论。

**推论2**

当且仅当$B'=P'(S_k)$或$B''=P''(S_k)$时，$C[P'(S_k),\ P''(S_k)]$是基本互补划分，式中$p'$与$p''$分别是$P'(S_k)$与$P''(S_k)$的元素，且$p'\cap p''\neq H_0$，所有其它的符号与前面相同[1]。

作为另一个示例，考察划分$P'(S_{10})=\{1,2,3;4,5;6,7,8;9,10\}$，$P''(S_{10})=\{1;2;3,4,6;5,7;8;9;10\}$，对于元素10来说，该划分是互补的，因为在$S_{10}$中存在一个集合$I=\{3,5,6,10\}$，使得$I$与$\overline{I-\{10\}}$分别是$P'(S_{10})$与$P''(S_{10})$的相异代表集。现在令$p'=\{9,10\}$，$p''=\{10\}$，我们有$D'(p')=\{\{9\}\}$，$D''(D'(p'))=H_0$，以及$D''(p'')=H_0$；由此得到$B'=\{p'\}\neq P'(S_{10})$。因此，划分$C_{10}[P'(S_{10}),\ P''(S_{10})]$对于$S_{10}$中的任何元素都不是基本互补划分。

**推论3**

当且仅当$C[P_2'(S_k),\ P_2''(S_k)]$是基本互补划分时，则$C[P_1'(S_k),\ P_1''(S_k)]$是基本互补划分，式中$P_2'(S_k)=P_1''(S_k)$以及$P_2''(S_k)=P_1'(S_k)$。

现在我们将应用这些结果来无重复地生成树。设$G$是将$G'$中的节点$v_1',v_2',\cdots,v_k'$和图$G''$中节点$v_1'',v_2'',\cdots,v_k''$分别重迭而成的图，合成节点用$v_1,v_2,\cdots,v_k$表示。同样，令符号$T'(S_k)$与$T''(S_k)$分别表示$G'$与$G''$中形如$t(S_k)$的多树集合，式中$S_k$中的整数或者表示$G'$中的节点$v_1',v_2',\cdots,v_k'$，或者表示$G''$中的节点$v_1'',v_2'',\cdots,v_k''$。

**定理2**

$$T=\bigcup T'(P'(S_k))\times T''(P''(S_k))$$

式中$P'(S_k)$与$P''(S_k)$是$S_k$的基本互补划分，取并运算是对所有这种基本互补划分而进行的。

本定理的证明概要在附录中给出。定理2还在[15]中给出而未加证明。

根据审稿人的建议，这一方法可表示为另一种形式，如果在G中有一个树$t(P'(S_k))\cup t(P''(S_k))$，则我们可定义$C[P'(S_k),\ P''(S_k)]$是一对基本互补划分。利用这一定义，可以不通过引理1—3和定理1来证明定理2。但是这种方法的主要缺点在于基本互补划分将与给定图$G$的拓扑结构有关。这便是一种严重的限制，因为此时基本互补划分不能以表格的形式列出。而我们的方法则完全是普遍的，它与给定图的拓朴结构无关。因此，利用定理1，若$k$不大时，我们可列出$S_k$的所有的基本互补划分。实际上，我们无需全部列出它们；列出一半已足够。这可以从推论3而直接得出。

我们将用下列例子来说明定理2。

例1

---

1 我们假设在$p'\cap p''$中的一个元素作为参考点，即下标。

研究如图1(a)所示的图$G$。通过节点$v_1$，$v_2$，$v_3$可将其分为两个子图$G'$与$G''$。这种分解如图1(b)所示。所需的$k$-树可求得如下：

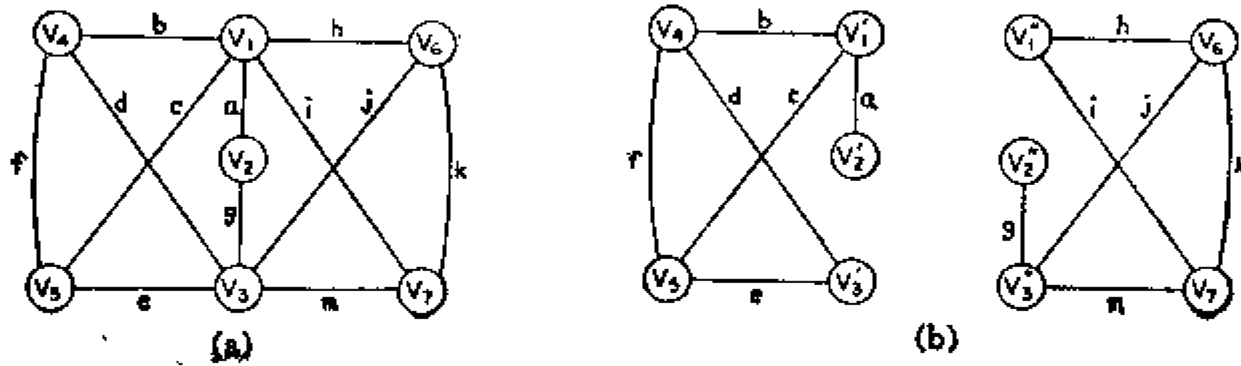



图1 (a) 给定的图G (b) 分解为$G'$与$G''$

$$T'(\{1;\ 2;\ 3\})=\{bc,\ bf,\ be,\ cd,\ cf,\ de,\ df,\ ef\}$$
$$T''(\{1;\ 2;\ 3\})=\{hi,\ hk,\ hm,\ ij,\ ik,\ jk,\ jm,\ km\}$$
$$T'(\{1;\ 2,\ 3\})=H_0$$
$$T''(\{1;\ 2,\ 3\})=\{g\}\times T''(\{1;\ 2;\ 3\})$$
$$T'(\{1,\ 2;\ 3\})=\{a\}\times T'(\{1;\ 2;\ 3\})$$
$$T''(\{1,\ 2;\ 3\})=H_0$$
$$T'(\{1,\ 3;\ 2\})=\{bce,\ bcd,\ cde,\ cdf,\ bef,\ bde,\ bdf,\ cef\}\triangleq H_2$$
$$T''(\{1,\ 3;\ 2\})=\{him,\ hij,\ hjm,\ ijm,\ hkm,\ hjk,\ ikm,\ ijk\}\triangleq H_1$$
$$T'(\{\{1,\ 2,\ 3\}\})=\{a\}\times H_2\triangleq T'$$
$$T''(\{\{1,\ 2,\ 3\}\})=\{g\}\times H_1\triangleq T''$$

利用定理2，$G$的树集合$T$由下式给出：

$$\begin{aligned}T=&[T'(\{1;\ 2;\ 3\})\times\{g\}\times H_1]\cup H_0\cup H_0\\&\cup[\{a\}\times T'(\{1;\ 2;\ 3\})\times H_1]\\&\cup[\{a\}\times H_2\times T''(\{1;\ 2;\ 3\})]\\&\cup[H_2\times\{g\}\times T''(\{1;\ 2;\ 3\})]\\&\cup[\{a\}\times T'(\{1;\ 2;\ 3\})\times\{g\}\times T''(\{1;\ 2;\ 3\})]\cup H_0\\=&\{bc,\ bf,\ be,\ cd,\ cf,\ de,\ df,\ ef\}\\&\times\{ghim,\ ghij,\ ghjm,\ gijm,\ ghkm,\ ghjk,\ gikm,\\&gijk,\ ahim,\ ahij,\ ahjm,\ aijm,\ ahkm,\ ahjk,\\&aikm,\ aijk,\ aghi,\ aghk,\ aghm,\ agij,\ agik,\ agjk,\\&agjm,\ agkm\}\cup\{hi,\ hk,\ hm,\ ij,\ ik,\ jk,\ jm,\ km\}\\&\times\{bce,\ bcd,\ cde,\ cdf,\ bef,\ bde,\ bdf,\ cef\}\times\{a,\ g\}\end{aligned}$$

在笛卡儿乘积中有320项，每一项对应着$G$的一个树。对网络理论来说，这是一个所希望的形式，此时无需对笛卡儿乘积进行展开。

**4.多端网络级联中树的生成公式**

现在我们回到本文的主要论题，同时给出任意多端网络级联中生成树的通用公式。

令$G$是一个无耦合的多端网络的级联图，它们是任意连接的。假设$G$由$n$个子图$G_1$,$G_2$,…，$G_n$所组成，它们的节点按图2的方式依次相连。对于任意$s_j\subseteq S_{k_j}$，令$V_j$表示$G_j$的节点集合的子集，使得当且仅当$x$在$s_j$中时，$v_x^j$在$V_j$中，此处$S_{k_j}=\{1,\ 2,\cdots,\ k_j\}$，$j=1,2,\cdots,n-1$。还令$T_j(s_{j-1}\cup s_j)$是$G_j$中$t(V_{j-1}\cup V_j)$的$k$-树集合。为方便起见，我们假设$S_{k_x}$的元素

已经适当地标记，使得如果$u\neq v$，我们能区分$S_{k_u}$与$S_{k_v}$。换句话说，我们假定在所有集合中的所有元素各不相同，即使它们由相同的整数集合来表示。我们便能避免使用多重下标的假设，但这将使事情变为复杂些而不会引出新概念。因此，我们满足目前的假设。

令

$S=\{S_{k_x};\ x=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$；

$S^*=\{I_{k_x};\ x=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，与$I_{k_x}\subseteq S_{k_x}$，整数$k_{n-1}$总是包含在$I_{k_{n-1}}$内$\}$；

$\bar{S}^*=\{\bar{I}_{k_x};\ x=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，与$\bar{I}_{k_y}$是在$S_{k_y}$中为集合$I_{k_y}$的补，$y=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$，$\bar{I}_{k_{n-1}}$是$S_{k_{n-1}}$中集合$I_{k_{n-1}}-\{k_{n-1}\}$的补$\}$。

还令$L$是上述类型且满足下列附加约束条件的所有可能的集合对$(S^*,\ \bar{S}^*)$的集合，对$L$中的每一对$(S^*,\ \bar{S}^*)$，那么

$1\leqslant\alpha(I_{k_1})$

$1\leqslant\alpha(I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}})<\alpha(S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}})$

$1\leqslant\alpha(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})<\alpha(S_{k_{2u-1}}\cup S_{k_{2u}})$

适用于在集合$S^*$与$\bar{S}^*$中所定义的全部$u$。

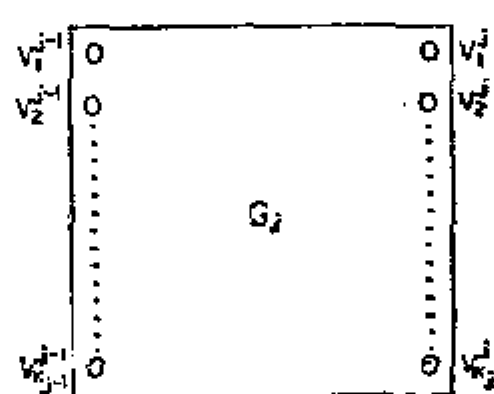


图2 一个连通片图的节点标号

利用这些定义，现在$G$的树集合$T$可很容易地从附录中的引理5而得出。

**定理3**

$$T=\sum_{(S^*,\bar{S}^*)\text{在}L\text{中}}T_1(I_{k_1})\times\prod_{u=1}^{n/2-1}[T_{2u}(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})\times T_{2u+1}(I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}})]\times T_n(\bar{I}_{k_{n-1}}),\quad n\text{为偶数。}$$

$$T=\sum_{(S^*,\bar{S}^*)\text{在}L\text{中}}T_1(I_{k_1})\times\prod_{u=1}^{(n-1)/2}[T_{2u}(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})\times T_{2u+1}(I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}})],\quad n\text{为奇数。}$$

式中$I_{k_n}=H_0$，环和是对$L$中所有可能的$(S^*,\ \bar{S}^*)$求取。符号$\prod$表示在方括号中所示集合的笛卡儿乘积。

证明：在引理5中，令$G'=\bigcup_{x=1}^{m}G_{2x-1}$与$G''=\bigcup_{x=1}^{m}G_{2x}$，此处若$n$为偶数，则$m=\frac{1}{2}n$，若$n$为奇数，则$m=\frac{1}{2}(n+1)$，以及$G_{n+1}=\phi$。对于引理5中每一个所选的$s$，相应于在$S$所定义的范围内有唯一的集合对$(S^*,\bar{S}^*)$。因为在$G'$与$G''$中的每一个$k$-树可分别表示为$G_{2x-1}$与$G_{2x}$的$k$-树的笛卡儿乘积，$x=1,2,\cdots,m$。不难看出，引理5也可用定理3给出的形式来表示，除了环和是对在$S$所定义的范围内的所有可能的集合对$(S^*,\ \bar{S}^*)$求取之外。下面，我们将证明，如果$(S^*,\ \bar{S}^*)$不在$L$中，那么它不可能构成$T$的任何项。因此要研究5种情况。即：

$I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}}=H_0$或$S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}}$；

$\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}}=H_0$或$S_{k_{2u-1}}\cup S_{2u}$；

以及

$I_{k_1}=H_0$

但是，我们只将证明头两种情况，因为其它情况可用完全相似的方法加以证明。

**情况1.**

$$I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}} = H_0$$

令$(S^*, \bar{S}^*)$是任意的具有这种性质的集合对，还令$T'(s \cup \{k_{n-1}\}) \times T''(\bar{s} \cup \{k_{n-1}\})$是相对于引理 5 中的$(S^*, \bar{S}^*)$项，由此得到在$G'$中相应于集合$s \cup \{k_{n-1}\}$的节点不包含在$G_{2u+1}$中对应于集合$I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}}$中的任何节点。因此$T'(s \cup \{k_{n-1}\}) = H_0$，同时集合对$(S^*, \bar{S}^*)$不会用任何方式构成$T$。

**情况2.**

$$I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}} = S_{k_{2u}} \cup S_{k_{2u+1}}$$

再次地令$T'(s \cup \{k_{n-1}\}) \times T''(\bar{s} \cup \{k_{n-1}\})$ 是引理 5 中的 $(S^*, \bar{S}^*)$ 相应项。由此得到，在$G_{2u+1}$中对应于集合$I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}}$的全部节点是$G'$中对应于集合$s \cup \{k_{n-1}\}$的节点集的一部分。因此，在$T'(s \cup \{k_{n-1}\}) \times T''(\bar{s} \cup \{k_{n-1}\})$ 中的每一个元素都是$G$的一个非连通图，并且不包含在$T$中。定理证毕。

实际上，各对的$L$可进一步简化，这正如下列引理中所见。

**引理4**

对于在$L$中的每一对$(S^*, \bar{S}^*)$，若在$S^*$存在任意一个元素$I_{k_x}$，使得在$x$为偶数时，$I_{k_x} = S_{k_x}$(或$\bar{I}_{k_x} = H_0$)，而在$x$为奇数时，$I_{k_x} = H_0$(或$\bar{I}_{k_x} = S_{k_x}$)，$1 < x < n-1$，那么一对$(S^*, \bar{S}^*)$不会构成定理 3 中集合$T$的任何项。

证明：我们仅证明$x$为偶数时，$I_{k_x} = S_{k_x}$的情况。其它情况可用完全类似的方法加以证明。证明引理 4 的一般方法与证明定理 2 的第二部分相同。

假设定理 3 中所需的所有类型的$k$-树均存在。否则，引理容易满足。因为 $\bar{I}_{k_x} = H_0$，由此得到$\bar{I}_{k_{x-1}} \neq H_0$。令 $i_1$是$\bar{I}_{k_{x-1}}$的一个元素，因为$i_1$在 $\bar{I}_{k_{x-1}}$ 中，所以$i_1$ 不在 $I_{k_{x-1}}$ 中。因为在$G_{k_{x-1}}$中相应于$i_1$的节点必属于$G_{k_{x-1}}$中$t(I_{k_{x-2}} \cup I_{k_{x-1}})$的一个连通片，因此，在$I_{k_{x-2}} \cup I_{k_{x-1}}$中存在一个整数$i_2$，使得相应于$i_1$与$i_2$的节点包含在 $t(I_{k_{x-2}} \cup I_{k_{x-1}})$的同一个连通片中。要考虑两种情况：$i_2$ 在 $I_{k_{x-2}}$中与 $i_2$在$I_{k_{x-1}}$中。如果$i_2$在$I_{k_{x-2}}$中，那么$i_2$就不在$\bar{I}_{k_{x-2}}$中。由此得到在$\bar{I}_{k_{x-2}} \cup \bar{I}_{k_{x-3}}$中存在一个整数$i_3$，使得与 $i_2$及$i_3$相应的节点包含在 $G_{k_{x-2}}$的$t(\bar{I}_{k_{x-3}} \cup \bar{I}_{k_{x-2}})$ 的同一个连通片中。如果 $i_2$在 $I_{k_{x-1}}$中，那么$i_2$就不在$\bar{I}_{k_{x-1}}$中。由此得到在$\bar{I}_{k_{x-1}}$中存在一个整数$i'_3$，使得与$i_2$及$i'_3$相应的节点包含在同一个连通片中*。继续这一论证，生成了形如$i_1 i_2 i_3 \cdots$或$i_1 i_2 i'_3 \cdots$的整数序列。因为$G$是有限的，在一个序列中存在整数$i_x$与$i_q (x < q)$，使得$i_x = i_q$，$q \geq 3$。注意$S_{k_{n-1}}$中的整数$k_{n-1}$不能包含在这一过程内，因为$\bar{I}_{k_x} = H_0$。于是，对应于该序列的节点形成了至少有一个回路的子图。定理证毕。

现在我们仅需研究定理 3 中用$L$的一个子类$L^*$代替$L$；即可能有$L$的$(S^*, \bar{S}^*)$对集合不满足引理 4 的条件。这样会自然地提出一个问题，即在何种条件下我们可利用定理 3 生成树而没有由于重复而产生的冗余项？要是如果我们把$G'$与$G''$的所有公共节点用毗连的次序来编排，那么问题将得到解决——$G'$与$G''$共同节点的整数集合所对应的划分必须是相对于该集的一个整数而构成基本互补划分。但是，因为$G$的一个特殊的性质，我们可求得一个简单得多的等价条件。关于这一点我们将在下面作进一步的讨论。

对于在$T_{2u+1}(I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}})$中的每一个元素$t(I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}})$，存在一个集合$S_{k_{2u}} \cup S_{k_{2u+1}}$的一对划分$P'(S_{k_{2u}} \cup S_{k_{2u+1}})$，使得$I_{k_{2u}} \cup I_{k_{2u+1}}$是$P'(S_{k_{2u}} \cup S_{k_{2u+1}})$的相异代表集。类似地我们可令

---

* 在分析中，我们假设在$x \leqslant 0$时$I_{k_x} = H_0$。故在$x = 2$时，仅有可能出现一种情况。

$P'(S_{k_1})$，$P''(S_{k_{2u-1}}\cup S_{k_{2u}})$与$P''(S_{k_{n-1}})$分别是$T_1(I_{k_1})$，$T_{2u}(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})$ 以及$T_n(\bar{I}_{k_{n-1}})$中的元素$t(I_{k_1})$，$t(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})$， 以及 $t(\bar{I}_{k_{n-1}})$ 的划分。因此下列推论就是定理 3 的另一种形式。

**推论4**

$$T=\sum T_1(P'(S_{k_1}))\times\Big[\prod_{u=1}^{\frac{n}{2}-1}T_{2u}(P''(S_{k_{2u-1}}\cup S_{k_{2u}}))$$
$$\times T_{2u+1}(P'(S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}}))\Big]$$
$$\times T_n(P''(S_{n-1}))，\quad n\text{为偶数；}$$

以及

$$T=\sum T_1(P'(S_{k_1}))\times\Big[\prod_{u=1}^{(n-1)/2}T_{2u}(P''(S_{k_{2u-1}}\cup S_{k_{2u}}))$$
$$\times T_{2u+1}(P'(S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}}))\Big]，\quad n\text{为奇数。}$$

此处$S_{k_0}=H_0$，环和是对所有的这种划分求取。

定理 2 与上面的推论的直接结果如下。

**定理4**

如果在研究中除去具有下列三条性质之一的所有划分时，则推论 4 中的环和运算可用集合的并来代替，在 $n$ 为偶数时，$m=\frac{1}{2}n$，在 $n$ 为奇数时，$m=\frac{1}{2}(n-1)$。

1）对于$1\leqq u<m$，在$P'(S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}})$中存在一个$p'$，使得$p'=S_{k_{2u}}$或$S_{k_{2u+1}}$。

2）对于$1\leqq v\leqq m$，在$P''(S_{k_{2v-1}}\cup S_{k_{2v}})$ 中存在一个$p''$，使得$p''=S_{k_{2v-1}}$或$S_{k_{2v}}$；（在 $n$ 为偶数时，$v<m$）。

3）对于某些$u$和$v$，在$P'(S_{k_{2u}}\cup S_{k_{2u+1}})$中存在一个$p'$、在$P''(S_{k_{2v-1}}\cup S_{k_{2v}})$中存在一个$p''$，使得$p'\cap p''=H_0$以及$p'\cup p''=S_{k_{2u}}$或$S_{k_{2u+1}}$，此处$0\leqslant u$，$v\leqslant m$，以及在$x\leqq 0$或$x\geqq n$时，$S_{k_x}=H_0$。

显然，如果存在整数$u$和$v$，它们至多差 1 。换句话说，如果假设推论 4 中所有类型的$k$-树是存在的，那么在推论 4 中存在重复项的充要条件是至少存在着具有定理 4 所给出的性质中一条的划分。因此，我们实现了在多端网络级联中生成树（没有重复而产生的多余项）的目的。要实现这一点我们所付出的代价是列出某类划分。这一要求并不是一个严重的局限性，因为这些划分可用表格列出。

下面，我们研究$G$是一个任意双口网络级联对应图的特殊情况。 我们将证明定理 3 连同引理 4 、推论 4 与定理 4 可简化为Myers的定理[3]。

对于这种情况，集合对$(S^*,\bar{S}^*)$的子类$L^*$可以分解为下列互不相交的子集：

$L^*=F_1(L^*)\cup\cdots\cup F_{n-2}(L^*)\cup F'_{n-1}(L^*)\cup F''_{n-1}(L^*)$；

$F_1(L^*)=\{(S^*,\bar{S}^*)；\alpha(I_{k_1})=2\}$；

$F_w(L^*)=\{(S^*,\bar{S}^*)；\alpha(I_{k_x})=1$适用于$x=1,2,\cdots,w-1$，若$w$为偶数，$\alpha(I_{k_w})=0$，若$w$为奇数，$\alpha(I_{k_w})=2\}$，适用于$w=2,3,\cdots,n-2$；以及

$F'_{n-1}(L^*)=\{(S^*,\bar{S}^*)；\alpha(I_{k_x})=1$，适用于$x=1,2,\cdots,n-2$与$\alpha(I_{k_{n-1}})=1\}$，

$F''_{n-1}(L^*)=\{(S^*,\bar{S}^*)；\alpha(I_{k_x})=1$，适用于$x=1,2,\cdots,n-2$和$\alpha(I_{k_{n-1}})=2\}$；

式中

$S^*=\{I_{k_x};\ x=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，以及$I_{k_x}\subseteq S_{k_x}$，以及整数$k_{x-1}$总是包含在$I_{k_{x-1}}$中$\}$。

为方便起见，令$T^{j\cdots n}$用来表示$G$的子图$G_j\cup G_{j+1}\cup\cdots\cup G_n$的树集 合。因此$T=T^{1\cdots n}$。下面，我们来研究由于上述定义子集的每一项对定理 3 中$T$的元素的贡献。因此，对于在$F_1(L^*)$中的元素$(S^*,\ \bar{S}^*)$来说，相应的元素由下式给出：

$$T_1(S_{k_1})\times\left[\sum_{(S^*,\bar{S}^*)\text{在}F_1(L^*)\text{中}}\prod_{u=1}^{m}H_u\right]=T_1(S_{k_1})\times T^{2\cdots n},$$

此处若$n$为偶数，$m=\frac{1}{2}n-1$，若$n$为奇数，$m=\frac{1}{2}(n-1)$，以及

$$H_u=T_{2u}(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})\times T_{2u+1}(I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}})\times T_n(\bar{I}_{k_{n-1}})\text{适用于}n\text{为偶数；}$$
$$=T_{2u}(\bar{I}_{k_{2u-1}}\cup\bar{I}_{k_{2u}})\times T_{2u+1}(I_{k_{2u}}\cup I_{k_{2u+1}})\text{适用于}n\text{为奇数。}$$

对于$F_w(L^*)$中的元素$(S^*,\ \bar{S}^*)$，需考虑两种情况：如果$w$是偶数，相应项由下式给出：

$$T^1\times T_w(\bar{I}_{k_{w-1}}\cup S_{k_w})\times\left[\sum_{(S^*,\bar{S}^*)\ \text{在}F_w(L^*)\text{中}}\prod_{u=1}^{w/2-1}H_u\right.$$
$$\left.\times T_{w+1}(I_{k_{w+1}})\times\left(\prod_{u=w/2+1}^{m}H_u\right)\right]$$
$$=T^1\times T_w(\bar{I}_{k_{w-1}}\cup S_{k_w})$$
$$\times\left[\sum_{(S^*,\bar{S}^*)\ \text{在}F_w(L^*)\text{中}}\prod_{u=1}^{w/2-1}H_u\right]\times T^{w+1\cdots n}$$
$$=T^1\times T_w(\bar{I}_{k_{w-1}}\cup S_{k_w})\times T^{w+1\cdots n}\times\prod_{x=2}^{w-1}T_x(S_{k_x})$$

如果 $w=2$

$$\prod_{x=2}^{w-1}T_x(S_{k_x})=\{\phi\}$$

如果我们把定理3应用到$G$的子图$G_{w+1}\cup G_{w+2}\cup\cdots\cup G_n$上，立即得到第二行的结果，第三行是定理4以及$\alpha(I_{k_x})=\alpha(\bar{I}_{k_x})=1$，$x=1,2,\cdots,w-1$的直接结果。类似地如果$w$是奇数，也得到相同的结果。对于在$F'_{n-1}(L^*)$与$F''_{n-1}(L^*)$中的元素$(S^*,\ \bar{S}^*)$，相应的项也可用完全相似的方法得到，它由下式给出：

$$T^1\times T_{n-1}(\bar{I}_{k_{n-2}}\cup S_{k_{n-2}})\times T^n\times\left[\prod_{x=2}^{n-2}T_x(S_{k_x})\right]$$

这适用于$n$为奇数的$F'_{n-1}(L^*)$的元素，当$n$为偶数的$F''_{n-1}(L^*)$的元素，则由下式给出：

$$T^1\times\prod_{x=2}^{n}T_x(S_{k_x})$$

因此，对于一个双口级联网络，定理3可简化如下：

**推论5** (*Myers*[3])

如果$G$是一个任意双口级联的相应图，那么：

$$T=\left[T^{1}\times\prod_{x=2}^{n}T_{x}(S_{k_x})\right]\bigcup\left[T^{1}\times\left(\bigcup_{w=1}^{n-1}\prod_{y=1}^{w-1}T_{y}(S_{k_y})\right.\right.$$

$$\left.\left.\times T_{w}(\bar{I}_{k_{w-1}}\cup S_{k_w})\times T^{w+1\cdots n}\right)\right]$$

$$\cup[T^{1}\times T_{2}(I_{k_1}\cup S_{k_2})\times T^{3\cdots n}]\cup[T_{1}(S_{k_1})\times T^{2\cdots n}]$$

显见，$T^1$，$T_x(S_{k_x})$，以及$T_w(\bar{I}_{k_{w-1}}\cup S_{k_w})$分别表示在$G_1$，$G_{k_x}$，$G_{k_w}$中的树、2-树及3-树。因为在$G$中形如$t(\{i,j\})$的2-树是与$G^*$中的树是一一对应的，此处$G^*$是在$G$中将节点$i$与$j$合并(短接)而得到。我们可用上述公式来生成$G$中形如$t(\{i,j\})$的2-树。

我们用下列例子来说明这些结果。

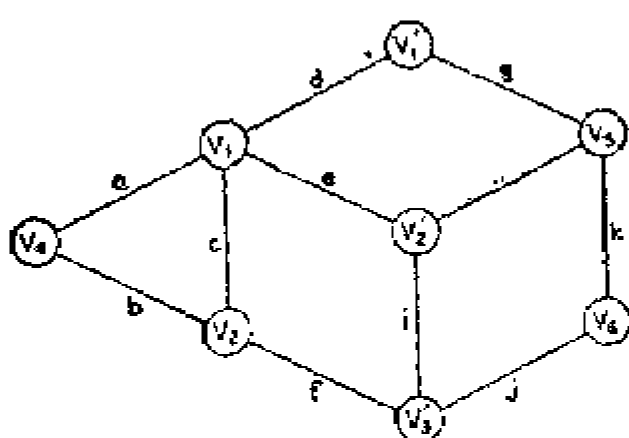



图3　例2中所研究的给定图$G$

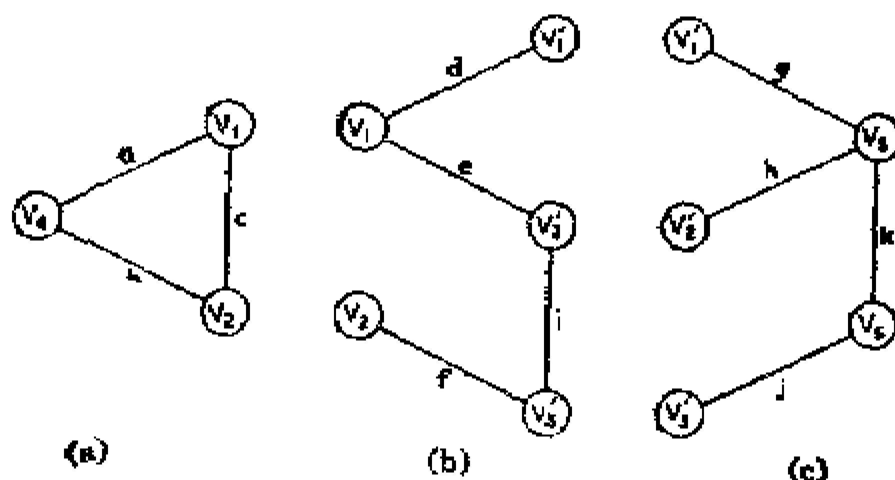



图4　图3中$G$的分解图 $G_1,G_2,G_3$
(a)$G_1$　(b)$G_2$　(c)$G_3$

例2

研究如图3所示的图$G$。可以将它分解为如图4所示的级联的三个子图$G_1$，$G_2$，$G_3$。我们将应用定理3来生成树。当然，首先算出$S_2$和$S_3$的子集，此处$S_2=\{1,2\}$，$S_3=\{1',2',3'\}$。为方便起见，下面所有括号中用来表示元素集合的大括号已省略，同时一个集合的各元素用逗号而不用前面所用的分号表示，根据定理3我们有：

$$\begin{aligned}T=&T_1(1)\times[T_2(2,1',2',3')\times T_3(3')\oplus T_2(2,1',3')\times T_3(2',3')\\&\oplus T_2(2,2',3')\times T_3(1',3')\oplus T_2(2,3')\times T_3(1',2',3')]\\&\oplus T_1(2)\times[T_2(1,1',2',3')\times T_3(3')\oplus T_2(1,1',3')\times T_3(2',3')\\&\oplus T_2(1,2',3')\times T_3(1',3')\oplus T_2(1,3')\times T_3(1',2',3')]\\&\oplus T_1(1,2)\times[T_2(1',2',3')\times T_3(3')\oplus T_2(1',3')\times T_3(2',3')\\&\oplus T_2(2',3')\times T_3(1',3')\oplus T_2(3')\times T_3(1',2',3')]\\=&\{ab,ac,bc\}\times[\{d,e\}\times\{ghjk\}\oplus\{de,di,ei\}\times\{ghk,ghj,gkj\}\oplus\{de\}\\&\times\{ghk,ghj,hjk\}\oplus\{dei\}\times\{gk,gj,hk,hj,kj\}\oplus\{f\}\times\{ghjk\}\oplus\{ef,if\}\\&\times\{ghk,ghj,gkj\}\oplus\{df\}\times\{ghk,ghj,hjk\}\oplus\{def,dif\}\times\{gk,gj,hk,hj,kj\}]\oplus\{a,b\}\\&\times[\{df,ef\}\times\{ghjk\}\oplus\{eif,dif,def\}\times\{gkk,ghj,gkj\}\oplus\{def\}\\&\times\{ghk,ghj,hjk\}\oplus\{deif\}\times\{gk,gj,hk,hj,kj\}]\\=&\{ab,ac,bc\}\times\{dghjk,eghjk,dighk,eighk,dighj,eighj,degkj,digkj,eigkj,dehjk,\\&deigk,deigj,deihk,deihj,deikj,fghjk,efghk,ifghk,efghj,ifghj,efgkj,ifgkj,\end{aligned}$$

③ 我们可将$I_{k_n}$与$\bar{I}_{k_n}$进行交换，因为$\alpha(I_{k_n})=\alpha(\bar{I}_{k_n})=1$。

$dfghk, dfghj, dfhjk, defgk, defgj, defhk, defhj, defkj, difgk, difgj, difhk, difhj,$
$difkj\} \cup \{a, b\} \times \{dfghjk, efghjk, eifghk, eifghj, eifgkj, difghk, difghj, difgkj,$
$defgkj, defhjk, deifgk, deifgj, deifhk, deifhj, deifkj\}.$

在笛卡儿乘积中有135项，其中每一项都对应了一个树。在此过程中，仅产生了8个重复项，即有4项出现了两次：$deghk, deghj, defghk, defghj$.

## 结　论

本文给出了生成任意无耦合的多端网络级联中树与补树的新公式。这些公式将树集与补树集表示为各连通片的子图之笛卡儿乘积的并集。这时拓扑方法看来是最好的[14]，从实用的观点来看这些公式对于非常大的网络进行计算机分析是十分有用的。例如Stehman等人[14]提出了一个13个节点、29条支路含有187970个树的实际网络，如果采用Mayeda与Seshu的方法[10]，在IBM系统7094数字计算机上产生所有树而所需的时间是4935秒。因此划分的优点是十分清楚的。它不但使树的数目急剧地减少了，而且在图的分解后它们只含有一些较小的树，对每个树只需作少量的运算。事实上我们并不关心所有的树或补树的集合，而是关心树支导纳（或补树阻抗）乘积之和。当然，要实现这一点所付出的代价是计算出所有的基本互补划分。对这一点来说这并不是一种严重的局限性，因为这些基本互补划分可以容易地列出；它们与所研究的图无关。如果允许存在由于重复而引起的冗余项，则本文所推荐的生成树和补树的方法要大大优于利用独立割集和独立回路来生成树和补树的王氏代数法，因为在原始图中由于重复而产生的冗余项要比各连通片所产生的冗余项要多得多。

**附　录**

定理2的证明概要

我们将叙述下列引理而未加证明。证明可在[15]中找到。

**引理5**

$$T = \sum T'(s \cup \{k\}) \times T''(\bar{s} \cup \{k\})$$

$$= \sum T'(\bar{s} \cup \{k\}) \times T''(s \cup \{k\})$$

式中$T'(s)$和$T''(s)$分别是$G'$和$G''$的$k$-树集合，$s \subseteq S_{k-1}$和$\bar{s}$是$S_{k-1}$中$s$的补，环和$\Sigma$是对$S_{k-1}$中所有可能的$s$而求取。

上述引理可以写成稍为不同但较为方便的形式。

**引理6**

$$T = \sum T'(P'(S_k)) \times T''(P''(S_k))$$

此处$P'(S_k)$与$P''(S_k)$是集合$S_k$相对于$k$的互补划分。环和$\Sigma$是对$S_k$中所有可能的$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$而求取。

利用推论1，充分性是证明该定理对所有的基本互补划分$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$是成立。我们将首先证明，如果$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$是基本互补划分，那么它将不会产生任何带回路的子图。假设这一点不成立，令$g$在集合$T'(P'(S_k)) \times T''(P''(S_k))$中至少有一条回路。还令$I \subseteq S_k$是相应于包含在$g$的一个回路中的节点集的集合，即当且仅当$v_j$在该回路中则$j$在$I$中，以及

$$A'(I) = \{x;\ x在P'(S_k)中,\ x \cap I \neq H_a\}$$

$$A''(I)=\{x;\ x\text{在}P''(S_k)\text{中},\ x\cap I\neq H_0\}$$

显然从引理2得，$k$不包含在任何$A'(I)$或$A''(I)$的元素中，此外在定理1中所定义的集合$B'$是$P'(S_k)-A'(I)$的子集。于是$B'\neq P'(S_k)$，并且利用定理1，则$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$便不是基本互补划分。这就证明了任何一对基本互补划分不可能产生任何带回路的子图。

进一步，我们必须证明必要性，即任何非基本的互补划分$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$，假若$T'(P'(S_k))\times T''(P''(S_k))\neq H_0$，它将产生带回路的子图。因为$C_k[P'(S_k), P''(S_k)]$是非基本的互补划分，它存在一个$C_k[P'(I), P''(I)]$，其中$I\subseteq S_k$，$I\neq S_k$或$H_0$，以及$P'(I)\subseteq P'(S_k)$，$P''(I)\subseteq P''(S_k)$。从引理2不难看出，在集合$P'(I)\cup P''(I)$中有$a(I)+1$个元素，换句话说，在$I'\cup I''$中有$q$个元素，此处$q=k-a(I)$，$I'=P'(S_k)-P'(I)$，以及$I''=P''(S_k)-P''(I)$，包含在$I'\cup I''$中的相异代表数也为$q$。为方便起见，令$i_x(x=1,2,\cdots,q)$是$I_x$的相异代表，此处$i_x$在$I_x$中，$I_x$在$I'\cup I''$中，因此得到$S_k-I=\{i_x; x=1,2,\cdots,q\}$，每一个$i_x$恰在$I'\cup I''$中出现两个元素。因为$i_1$是$I_1$的相异代表。因此必须有一个集合，譬如说$I_2$，使得$i_1$不是相异代表。于是$i_1$和$i_2$二者都在$I_2$中。因为$i_2$是$I_2$的相异代表，由此必须又有一个集合，使得$i_2$不是相异代表，于是$i_2$和$i_3$两者均在$I_3$中。继续这一论证，这一过程将产生一个形如$i_1i_2\cdots i_v$的序列，使得$i_w$和$i_{w+1}$在$I_{w+1}$中，适用于$w=1,2,\cdots,v-1$，此处$v\leqq q+2$。因为$I'\cup I''$是有限的，所以这一过程仅能延续到某个整数$v$为止，$i_v=i_x$，此处$x<v$于是如果$T'(P'(S_k))\times T''(P''(S_k))\neq H_0$，在$T'(P'(S_k))\times T''(P''(S_k))$中的每一个元素是一个至少含有一个回路的子图，这个回路包含在由对应的序列$i_xi_{x+1}\cdots i_v$的节点所形成的边系列之中。故定理证毕。

## 参 考 文 献


[1] S. L. Hakimi and D. G. Green, "Generation and realization of trees and k-trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-11, pp. 247-255, June 1964.

[2] W. Mayeda, "Reducing computation time in the analysis of networks by digital computer," *IRE Trans. Circuit Theory* (Correspondence), vol. CT-6, pp. 136-137, March 1959. Correction to this paper in vol. CT-6, p. 394, December 1959.

[3] B. R. Myers, "Efficient generation of tree-admittance products in a cascade of 2-port networks," *Proc. IEE* (London), vol. 114, pp. 1641-1646, November 1967.

[4] W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen, and N. Deo, "Generation of complete trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-15, pp. 101-105, June 1968.

[5] K. T. Wang, "On a new method for the analysis of networks," *Natl. Res. Inst. Engrg.*, Academia Sinica, Memo. 2, pp. 1-11, 1934.

[6] S. L. Ting, "On the general properties of electrical network determinants," *Chinese J. Phys.*, vol. 1, pp. 18-40, 1935.

[7] C. T. Tsai, "Short cut methods for expanding determinants involved in network problems," *Chinese J. Phys.*, vol. 3, pp. 148-181, 1939.

[8] L. M. Maxwell and J. M. Cline, "Topological network analysis by algebraic methods," *Proc. IEE* (London), vol. 113, pp. 1344-1347, August 1966.

[9] W. K. Chen, "Topological network analysis by algebraic methods," *Proc IEE* (London), vol. 114, pp. 86-88, January 1967.

[10] W. Mayeda and S. Seshu, "Generation of trees without duplications," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-12, pp. 181-185, June 1965.

[11] W. K. Chen, "On directed trees and directed k-trees of a digraph and their generation," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 14, pp. 550-560, May 1966.

[12] S. K. Mark and W. K. Chen, "On the generation of trees, cotrees, k-trees, and k-cotrees," *Proc. 1967 Asilomar Conf. Circuits and Systems* (Pacific Grove, Calif.), pp. 659-668.

[13] W. K. Chen, "Unified theory on topological analysis of linear systems," *Proc. IEE*

(London), vol. 114, pp. 1630-1636, November 1967.
〔14〕 C. J. Stehman, J. H. Maenpaa, and W. J. Stahl, "Complete tree generation—Some practical experience," this issue, pp. 548-550.
〔15〕 W. K. Chen, "Generation of trees and cotrees of a graph by decomposition," *Proc. IEE* (London), vol. 116, paper 5930, September 1969.
〔16〕 S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961.

# 三、利用分解的方法生成图的树和补树


## 摘　　要

本文给出图的树和补树集合的生成公式，这些公式将树和补树集合表示为由原图分解而得的连通片子图的集合作笛卡儿乘积、再取环和或取并。如果给定了各连通片的子图、则该方法不会产生任何重复项、冗余项或相消项。文中还给出了产生某类所希望的连通片子图的方法和示例。


### 1. 引　　言

在线性系统的频域分析中，系统行列式的元素通常是复变量$s$的有理函数，在大多数情况下需要计算符号系统函数。虽然这些行列式可以用传统的方法来计算，但是这一计算过程是费时与复杂的。即使得到了最后的结果，仍然存在着大量的相消项。拓扑公式对此问题提供了一种有效的解决方法[1]。但是，这些公式需要列出一个图的全部树和补树。在[2—18]中已发表了许多生成树和补树的方法，拓扑法看来是最好的，但是对于大系统来说，从实用的观点来看，这些方法并不完全令人满意。

对于一个非常复杂的图，一种减少计算困难的方法是将原始图分解成几个连通片，在每一个连通片中确定适当的子图，然后把这些子图组合起来而得到所希望的结果。当然这一思想并不是新发现。它在1958年首先由MacWilliams提出 [2]。后来又有许多学者进行了研究[3—10]。但是现有的方法并不十分令人满意。其中某些方法对网络的结构有太多的限制[3—5]。而某些方法则不完全正确[6,7]，最后某些方法产生了由于重复而引起的冗余项[7—9]，在本文中，我们将介绍用分解法来生成一个图的树与补树，并且指出某些文献中的一些错误。这里所叙述的方法克服了前面各种方法的许多不足之处。还将讨论这种方法在生成级联的$n$端口网络中的树和补树中的应用。

### 2. 预备知识与定义

在本文中我们仅研究无向图$G$，其中所有的边用$e_1, e_2, \cdots, e_m$来标记，所有的节点用$v_1, v_2, \cdots, v_n$来标记，式中$m$是$G$的边数，$n$是$G$的节点数。

经常采用$k$-树，在$k$-树中某些被标识的节点需出现在不同的连通片中。为方便起见，用符号$t(v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_3}v_{i_4}v_{i_5}, v_{i_6}v_{i_7})$，或简写为$t(V_3)$表示$G$的3-树。这里$V_3=\{v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_3}v_{i_4}v_{i_5}, v_{i_6}v_{i_7}\}$，其中节点$v_{i_1}$和$v_{i_2}$在一个连通片中，节点$v_{i_3}$，$v_{i_4}$和$v_{i_5}$在一个连通片中，而$v_{i_6}$和$v_{i_7}$又在一个连通片中。推广到一般情况是自然的，无需作进一步的阐明。特别地，如果$V_k$仅含有一个元素，我们定义$t(V_k)=t$，即是$G$的一个树。$T(V_k)$表示$G$中形如$t(V_k)$的全部$k$-树集合。$G$的一个补树$\bar{t}$是$G$的一个树之补图，$G$的一个“补$k$-树”$\bar{t}(V_k)$是$G$的一个$k$-树$t(V_k)$的补图。于是，如果$V_k$仅含有一个元素，则$\bar{t}(V_k)=\bar{t}$，即是$G$的一个补树。符号$\bar{T}(V_k)$表示$G$中形如$\bar{t}(V_k)$的全部补树集合。为简单起见，令符号$T$和$\bar{T}$分别是$G$的树和补树的集合。

$G$的一个关联割集$Q_i$定义为与$G$的节点$v_i$相关联的所有边所组成的子图。因此，如果$G$是不可分离的[1]，则$Q_i$简化为$G$的一个割集。否则$Q_i$是$G$的几个割集之并。

如果$g_1$和$g_2$是$G$的两个子图，$g_1 \cup g_2$表示$G$的一个子图，它由所有或在$g_1$中、或在$g_2$中、或在两者之中的元素所组成，如果$H_1$和$H_2$是两个集合，$H_1 \cup H_2$表示两个集合之并。这也适用于交、环和与差，它们分别用符号$\cap$、$\oplus$与$-$来表示。

令$g$是一个子图，$e$是$G$的一条边。如果$e$在$g$中，我们定义$g$相对于$e$的"偏导数"[8] $\partial g/\partial e = g \ominus e$，如果$e$不在$g$中，则$\partial g/\partial e = \phi$，即为零图。

如果$H$是$G$的一个子图集合，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial e};\ g\text{在}H\text{中，}e\text{在}g\text{中} \right\}$$

如果$g = e_1 e_2 \cdots e_k$是$G$的一个子图，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{\partial H}{\partial e_1} \oplus \frac{\partial H}{\partial e_2} \oplus \cdots \oplus \frac{\partial H}{\partial e_k}$$

我们用$\partial^2 H/(\partial g_1 \partial g_2)$表示$\partial(\partial H/\partial g_2)/\partial g_1$。$\partial^k H/(\partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k)$的意义是明显的。最后，如果$H_1$和$H_2$是$G$的两个子图集合，则$H_1$与$H_2$的"笛卡儿乘积"运算，$H_1 \times H_2$定义为：

$$H_1 \times H_2 = \{g_i \cup g_j;\ g_i\text{在}H_1\text{中和}g_j\text{在}H_2\text{中}\}$$

以及$H_1 \times H_0 = H_0 \times H_1 = H_0$，这里$H_0$是空集。关于这些运算的详细讨论以及许多有用的恒等式可在Hakimi和Green的著作中找到[8]。

在本文中，术语"图"指一个无向的带标记的图。其它一些没有特别说明的定义可在Seshu和Reed的著作中找到[1]。

**3. 利用分解法生成无重复项的树与补树**

在本节中，我们给出生成一个图的树及补树集合的公式，这些公式将树及补树集合表示为各连通片子图集合的笛卡儿乘积之环和。但是这些公式包含了由于重复而引起的冗余项。我们将在第4节中讨论避免重复的条件。

令$G$沿节点$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$分解成两个子图$G'$和$G''$。令$T'(V_k)$和$T''(V_k)$分别表示$G'$和$G''$中形如$t(V_k)$的$k$-树集合。此外，$V_k = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$，还令$\bar{T}'(V_k)$和$\bar{T}''(V_k)$分别是在$G'$和$G''$中形如$\bar{t}(V_k)$的补$k$-树集合。注意$G'$和$G''$无需是连通的，这里我们假设$G$是连通的。

**定理1.**

$$\bar{T} = \frac{\partial^{k-1} H}{\partial Q_{i_1} \partial Q_{i_2} \cdots \partial Q_{i_{k-1}}}$$

式中$H = \bar{T}'(V_k) \times \bar{T}''(V_k)$，以及$Q_{ix}(x = 1, 2, \cdots k-1)$为图$G$中节点$V_{ix}$的关联割集。

该定理的证明可以在[20]中找到，这里从略。本定理可作为Hakimi和Green定理的一个对偶定理[8]。但是他们的公式要求$G'$及$G''$两者均为连通图，因而这就限制了这一公式的应用。

**引理1.**

如果$H$是$G$的一个子图集合，$g_1, g_2 \cdots g_k$是$G$的子图，则

$$\partial^k H/\partial(g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \ominus g_k) = (\partial H/\partial g_1) \oplus (\partial H/\partial g_2) \oplus \cdots \oplus (\partial H/\partial g_k)$$

**推论1.**

若$v_x = v_i$或$v_j$，则$\partial \bar{T}(v_i, v_j)/\partial Q_x = \bar{T}$

若$v_x \neq v_i$或$v_j$，则上式$=H_0$

此处$Q_x$是$G$中节点$v_x$的关联割集。

**推论2.**

$$\bar{T}(V_{k-u}) = \partial T(V_k)/\partial Q_{ik}\partial Q_{ik-1}\cdots\partial Q_{ik-u+1},$$

此处$Q_{ix}(x=1,2,\cdots,k)$是节点$v_{ix}$（$1\leqslant u<k$）的关联割集。

现在我们可着手叙述与证明本节的主要结论。

**定理2.**

$$\bar{T} = \oplus[\bar{T}'(I\cup\{v_{ik}\})\times\bar{T}''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})]$$
$$= \oplus[\bar{T}'(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})\times\bar{T}''(I\cup\{v_{ik}\})]$$

此处$I$是集合$V_{k-1}$的一个子集。$\bar{I}$是$V_{k-1}$中$I$的补。环和是对$V_{k-1}$中可能的全部$I$求取。

证明：我们对$k$用归纳法来证明此定理。首先证明当$k=1$时，该定理成立，然后假设该定理对任意的$k-1$成立，再证明它对任意$k$也成立。

令$Q_{ix}$，$Q_{ix}'$和$Q_{ix}''$（$x=1,2,\cdots k$）分别是$G$，$G'$和$G''$中节点$v_{ix}$的关联割集。显然$Q_{ix}$是$Q_{ix}'$和$Q_{ix}''$的边不相重之并。于是我们可以写成$Q_{ix}=Q_{ix}'\oplus Q_{ix}''$。利用定理1、引理1和推论2，我们有

$$\bar{T} = \frac{\partial^{k-1}T'(V_k)\times\bar{T}''(V_k)}{\partial Q_{ik-1}\partial Q_{ik-2}\cdots\partial Q_{i1}}$$

$$= \frac{\partial^{k-2}}{\partial Q_{ik-1}\partial Q_{ik-2}\cdots\partial Q_{i2}}\left[T'(V_k)\times\frac{\partial\bar{T}''(V_k)}{\partial Q_{i1}''}\oplus T''(V_k)\times\frac{\partial\bar{T}(V_k)}{\partial Q_{i1}'}\right]$$

$$= \frac{\partial^{k-2}}{\partial Q_{ik-1}\partial Q_{ik-2}\cdots\partial Q_{i2}}[\bar{T}'(V_k)\times\bar{T}''(V_k-\{v_{i1}\})\oplus T''(V_k)\times T'(V_k-\{v_{i1}\})]$$

$$= \frac{\partial^{k-2}}{\partial Q_{ik-1}\partial_{ik-2}\cdots\partial Q_{i2}}\left[\bigoplus_{I在V_1中}\bar{T}'(V_k-I)\times\bar{T}''(V_k-\bar{I})\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q_{ik-1}}\left[\bigoplus_{I在V_{k-2}中}\bar{T}'(V_k-I)\times\bar{T}''(V_k-\bar{I})\right]$$

$$= \bigoplus_{I在V_{k-2}中}[\bar{T}'(V_k-I)\times\partial\bar{T}''(V_k-\bar{I})/\partial Q_{ik-1}''\oplus T''(V_k-I)\times\partial\bar{T}'(V_k-I)/\partial Q_{ik-1}']$$

$$= \bigoplus_{I在V_{k-2}中}[\bar{T}'(\bar{I}\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})\times\partial\bar{T}''(I\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})/\partial Q_{ik-1}''\oplus T''(I\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})\times\partial T'(\bar{I}\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})/\partial Q'_{ik-1}]$$

$$= \bigoplus_{I在V_{k-2}中}[T'(\bar{I}\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})\times\bar{T}''(I\cup\{v_{ik}\})\oplus\bar{T}''(I\cup\{v_{ik-1},v_{ik}\})\times\bar{T}'(I\cup\{v_{ik}\})]$$

$$= \bigoplus_{I在V_{k-1}中}T'(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})\times\bar{T}''(I\cup\{v_{ik}\})$$

$$= \bigoplus_{I在V_{k-1}中}\bar{T}'(I\cup\{v_{ik}\})\times T''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$$

定理证毕。

因为连通图中的每一个树对应着一个唯一的补树，所以定理3是定理2的不同形式。

**定理3.**

$$T=\oplus[T'(I\cup\{v_{ik}\})\times T''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})]$$
$$=\oplus[T'(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})\times T''(I\cup\{v_{ik}\})]$$

此处$I$是集合$V_{k-1}$的子集，$\bar{I}$是$V_{k-1}$中$I$的补，环和是对$V_{k-1}$中全部可能的$I$求取。

**推论3.**

若$k=2$，则$T=T'\times T''(v_{i_1},\ v_{i_2})\cup T'(v_{i_1},v_{i_2})\times T''$，此处$T'$及$T''$分别是$G'$和$G''$的树集合。

**定理4.**

设$Q$是一个给定图$G$的子图，若移去这个子图将使$G$分为$k$个连通片$G_1$，$G_2$，…与$G_k$。如果$V(G)$，$V(Q)$与$V(G_x)(x=1,2,\cdots,k)$分别表示图$G$，$Q$以及$G_x$的节点集合，则$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T=\oplus T_1(I_1)\times T_2(I_2)\times\cdots\times T_k(I_k)\times T_{k+1}(I_{k+1})$$
$$=\oplus\prod_{x=1}^{k+2}T_x(I_x)$$

式中$I_y$是$V(Q)\cap V(G_y)$的一个非空子集，$y=1,2,\cdots,k-1$；$I_k$是$V(Q)\cap V(G_k)$的一个子集，它使其中任一被标识的节点$v_i$总包含在$I_k$中，$I_{k-1}$是$V(Q)$中$[(I_1\cup I_2\cdots\cup I_k)-\{v_i\}]$的补，$T_x(I_x)$是$G_x$中形如$t(I_x)$的$k$-树集合，环和是对所有可能的子集$I_x$求取。

证明：

令$G'=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k$，$G''=Q$以及$v_i=v_{i_1}$，本定理可直接从定理3而得到。

Watanabe推导过一个关于$Q$是割集之并的特殊公式[7]。其结果的错误是他用取并运算代替了环和运算，并将$I_{k+1}$定义为$I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k$的补，而不是我们所定义的$[(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k)-\{v_i\}]$之补。他在推导这一公式时，首先把$G$的关联矩阵分块，然后按通常的方法，应用比耐——柯西定理，因而要找出他的错误原因是不难的。第一个错误是由于在进行主行列式的拉普拉斯展开中的毛病，其中并不是所有项均为正。我们已指出所有的负项都被一些正项所抵消；即所有不需要的项出现了偶数次。第二个错误是因为从加边关联矩阵在删去一行后，对应于$Q$的关联矩阵的非奇异子矩阵的子图是$T_{k+1}(I_{k+1})$，$T_{k-1}(I_{k+1})$ 已在该定理中我们定义过。这一结果造成了该文献的一个缺陷。

作为一个示例，我们研究图1中所示的图。令$Q=e_6e_7e_8$以及$v_i=v_6$。然后$G_1=e_1$，$G_2=e_2e_3e_4e_5$，$V(Q)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$V(G_1)=\{v_1,v_2\}$以及$V(G_2)=\{v_3,v_4,v_5,v_6\}$。根据定理4，我们有：

$$T=T_1(v_1)\times T_2(v_5)\times T_3(v_2,v_3,v_4,v_5)\oplus T_1(v_2)\times T_2(v_5)\times T_3(v_1,v_3,v_4v_5)$$
$$\oplus T_1(v_1)\times T_2(v_3,v_5)\times T_3(v_2,v_4,v_6)$$
$$\oplus T_1(v_1)\times T_2(v_4,v_5)\times T_3(v_2,v_3,v_6)\oplus T_1(v_1)\times T_2(v_3,v_4,v_5)$$
$$\times T_3(v_2,v_5)\oplus T_1(v_2)\times T_2(v_3,v_5)\times T_3(v_1,v_4,v_5)$$
$$\oplus T_1(v_2)\times T_2(v_4,v_5)\times T_3(v_1,v_3,v_5)\oplus T_1(v_2)\times T_2(v_3,v_4,v_5)$$
$$\times T_3(v_1,v_5)\oplus T_1(v_1,v_2)\times T_2(v_5)\times T_3(v_3,v_4,v_5)$$
$$\oplus T_1(v_1,v_2)\times T_2(v_3,v_5)\times T_3(v_4,v_5)\oplus T_1(v_1,v_2)\times T_2(v_4,v_5)$$
$$\times T_3(v_3,v_5)\oplus T_1(v_1,v_2)\times T_2(v_3,v_4,v_5)\times T_3(v_5)$$
$$=T_1\times(T_2\times[T_3(v_2,v_3,v_4,v_5)\oplus T_3(v_1,v_3,v_4,v_5)]\oplus T_2(v_3,v_5)$$
$$\times[T_3(v_2,v_4,v_5)\oplus T_3(v_1,v_4,v_5)]$$
$$\oplus T_2(v_4,v_5)\times[T_3(v_2,v_3,v_5)\oplus T_3(v_1v_3,v_5)]\oplus T_2(v_3,v_4,v_5)\times[T_3(v_2,v_5)$$

$$T_3(v_1,v_5)]\}$$

$$\oplus T_1(v_1,v_2)\times[T_2\times T_3(v_3,v_4,v_6)\oplus T_2(v_3,v_6)\times T_3(v_4,v_6)\oplus T_2(v_4,v_6)$$

$$\times T_3(v_3,v_5)\oplus T_2(v_3,v_4,v_5)\times T_3]$$

$$=\{e_1\}\times[\{e_2e_3e_4,e_3e_4e_5,e_2e_4e_5,e_2e_3e_5\}\times(\{e_7,e_8\}\ominus\{e_6\})$$

$$\oplus\{e_2e_4,e_3e_4,e_2e_5,e_3e_5\}\times(\{e_6e_7,e_6e_8\}\oplus H_0)$$

$$\oplus\{e_2e_4,e_2e_5,e_4e_5\}\times(\{e_7,e_8\}\oplus\{e_6e_7\})\oplus\{e_4,e_5\}\times(\{e_6e_7e_8\}\oplus H_0)]\ \oplus\{\phi\}$$

$$\times(\{e_2e_3e_4,e_3e_4e_5,e_2e_4e_5,e_2e_3e_5\}$$

$$\times\{e_6e_7,e_6e_8\}\oplus\{e_2e_4,e_2e_5,e_3e_4,e_3e_5\}\times H_0\oplus\{e_2e_4,e_2e_5,e_4e_5\}\times\{e_6e_7e_8\}$$

$$\oplus H_0)$$

$$=\{e_1\}\times(\{e_2e_3e_4,e_3e_4e_5,e_2e_4e_5,e_2e_3e_5\}\times\{e_6,e_7,e_8\}\cup\{e_2e_4e_6e_8,e_3e_4e_6e_8,$$

$$e_2e_5e_6e_8,e_3e_5e_6e_8,e_2e_4e_6e_7,e_3e_5e_6e_7,e_4e_5e_6e_7,e_2e_4e_7e_8,e_2e_5e_7e_8,e_4e_5e_7$$

$$e_8,e_4e_6e_7e_8,e_5e_6e_7e_8\})\cup(\{e_2e_3e_4,e_3e_4e_5,e_2e_4e_5,e_2e_3e_5\}\times\{e_6e_7,e_6e_8\})$$

$$\cup\{e_2e_4e_6e_7e_8,e_2e_5e_6e_7e_8,e_4e_5e_6e_7e_8\}$$

在笛卡儿乘积中有35项，其中每一项都对应了$G$的一个树。在这一过程中产生了4个重复项，即$e_1e_2e_4e_6e_7$和$e_1e_2e_5e_6e_7$都出现了两次。

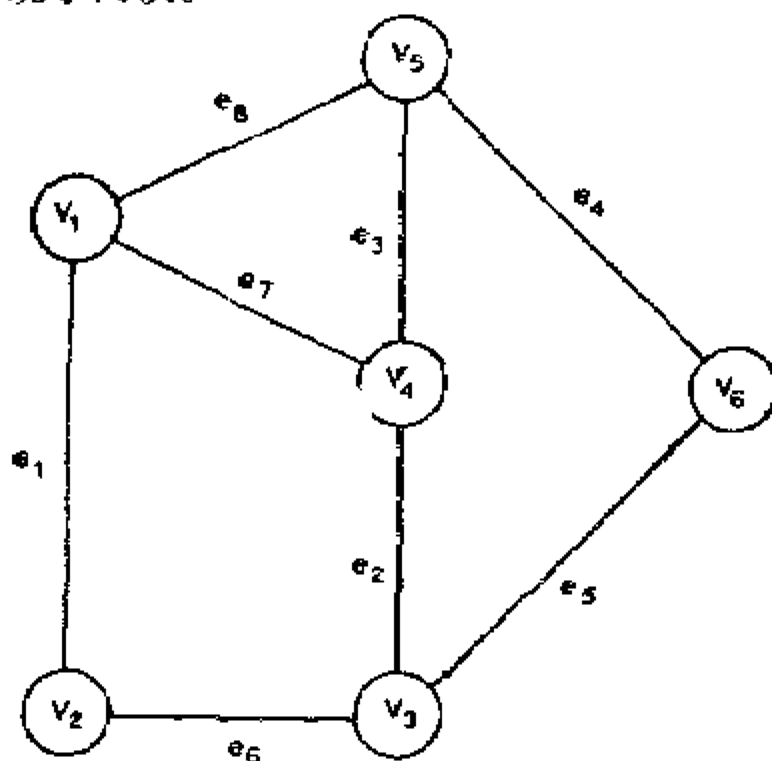



图1　给定的图$G$

从我们已演算过的例子，人们认识到对于一个复杂的图，消去重复项的过程是相当麻烦的。除了延缓生成树和补树的过程之外，利用数字计算机来分析图的规模也受到了限制，因为在计算机的存贮器中保留所有的树和树的集合，还要校验每一个新树与新补树，以保证所列出的树与补树没有重复。因此在上述方法中找出不产生任何重复项的条件是很有意义的，其结果也极为有用。这一内容我们将在下一节中详细研究。

在定理1中，如果$G'$和$G''$有适中的秩和零度，开始我们可以把这条定理应用到$G_1^*$和$G_2^*$上以得到集合$\bar{T}'(V_k)$与$\bar{T}''(V_k)$，这里$G_1^*$和$G_2^*$分别是将$G'$和$G''$中的节点$v_{i_1}$，$v_{i_2}$，…，$v_{i_k}$合并而得到的图。$G_1^*$和$G_2^*$的补树分别与$G'$和$G''$的补$k$-树一一对应。在该定理中所需的其它类型补树可由推论2得到。

**4. 用分解法无重复地生成树**

在本节中，我们将要指出如何有效地利用定理3而没有重复项。为此需要几个定义。

一个集合$V_k$的划分，$P$用$(V_k)$来表示，是$V_k$的所有非空子集$I_x$的集合，$x=1,2,\cdots m$，对于$1\leqslant u<v\leqslant m$满足$V_k=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_m$以及$I_u\cap I_v=H$。设$I$是$V_k$中$m$个互不同元素的集合，如果对于每一个$x$，$I$和$I_x$只有一个公共元素，则称为$P(V_k)$的一个相异代表集。显然，对于一个给定的划分，可以有两个以上的相异代表集。一对划分$P'(V_k)$与$P''(V_k)$，若存在$V_k$的一个子集$I$，使得$I$和$\overline{I-\{V_{ik}\}}$分别是$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的相异代表集的话，则这一对划分相对于$v_{ik}$互补，这里$\overline{I-\{v_{ik}\}}$表示在$V_k$中集合$I-\{v_{ik}\}$的补，设$v_{ik}$在$I$中，且$V_k=\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,\ v_{ik}\}$。为方便起见，用符号$C_{ik}[P'(V_k),P''(V_k)]$表示$V_k$中相对于$v_{ik}$的互补划分$P'(V_k)$与$P''(V_k)$。最后，若$J$是$V_k$的一个非空子集，$P'(J)$与$P''(J)$是集合$J$的划分，若不存在$C_{ik}P[P'(J),P''(J)]$，则$C_{ik}[P'(V_k),P''(V_k)]$称为基本互补划分。现在叙述下面定理[10]。

**定理5.** 设$P_2'(V_k)=P_1''(V_k)$及$P_2''(V_k)=P_1'(V_k)$是集合$V_k$的划分，当且仅当$C_{ik}[P_2''(V_k),P_2'(V_k)]$是基本互补划分时，$C_{ik}[P_1'(V_k),\ P_1''(V_k)]$是基本互补划分。

为了能把这些结果用于定理3，需要将其写成不同的且更为方便的形式。

**定理6.**

$$T=\oplus T'(P''(V_k))\times T''(P''(V_k)),$$

此处$P'(V_k)$与$P''(V_k)$是在$V_k$中相对于$v_{ik}$的互补划分，环和是对$V_k$中所有可能的$C_{ik}[P'(V_k),P''(V_k)]$求取。

证明：在定理3中对于每一个所选取的$I$，对应于$I$的节点必属于$t'(I\cup\{v_{ik}\})$的连通片，对应于$\bar{I}$的节点必属于$t''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$的连通片，这里$t'(I\cup\{v_{ik}\})$与$t''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$分别是$T'(I\cup\{v_{ik}\})$与$T''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$的元素。于是，包含在$V_k$中的$t'(I\cup\{v_{ik}\})$与$t''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$的连通片节点集合形成了相对于$v_{ik}$的一对互补划分，$I\cup\{v_{ik}\}$与$\bar{I}\cup\{v_{ik}\}$为相异代表集。此处$I$是$V_{k-1}$的子集。于是在取环和之前，$\oplus T'(I\cup\{v_{ik}\})\times T''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$中的每一个元素均包含在$\oplus T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k))$之中。反之，$V_k$中的每一个$C_{ik}[P'(V_k),\ P''(V_k)]$的相异代表集可分别用$I\cup\{v_{ik}\}$与$\bar{I}\cup\{v_{ik}\}$来表示。此处$I$还是$V_{k-1}$的一个子集。于是在$/T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k))$中的所有项都包含在$/T'(I\cup\{v_{ik}\})\times T''(\bar{I}\cup\{v_{ik}\})$中，定理证毕。

显然在$\oplus T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k))$中的每一项或者是$G$的一个树，或者是至少含有一个回路的子图。如果是含有一个回路的子图，则此种子图必须在$\oplus T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k))$中出现偶数次。利用定理6，没有重复项地生成树的问题简化为一个如何确定不产生含有回路的互补划分的问题，这就是前面已定义过的$V_k$基本互补划分。

**定理7.**

$$T=\bigcup T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k))$$

式中$P'(V_k)$与$P''(V_k)$是在集合$V_k$中相对于$v_{ik}$的基本互补划分，集合取并是对所有可能的$v_{ik}$的基本互补划分$C_{ik}[P'(V_k),\ P''(V_k)]$进行的。

该定理的证明取决于基本互补划分的代数性质，文献[10]中给出了一种检验一对互补划分是否为基本互补划分的有效算法。

现在我们已实现了生成树的目的，首先把一个图分为两个部份，确定每一部分适当的k-树，然后把这些k-树用某种方法加以组合，从而得到所希望的结果，要实现这一点，我们所付出的代价是必须计算出所有可能的基本互补划分。这一点并不是一个严重的缺点，因为当k不大时，我们可列出所有$V_k$中的基本互补划分，它们与所研究的图无关。而且我们无需把它们全部列出，正如定理5中所见列出其一半已足够。

作为一个示例，研究$V_3=\{v_1,v_2,v_3\}$的情况。$C_3[P'(V_3),\ P''(V_3)]$的下列互补划分是基本互补划分。对此，可利用文献[10]中所提出的方法来加以验证。

| $P'(V_3)$ | $P''(V_3)$ |
|---|---|
| $\{v_1,v_2,v_3\}$ | $\{v_1v_2v_3\}$ |
| $\{v_1,v_2v_3\}$ | $\{v_1v_3,v_2\}$ |
| $\{v_1,v_2v_3\}$ | $\{v_1v_2,v_3\}$ |
| $\{v_1v_2,v_3\}$ | $\{v_1v_3,v_2\}$ |

交换$P'(V_3)$与$P''(V_3)$的位置，我们将得到另外4个基本互补划分。此处仅有一个互补划分$C_3[\{v_1v_2,v_3\},\ \{v_1v_2,v_3\}]$不是基本互补划分。

一个类似于定理7的结果由Mayeda给出[6]，他采用了不适合于数字计算机的复杂表达式，并且在[6]中所提出的条件仅对于$k\leqslant 7$是充分的。

我们将下列例子来说明上面所给出的结果。*例1*：研究图1所示的图。沿节点$v_3v_4$及$v_5$可将图$G$分解为两个子图$G'$与$G''$，如图2所示。$v_3,v_4$与$v_5$的基本互补划分可从上面的表中利用适当的代换而得到，即用$v_3$代替$v_1$，用$v_4$代替$v_2$以及用$v_5$代替$v_3$，所希望的k-树可求得如下：

$$T'(v_3,v_4,v_5)=\{e_1e_6,e_1e_7,e_1e_8,e_6e_7,e_6e_8\}$$
$$T'(v_3,v_4v_5)=\{e_1e_7e_8,e_6e_7e_8\}$$
$$T'(v_3v_4,v_5)=\{e_1e_6e_7\}$$
$$T'(v_3v_4v_5)=T'=\{e_1e_6e_7e_8\}$$
$$T'(v_3v_5,v_4)=\{e_1e_6e_8\}$$
$$T''(v_3v_4v_5)=T''=\{e_2e_3e_4,e_2e_3e_5,e_2e_4e_5,e_3e_4e_5\}$$
$$T''(v_3v_5,v_4)=\{e_4e_5\}$$
$$T''(v_3v_4,v_5)=\{e_2e_4,e_2e_5\}$$
$$T''(v_3,v_4,v_5)=\{e_4,e_5\}$$
$$T''(v_3,v_4v_5)=\{e_3e_4,e_3e_5\}$$

从定理7，$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T=T'(v_3,v_4,v_5)\times T''\cup T''(v_3,v_4,v_5)\times T'\cup T'(v_3,v_4v_5)\times T''(v_3v_5,v_4)\cup$$
$$T''(v_3,v_4v_5)\times T'(v_3v_5,v_4)\cup T'(v_3,v_4v_5)\times T''(v_3v_4,v_5)\cup T''(v_3,v_4v_5)$$

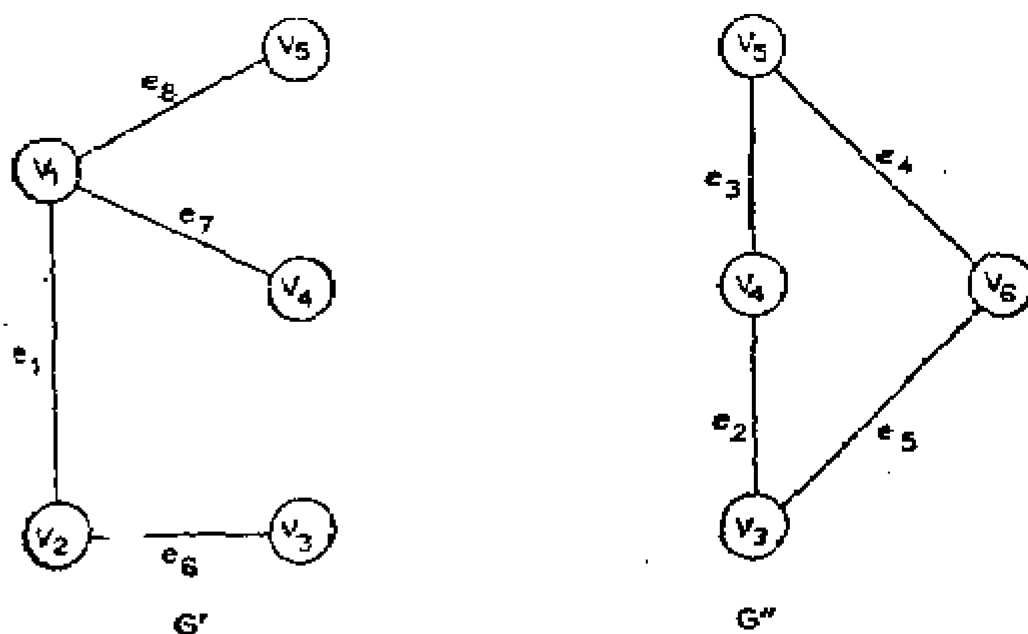



图2 图1中$G$的分解图$G'$与$G''$

$$\times T'(v_3v_4,v_5)\cup T'(v_3v_4,v_5)\times T''(v_3v_5,v_4)\cup T''(v_3v_4,v_5)\times T'(v_3v_5,v_4)$$
$$=\{e_1e_6,e_1e_7,e_1e_8,e_6e_7,e_6e_8\}\times\{e_2e_3e_4,e_2e_3e_5,e_2e_4e_5,e_3e_4e_5\}\cup\{e_1e_4e_6e_7$$
$$e_5,e_1e_5e_6e_7e_8\}\cup\{e_4e_5\}\times\{e_1e_7e_2,e_6e_7e_8,e_1e_6e_7\}\cup\{e_1e_3e_4e_6e_8,e_1e_3e_5e_6e_8\}$$
$$\cup\{e_2e_4,e_2e_5\}\times\{e_1e_7e_8,e_3e_7e_8,e_1e_6e_8\}\cup\{e_1e_3e_4e_6e_7,e_1e_3e_5e_6e_7\}$$

它与前面定理4中提出的方法所得的结果相同。注意在这一分析中，树的集合是以各种子图的笛卡儿乘积之并的形式出现。这对于网络理论来说，确实是一种所希望的形式，此时无需进行笛卡儿乘积运算的展开。

## 结　论

本文已证明了一个图的树与补树的集合可以表示为一些连通片子图的笛卡儿乘积的环和或取并运算，这些连通片是由原图分解而得到的。如果允许有重复项，则本文所推荐的生成树与补树的方法远比利用独立割集与独立回路来生成树及补树的王氏代数法〔12～16〕要优越，因为在原图中由于重复而产生的冗余项要比用连通片子图运算中所产生的冗余项多得多。另一方面，如果不允许出现重复项的话，要实现这一点所付出的代价是必需计算出所有可能的基本互补划分，但这并不是一个严重的局限性，因为这种基本互补划分，可以用表格列出，它们与所研究的图无关。

致谢（略）

## 参　考　文　献

〔1〕SESHU, S., and REED, M. B.: 'Linear graphs and electrical networks' (Addison-Wesley, 1961)

〔2〕MACWILLIAMS, F. J.: 'Topological network analysis as computer program', *IRE Trans.*, 1958, **CT-5**, pp. 228—229

〔3〕MYERS, B. R.: 'Efficient generation of tree-admittance products in a cascade of 2 port networks', *proc. IEE*, 1967, **114**, (11), pp. 1641—1646

〔4〕LAYTON, D. M., and FRISCH, I. T.: 'A minimal representation for a cascade of lattice networks.' Proceedings of the 2nd annual Allerton conference on circuit and system theory, University of Illinois, 1964, pp. 467—484

〔5〕KIM, W. H.: 'Topological evaluation of network functions', *J. Franklin Inst.*, 1959, **267**, pp. 283—293

〔6〕MAYEDA, W.: 'Reducing computation time in the analysis of networks by digital computers', *IRE Trans.*, 1959, **CT-6**, pp. 136—137

〔7〕WATANABE, H.: 'A method of tree expansion in network topology', *ibid.*, 1961, **CT-8**, pp. 4—10

〔8〕HAKIMI, S. L., and GREEN, D. G.: 'Generation and reansation of trees and k-trees', *IEEE Trans.*, 1964, **CT-11**, pp. 247—255

〔9〕MARK, S. K., and CHEN, W. K.: 'On the generation of trees, cotrees, k-trees, and k-cotrees.' *Proceedings of the Ist Asilomar conference on circuits and systems*, Pacific Grove, 1967, pp. 659—668

〔10〕CHEN, W. K.: 'Generation of trees and cotrees in a cascade of n-port network.' Ohio University Department of Electrical Engineering technical report EER 10—15, January 1968

〔11〕PERCIVAL, W. S.: 'The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees', *Proc. IEE.*, 1953, **100**, Pt. III pp. 143—150

〔12〕WANG, K. T.: 'On a new method for the analysis of networks.' National Research *Institute of Engineering memoir 2, 1934*, pp. 1—11

〔13〕 TING, S. L. :'On the general properties of electrical network determinants', *Chinese J. Phys.*, 1935, 1, pp. 18—40
〔14〕 TSAI, C. T. :'Short cut methods for expanding determinants involved in network problems', *ibid.*, 1939, **3**, pp. 148—181
〔15〕 MAXWELL, L. M., and CLINE, J, M., JUN. :'Topological network analysis by algebraic methods', *Proc, IEE*, 1966, **113**, (8), pp. 1344—1347
〔16〕 CHEN, W. K. :'Topological network analysis by algebraic methods', *ibid.*, 1967, **114**, (1), pp. 86—88
〔17〕 MAYEDA, W., and SESHU, S. :'Generation of trees without duplications', *IEEE Trans.*, 1965, CT—**12**, pp. 181—185
〔18〕 CHEN, W.K. :'On directed trees and directed *k*-trees of a digraph and their generation', *SIAM J. Appl. Math.*, 1966, **14**, pp. 550—560
〔19〕 CHEN, W. K. :'Unified theory on topological analysis of linear systems', *proc. IEE*, 1967, **114**, (11), pp. 1630—1636
〔20〕 CHEN, W. K, and MARK, S. K. :'On the algebraic relationships of trees, cotrees, circuits and cutsets of a graph', *IEEE Trans.*, 1969. CT-**16**, pp. 176—184
〔21〕 CHEN, W. K. :'Iterative procedure for generating trees and directed trees', *Electron. Lett.*, 1968, **4**, pp. 516—518

# 四、完备图的树和$k$-树的编纂


## 摘　　要

本文给出了一个完备图的树及$k$-树的简单编码法。它能相当有效地产生一个完备图或近乎完备图中的所有可能的树及$k$-树。加以少量的修改，本编码法也可作为带标号树的生成函数，并给出了实例。


**1.引言**

近年来，生成一个图的树的问题已经受到了广泛的注意，它在电网络的分析与综合中的应用是众所周知的，无需作进一步说明。现在有许多方法可以利用。对于各种方法的总结，详细讨论它们的有关优点以及罗列大量有关的参考文献，我们可参阅陈的论文[1,2,11]。

本文的主要目的是给出一个完备图的树及$k$-树的简单编码法。编码法在实质上是迭代的，并且可用来列出一个完备图或近乎完备图中的所有可能的树及$k$-树，没有由于重复而出现的多余项。

**2.编码法及定义**

在本文中，我们仅考虑无向图$G$。$G$的节点用整数$1,2,\cdots,n$来标记，其中$n$是$G$的节点数。连接$G$的节点$i$和节点$j$之间的一条边用$ij$或$ji$来表示。如果存在$G$的并列边，是通过采用将在后面所定义的加上适当的下标来加以区别。

令　　$S_n=\{1,2,\cdots,n\}$

是相应于$G$中各节点的元素集合。如果$i,j$和$k$是$S_n$的元素，所谓$i(j+k)$意指

$$i(j+k)=(j+k)i=ij+ik$$

于是，如果$a,b,c$和$d$是$S_n$的元素，则我们有

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

换句话说，这些运算与实数系统的运算完全相同，只不过是我们并不将它们的数值合并。

为方便起见，我们用边标识符的“乘积”或并置来表示$G$的子图$g$。例如，如果12，34和13是树$t$的树支，那么

$$t=(12)(34)(13)$$

类似地，如果$g_1$，$g_2$和$g_3$是$G$的子图，所谓$g_1(g_2+g_3)$意指

$$g_1(g_2+g_3)=(g_2+g_3)g_1=g_1g_2+g_1g_3$$

令　　$I_k=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$是$S_n$的一个非空子集，并令

$Z_u=\{z_1,z_2,\cdots,z_u\}$是$I_k$的一个非空真子集。

令　　$$\left(I_1;\sum_x j_x\right)=\sum_x i_1 j_x,$$

且递归地定义$(I_k;\sum_x j_x)$如下：

$$\left(I_k; \sum_x j_x\right) = \prod_{y=1}^{k}\left(\sum_x i_y j_x\right) + \sum_{u=1}^{k-1}\sum_{Z_u}\left\{\left[\prod_{v=1}^{u}\left(\sum_x z_v j_x\right)\right]\left(\bar{Z}_u; \sum_v z_v\right)\right\} \qquad (1)$$

$k\geqslant 2$，式中$\bar{Z}_u$是$I_k$中集合$Z_u$的补，且

$$\sum_v z_v = z_1 + z_2 + \cdots + z_u,$$

和式 $\sum_{(Z_u)}$ 是对$I_k$中所有可能的$Z_u$求取。

作为一个示例，令$I_3 = \{1,2,3\}$和$\sum_x j_x = 4$，那么

$$(I_3;4) = \prod_{y=1}^{3}(y4) + \sum_{u=1}^{2}\sum_{Z_u}\left\{\left[\prod_{v=1}^{u}(z_v 4)\right]\left(\bar{Z}_u; \sum_v z_v\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= (14)(24)(34) + (14)(\{2,3\};1) + (24)(\{1,3\};2) + (34)(\{1,2\};3)\\
&\quad + (14)(24)(\{3\};1+2) + (14)(34)(\{2\};1+3) + (24)(34)(\{1\};2+3)\\
&= (14)(24)(34) + (14)[(21)(31) + (21)(\{3\};2) + (31)(\{2\};3)]\\
&\quad + (24)[(12)(32) + (12)(\{3\};1) + (32)(\{1\};3)]\\
&\quad + (34)[(13)(23) + (13)(\{2\};1) + (23)(\{1\};2)] + (14)(24)(31+32)\\
&\quad + (14)(34)(21+23) + (24)(34)(12+13)\\
&= (14)(24)(34) + (14)(21)(31) + (14)(21)(32) + (14)(31)(23)\\
&\quad + (24)(12)(32) + (24)(12)(34) + (24)(32)(13) + (34)(13)(23)\\
&\quad + (34)(13)(21) + (34)(23)(12) + (14)(24)(31) + (14)(24)(32)\\
&\quad + (14)(34)(21) + (14)(34)(23) + (24)(34)(12) + (24)(34)(13)
\end{aligned}$$

上述展开式中有16项，其每一项唯一地对应了 4 个节点的完备图中的一个树。该性质一般说来也是正确的，在下一节中将加以证明。

**3.完备图中树的编纂**

令$G_n$是一个$n$个节点的完备图。列出$G_n$的所有树的问题已经由许多作者进行过研究[3-5]。他们的方法是基于在$G_{n-1}$的树上进行迭代。但是，从实用的观点来看，这些方法并不十分令人满意。Zobrist和Lago[3]与Hirayama等人[4]的两种方法在概念上是简单的，但是他们的方法不适用于数字计算机计算。另一方面，Char的方法[5]虽然容易编程序，但是需要占用过多的存贮空间。下面，我们将证明在前节中所述的编码法可用于这一目的。

**推论2.** 在 $(S_{n-1};n)$ 的最后表达式中的每一项都唯一地对应了$G_n$($n\geqslant 2$)的一个树。

本定理的证明概要在附录中给出。因为$S_{n-1}$的一个元素与 $(S_{n-1};n)$ 中的元素$n$进行交换等价于它们相应节点标号的交换，而这种变换过程并不会改变$G_n$的树之集合。于是我们有：

**推论1.** 令$\bar{I}_1$是$S_n$中$I_1$的补。那么对所有的$ij = ji$，$i \neq j$，我们有：

$$(S_{n-1};n) = (\bar{I}_1;i_1). \qquad (2)$$

作为一个例子，我们来计算$n = 3$与$i_1 = 3, 1$和2时 $(\bar{I}_1, i_1)$ 的编码。

$$\begin{aligned}
(\{1,2\};3) &= (13)(23) + (13)(\{2\};1) + (23)(\{1\};2)\\
&= (13)(23) + (13)(21) + (23)(12)\\
(\{2,3\};1) &= (21)(31) + (21)(32) + (31)(23)\\
(\{1,3\};2) &= (12)(32) + (12)(31) + (32)(13)
\end{aligned}$$

于是，对于$ij = ji$，$i \neq j$和$i, j = 1, 2, 3$的情况，我们有：

$$(\{1,2\};3)=(\{2,3\};1)=(\{1,3\};2)$$

令$t_1$和$t_2$是$G_n$中的两个树。那么$t_1$和$t_2$之间的距离定义为存在于一个树中但不存在于另一个树中的树支数。换句话说，它是$t_1\oplus t_2$的边数之一半。下面，我们将证明(1)式中的各项对应于一个树的集合，这些树离开基准树有各种不同的距离。

令

$$t_0=(n1)(n2)\cdots(nn-1)$$
$$E_q=(nj_1)(nj_2)\cdots(nj_q)$$

$q=1,2,\cdots,n-2$，式中$J_q=\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$是$S_{n-1}$的一个非空真子集。令$\bar{J}_q$是$S_{n-1}$中$J_q$的补。那么在$n\geqslant 2$时，我们有：

$$(S_{n-1};n)=t_0+\sum_{q=1}^{n-2}\sum_{(J_q)}E_q(\bar{J}_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)=t_0+\sum_{q=1}^{n-2}T_{n-q-1} \tag{3}$$

式中

$$T_{n-q-1}=\sum_{(J_q)}E_q(\bar{J}_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)$$

和式$\sum\limits_{(J_q)}$是对$S_{n-1}$中所有的$J_q$求取。

很明显，如果$u\neq v$，则在$T_u$中的各项与$T_v$中的各项是不相同的。因为$(\bar{J}_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)$中没有元素$n$，由此得到对于每一个选定的$q$，$T_{n-q-1}$中的各项与$G_n$中离开基准树$t_0$的距离为$n-q-1$的树集合相对应。具体地讲，

$$E_q(\bar{J}_q;j_1+j_2+\cdots+j_q) \tag{4}$$

与离开$t_0$距离为$n-q-1$的树集合相对应，使得如果$t_{n-q-1}$是(4)式中的一项，则$t_{n-q-1}\cap t_0=E_q$。因而，如果$G(g_1;g_2)$表示从图中短接所有$g_1$中的边(同时移去由此而出现的所有自环)且移去$g_2$中的所有边而得到的子图，此处$g_1$和$g_2$是$G$的两个边不相接的子图，那么

**推论2.** 在$(\bar{J}_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)$的最后展开式中，每一项都唯一地对应于$G_n(E_q;t_0-E_q)$的一个树。

我们将用下列例子说明上述结果。

例1.为了说明这种方法可适用于大图的效能，我们列出$G_5$的全部树。从(3)式，对于$q=1$的情况，我们有：

$$T_3=(51)(\{2,3,4\};1)+(52)(\{1,3,4\};2)+(53)(\{1,2,4\};3)$$
$$+(54)(\{1,2,3\};4)$$

其中

$$\begin{aligned}(\{2,3,4\};1)&=(21)(31)(41)+(21)(\{3,4\};2)+(31)(\{2,4\};3)\\&\quad+(41)(\{2,3\};4)+(21)(31)(\{4\};2+3)\\&\quad+(21)(41)(\{3\};2+4)+(31)(41)(\{2\};3+4)\\&=(21)(31)(41)+(21)[(32)(42)+(32)(43)+(42)(34)]\\&\quad+(31)[(23)(43)+(23)(42)+(43)(24)]+(41)[(24)(34)\\&\quad+(24)(32)+(34)(23)]+(21)(31)[(42)+(43)]\\&\quad+(21)(41)[(32)+(34)]+(31)(41)[(23)+(24)]\end{aligned}$$

$$(\{1,3,4\};2)=(12)(32)(42)+(12)(\{3,4\};1)+(32)(\{1,4\};3)$$

$$
\begin{aligned}
&+(42)(\{1,3\};4)+(12)(32)(\{4\};1+3)+(12)(42)(\{3\};1+4)\\
&+(32)(42)(\{1\};3+4)\\
&=(12)(32)(42)+(12)[(31)(41)+(31)(43)+(41)(34)]\\
&+(32)[(13)(43)+(13)(41)+(43)(14)]+(42)[(14)(34)\\
&+(14)(31)+(34)(13)]+(12)(32)[(41)+(43)]\\
&+(12)(42)[(31)+(34)]+(32)(42)[(13)+(14)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\{1,2,4\};3)&=(13)(23)(43)+(13)(\{2,4\};1)+(23)(\{1,4\};2)\\
&+(43)(\{1,2\};4)+(13)(23)(\{4\};1+2)+(13)(43)(\{2\};1+4)\\
&+(23)(43)(\{1\};2+4)\\
&=(13)(23)(43)+(13)[(21)(41)+(21)(42)+(41)(24)]\\
&+(23)[(12)(42)+(12)(41)+(42)(14)]+(43)[(14)(24)\\
&+(14)(21)+(24)(12)]+(13)(23)[(41)+(42)]\\
&+(13)(43)[(21)+(24)]+(23)(43)[(12)+(14)].
\end{aligned}
$$

其中$(\{1,2,3\};4)$曾在第2节中计算过。因此在$T_3$的最后展开式中有64项，其中每一项都与一种树相对应，这种树离开基准树$t_0=(51)(52)(53)(54)$的距离为3。

对于$q=2$的情况，我们得到：

$$
\begin{aligned}
T_2&=(51)(52)(\{3,4\};1+2)+(51)(53)(\{2,4\};1+3)\\
&+(51)(54)(\{2,3\};1+4)+(52)(53)(\{1,4\};2+3)\\
&+(52)(54)(\{1,3\};2+4)+(53)(54)(\{1,2\};3+4)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
(\{3,4\};1+2)&=(31+32)(41+42)+(31+32)(43)+(41+42)(34),\\
(\{2,4\};1+3)&=(21+23)(41+43)+(21+23)(42)+(41+43)(24),\\
(\{2,3\};1+4)&=(21+24)(31+34)+(21+24)(32)+(31+34)(23),\\
(\{1,4\};2+3)&=(12+13)(42+43)+(12+13)(41)+(42+43)(14),\\
(\{1,3\};2+4)&=(12+14)(32+34)+(12+14)(31)+(32+34)(13),\\
(\{1,2\};3+4)&=(13+14)(23+24)+(13+14)(21)+(23+24)(12).
\end{aligned}
$$

于是，在$T_2$的最后展开式中有48项。其中每一项与另一种树相对应，它们离开$t_0$的距离为2。最后，对于$q=3$的情况，我们得到：

$$
\begin{aligned}
T_1&=(51)(52)(53)(\{4\};1+2+3)+(51)(52)(54)(\{3\};1+2+4)\\
&+(51)(53)(54)(\{2\};1+3+4)+(52)(53)(54)(\{1\};2+3+4)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&(\{4\};1+2+3)=41+42+43\\
&(\{3\};1+2+4)=31+32+34\\
&(\{2\};1+3+4)=21+23+24\\
&(\{1\};2+3+4)=12+13+14
\end{aligned}
$$

因而，在$T_1$的最后展开式中有12项，其中每一项都与第三种树相对应，它们离开$t_0$的距离为1。从定理1，$G_5$的树集合由下式表示：

$$(S_4;5)=t_0+T_1+T_2+T_3,$$

应该说明，上面提到的$G_5$的树集合是以因子的形式给出的。这对于网络理论的应用来说，是一种所希望的形式，此时无需对表达式进行最后的展开。关于这一点的理由是在于，在拓

扑分析中我们真正感兴趣的是形成所有"树支导纳乘积",而不是列出所有可能的树[6,8],还应注意到我们有：

$$(\{2,3,4\};1)=(\{1,3,4\};2)=(\{1,2,4\};3)=(\{1,2,3\};4),$$

对于$q=1$，一般说来这也是正确的，同时它是推论1的直接结果。

**推论3.** $(J_1;j_1)$对于$J_1$或$j_1$的不同选择是不变的。

**4.完备图中k-树的编纂**

一个图$G$的生成子图是一个包含了$G$的所有节点的子图。$G$的一个$k$-树是一个具有$k$个连通片且不含回路的生成子图[7]。用$t(I_k)$表示$G$的$k$-树，在不同的连通片中出现的各节点对应于$I_k$的整数。例如$t\{(i_1,i_2)\}$是一个2-树，节点$i_1$出现在一个连通片中，而节点$i_2$出现在另一个连通片中。

**引理1.** 在$(S_{n-1}-\{i\};i+n)$的最后展开式中，每一项都唯一地对应$G_n(ni;\phi)$的一个树，其中$n\geqslant 3$，$n\neq i$，$\phi$表示$G_n$的零图。

证明：为了简化和不失一般性起见，我们假设$i\neq 1$。令在$G_n(ni;\phi)$中的组合节点用$\alpha$表示，并令在$G_n(ni;\phi)$中连接节点$j$和$\alpha$之间的并列边用$ij$和$nj$来表示，$j=1,2,\cdots,i-1,i+1\cdots,n-1$。如果$G^*_{n-1}$是与$G_n(ni;\phi)$有相同的节点标号的、有$(n-1)$个节点的完备图。那么根据定理1，在$(S_{n-1}-\{i\};\alpha)$的展开式中的每一项都与$G^*_{n-1}$的树相对应。把该式展开并写成类似于(3)式那样，我们得到：

$$(S_{n-1}-\{i\};\alpha)=t^*_0+\sum_{q=1}^{n-3}\sum_{(J^*_q)}E^*_q(\bar{J}^*_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)$$

式中

$$t^*_0=(\alpha 1)(\alpha 2)\cdots(\alpha i-1)(\alpha i+1)\cdots(\alpha n-1),$$
$$J^*_q=\{j_1,j_2,\cdots,j_q\},$$
$$E^*_q=(\alpha j_1)(\alpha j_2)\cdots(\alpha j_q)。$$

$J^*_q$是$S_{n-1}-\{i\}$的一个非空真子集，$\bar{J}^*_q$表示在$S_{n-1}-\{i\}$中$J^*_q$的补，和式$\sum_{(J^*_q)}$是对$S_{n-1}-\{i\}$中的所有的$J^*_q$求取。因为在展开式

$$E^*_q(\bar{J}^*_q;j_1+j_2+\cdots+j_q) \tag{5}$$

中的每一项都与$G^*_{n-1}$的树相对应，使得如果$t^*$是(5)式中的一项的话，那么$t^*\cap t^*_0=E^*_q$，由此得到展开式

$$E''_q(\bar{J}^*_q;j_1+j_2+\cdots+j_q),$$

其中

$$E''_q=(ij_1+nj_1)(ij_2+nj_2)\cdots(ij_q+nj_q),$$

中的各项对应于$G_n(ni;\phi)$中的树。于是，$G_n(ni;\phi)$的树集合可表示为（也可见附录中较详细的类似论断）：

$$t''_0+\sum_{q=1}^{n-1}\sum_{(J^*_q)}E''_q(\bar{J}^*_q;j_1+j_2+\cdots+j_q)=(S_{n-1}-\{i\};i+n),$$

其中

$$t''_0=(i1+n1)(i2+n2)\cdots(iu+nu)(iv+nv)\cdots(iw+nw)$$

以及$u=i-1$，$v=i+1$和$w=n-1$。引理证毕。

因为$G_n(ni;\phi)$ 与$G_n$的2-树$t(\{i,n\})$是一一对应的。所以我们有：

**推论4.** 在$(S_{n-1}-\{i\};i+n)$的最后展开式中，其每一项都唯一地与$G_n$的一个2-树$t(\{i,n\})$相对应，其中$n\geqslant3$和$i\neq n$。

下列定理是将推论4略加推广而得，它可很容易地利用归纳法来加以证明。

**定理2.** 在$(\bar{I}_k;i_1+i_2+\cdots+i_k)$的最后展开式中的每一项都唯一地与$G_n$中的一个$k$-树$t(I_k)$相对应，其中$\bar{I}_k$表示在$S_n$中$I_k$的补。

值得注意，如果我们定义1-树为树，那么定理1和推论4可看成定理2的特殊情况。我们将用下列例子来说明此结果。

例2.我们列出$G_5$的全部2-树$t\{1,3\}$和3-树$t(\{1,3,5\})$。
从定理2，这等价于计算下列编码：

$$
\begin{aligned}
(\{2,4,5\};1+3)=&(21+23)(41+43)(51+53)+(21+23)(\{4,5\};2)\\
&+(41+43)(\{2,5\};4)+(51+53)(\{2,4\};5)+(21+23)\\
&(41+43)(\{5\};2+4)+(21+23)(51+53)(\{4\};2+5)\\
&+(41+43)(51+53)(\{2\};4+5)\\
=&(21+23)(41+43)(51+53)+(21+23)[(42)(52)\\
&+(42)(54)+(52)(45)]+(41+43)[(24)(54)+(24)(52)\\
&+(54)(25)]+(51+53)[(25)(45)+(25)(42)+(45)(24)]\\
&+(21+23)(41+43)(52+54)+(21+23)(51+53)\\
&(42+45)+(41+43)(51+53)(24+25).
\end{aligned}
$$

在$(\{2,4,5\};1+3)$的最后展开式中有50项，其中每一项都与$G_5$的一个2-树$t(\{1,3\})$相对应。
类似地，我们有：

$$
\begin{aligned}
(\{2,4\};1+3+5)=&(21+23+25)(41+43+45)+(21+23+25)(42)\\
&+(41+43+45)(24).
\end{aligned}
$$

在$(\{2,4\};1+3+5)$的最后展开式中有15项，其中每一项与$G_5$的一个3-树$t(\{1,3,5\})$相对应。

正像生成树的情况那样，上述所得到的各项是用因子的形式给出的。对于网络理论来说这是最需要的形式，并且无需进行因式的最后展开，因为我们真正感兴趣的是形成所有可能的"2-树导纳乘积"或"3-树导纳乘积"[8]。

**5.一个任意图的树及k-树的生成**

不失一般性地我们假设给定图$G$具有$n$个节点且不含有并列边。显然$G$是一个$n$个节点完备图$G_n$的子图。如果在$(S_{n-1};n)$的编码展开的每一步都将$G_n$的未包含在$G$中的边都代作零，那么我们将生成$G$的全部树，其中

$$
\begin{aligned}
0(ij+uv)&=(ij+uv)0=0(ij)+0(uv),\\
0(ij)&=(ij)0=0,\\
0+ij&=ij+0=(ij).
\end{aligned}
$$

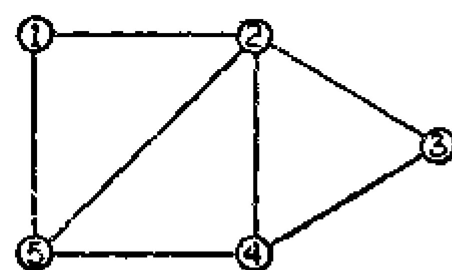


图1 在例3中所研究的图$G$

值得提出的是，不像Zobrist和Lago[3]与Hirayama等人[4]所提出的方法，他们仅在最后一步才进行消去带附加边的树，而在我们的方法中，将消去不存在的边的工作可放在任何一步进行。因此，如果在展开过程中不考虑包括零的项，这一过程并不会导致任何重复项。这一点对于生成$G$的$k$-树的情况也类似成立。我们将用下列例子来说明此过程。

*例3*. 研究图1所示的图$G$。假设我们生成$G$的所有树。这可以很容易地利用（$S_4$；5)的编码来实现，并且在（$S_4$；5）中我们将边13或31，边14或41以及边35或53代作零。

$$
\begin{aligned}
(S_4;5) &= (15)(\{2,3,4\};1)+(25)(\{1,3,4\};2)+(45)(\{1,2,3\};4)\\
&\quad +(15)(25)(\{3,4\};1+2)+(15)(45)(\{2,3\};1+4)\\
&\quad +(25)(45)(\{1,3\};2+4)+(15)(25)(45)(\{3\};1+2+4),
\end{aligned}
$$

其中*

$$
\begin{aligned}
(\{2,3,4\};1) &= (21)(\{3,4\};2)\\
&= (21)[(32)(42)+(32)(43)+(42)(34)],\\
(\{1,3,4\};2) &= (12)(32)(42)+(12)(\{3,4\};1)+(32)(\{1,4\};3)\\
&\quad +(42)(\{1,3\};4)+(12)(32)(\{4\};1+3)+(12)(42)\\
&\qquad (\{3\};1+4)+(32)(42)(\{1\};3+4)\\
&= (12)(32)(42)+(12)0+(32)0+(42)0+(12)(32)(43)\\
&\quad +(12)(42)(34)+(32)(42)0\\
&= (12)(32)(42)+(12)(32)(43)+(12)(42)(34),\\
(\{1,2,3\};4) &= (24)(\{1,3\};2)+(34)(\{1,2\};3)+(24)(34)\\
&\qquad (\{1\};2+3)\\
&= (24)(12)(32)+(34)(23)(12)+(24)(34)(12),\\
(\{3,4\};1+2) &= (32)(42)+(32)(43)+(42)(34),\\
(\{2,3\};1+4) &= (21+24)(34)+(21+24)(32)+(34)(23),\\
(\{1,3\};2+4) &= (12)(32-34),\\
(\{3\};1+2+4) &= (32)+(34).
\end{aligned}
$$

因此在上述展开式中有21项，其中每一项与$G$的一个树相对应。类似地，如果需求2-树$t(\{3,5\})$的话，此方法也可用于这一目的。从推论4，我们有对于$G_6$的2-树的编码$(\{1,2,4\};3+5)$，利用这一编码且把边13或31，边14或41、边35或53代作零，我们得到：

$$
\begin{aligned}
(\{1,2,4\};3+5) &= (15)(23+25)(43+45)+(15)(\{2,4\};1)\\
&\quad +(23+25)(\{1,4\};2)+(43+45)(\{1,2\};4)\\
&\quad +(15)(23+25)(\{4\};1+2)+(15)(43+45)\\
&\qquad (\{2\};1+4)\\
&\quad +(23+25)(43+45)(\{1\};2+4)\\
&= (15)(23+25)(43+45)+(15)(21)(42)+(23+25)\\
&\qquad (12)(42)\\
&\quad +(43+45)(24)(12)+(15)(23+25)(42)\\
&\quad +(15)(43+45)(21+24)+(23+25)(43+45)(12).
\end{aligned}
$$

在上述展开式中有19项，每一项与$G$的一个2-树$t(\{3,5\})$相对应。同样地，树和2-树的集合是以因子的形式出现的。

**6. 树的计算**

加以少量的修改，(1) 式的编码法可用来计算带标号的各类树的数目。换句话说，它还是一个带标号树的生成函数。

---

* 注意对于任意图$G$来说，推论3仍是成立的。对所讨论的情况我们有$(\{2,3,4\};1)=(\{1,3,4\};2)=(\{1,2,3\};4)$。

在(1) 式中，如果我们把$S_n$的每一个元素赋值为1，然后把它们当作实数看待，我们就得到一个带标号树的生成函数。公式化地令$(1;\ x)=x$，并如下地递归定义$(k;\ x)$：

$$(k;\ x)=x^k+\sum_{u=1}^{k-1}\binom{k}{u}(k-u;\ u)x^u$$

$k\geqslant 2$。此处$k$和$x$是正整数。

函数$(k;\ x)$是容易计算的，头6项给出如下：

$$(1;\ x)=x,$$
$$(2;\ x)=x^2+2x,$$
$$(3;\ x)=x^3+6x^2+9x,$$
$$(4;\ x)=x^4+12x^3+48x^2+64x,$$
$$(5;\ x)=x^5+20x^4+150x^3+500x^2+625x,$$
$$(6;\ x)=x^6+30x^5+360x^4+2160x^3+6480x^2+7776x.$$

令$i$是图$G$的一个节点。在$G$中$i$的度数用$d(i)$来表示，它是与节点$i$相关联的$G$的边数。所谓根树是指该树中的一个节点(即树根节点)，总要与其它节点有所区别。不失一般性地令$n$是这一根树的树根节点。如果$R_n(m)$表示具有$d(n)=m$的带标号树的数目，那么从第3节中给出的结论我们得到下列定理。

**定理3.** $R_n(m)$是生成函数$(n-1;\ x)$，$n\geqslant 2$最后展开式中$x^m$项的系数。

因为$R_n(m)$数已由Clarke导出[9]，我们有：

$$R_n(m)=\binom{n-2}{m-1}(n-1)^{n-m-1} \tag{7}$$

于是，$(n-1;x)$ 的系数也可利用二项式的展开式来得到，且由Bedrosian所列出[10]。

在$x=1$时，$(n-1;\ x)$表示$n$个节点标号树的总数。因为这个数是已知的，我们可得到：

$$(n-1;1)=\sum_{m=1}^{n-1}R_n(m)=n^{n-2}. \tag{8}$$

类似地，可以容易证明$n$个节点$k$-树的数目由 $(n-k;\ k)=kn^{n-k-1}$给出。其中，$k$个被标识的节点需出现在$k$个不同的连通片中。

作为一个例子，令$n=7$。那么，我们有$R_7(5)=30$和$R_7(2)=6480$以及

$$(6;1)=1+30+360+2160+6480+7776=7^5.$$

因此在7个标号节点上有$7^5$个树。其中有30个树在节点7上的度数为5，有6480个树在节点7上的度数为2。对于$k=3$的情况，我们有：

$$\begin{aligned}(4;3)&=3^4+12\cdot 3^3+48\cdot 3^2+64\cdot 3\\&=81+324+432+192\\&=1029=3\cdot 7^3.\end{aligned}$$

这意味着有1029个带标号的7个节点的3-树，其中3个被标识的节点需出现在3个不同的连通片中。

## 结　论

在本文中我们已经介绍了一个完备图的树及$k$-树的简单编码法。已经证明了它们可用来产生一个完备图或近乎完备图的树及$k$-树(无重复项或多余项)。这种编码法对于手算或自动计算都适合。加上少量修改，这一算法自然地导出了带标号的树及$k$-树的生成函数。

**附录**

定理1的证明概要

我们将对$G_n$的节点数，用归纳法来加以证明。对于$n=2$，可看出该定理成立。假设该定理对于任意$G_k$都成立，$k\geq 2$。即我们假设在$(S_{k-1}; k)$的最后展开式的每一项都对应$k$个节点的完备图$G_k$的树。我们将证明该定理对于$(k+1)$个节点的完备图$G_{k+1}$也成立。

令$G''_k$是由$G_k$加上了形如$(kj)_x$的并列边而得到的图，$j=1, 2, \cdots, k-1$以及$x=1, 2, \cdots, p$，其中$(kj)_x$表示连接节点$j$和$k$之间的一条边，$p$是一个已知的正整数。因为$G_k$的树对应于$(S_{k-1}; k)$中最后展开式中的一项，从(3)式我们有：

$$(S_{k-1}; k) = t_0 + \sum_{q=1}^{k-2} \sum_{(J_q)} H(J_q),$$

其中

$$H(J_q) = E_q\Big(\bar{J}_q; \sum_v j_v\Big),$$

$$t_0 = (k1)(k2)\cdots(k\ k-1),$$

$$E_q = (kj_1)(kj_2)\cdots(kj_q),$$

$$J_q = \{j_1, j_2, \cdots, j_q\},$$

$$\sum_v j_v = j_1 + j_2 + \cdots + j_q,$$

$J_q$是$S_{k-1}$的一个非空真子集，$\bar{J}_q$是在$S_{k-1}$中$J_q$的补，和式$\sum_{(J_q)}$是对在$S_{k-1}$中所有可能的$J_q$求取。

因为$\Big(\bar{J}_q; \sum_v j_v\Big)$中没有元素$k$，由此得出在$J_q \neq L_q$时，在$H(J_q)$中其最后展开式的各项不同于$H(L_q)$中的最后展开式的各项，此处$L_q$是$S_{k-1}$中的一个非空真子集。此外，在$H(J_q)$的最后展开式中的各项对应于$G_k$中的树，使得如果$t$是$H(J_q)$中的一项，则$t \cap t_0 = E_q$。不难看出，$E''_q\Big(\bar{J}_q; \sum_v j_v\Big)$的最后展开式中的各项是$G''_k$的树，此处$q \leq k-2$，且

$$E''_q = \prod_{v=1}^{q} [(kj_v)_1 + (kj_v)_2 + \cdots + (kj_v)_p],$$

类似地，$E''_0 = \prod_{u=1}^{k-1} [(ku)_1 + (ku)_2 + \cdots + (ku)_p]$的最后展开式中的各项是$G''_k$的树。因为$G''_k$中的每一个树是上述两种类型树中的一种，由此得出$G''_k$的树相应于展开式

$$E''_0 + \sum_{q=1}^{k-2} \sum_{(J_q)} E''_q\Big(\bar{J}_q; \sum_v j_v\Big) = \Big(S_{k-1}; \sum_y a_y\Big),$$

其中

$$\sum_y a_y = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

的最后展开式的各项。并且$(j_v a_y) = (a_y j_v) = (kj_v)_y$，$y=1, 2, \cdots, p$。换句话说，$(j_v a_y)$表示了在$G''_k$中在节点$j_v$与$k$之间第$y$条并列边。利用这些定义，上述结论可总结为：

**定理2.** 在$\Big(S_{k-1}; \sum_y a_y\Big)$的最后展开式中的每一项都对应于$G''_k$的树。

现在，我们利用这一结果来证明$(S_k; w)$是$G_{k+1}$的编码，$w=k+1$。

令

$$t_0^* = (w1)(w2)\cdots(wk),$$
$$F_q^* = (wi_1)(wi_2)\cdots(wi_q),$$
$$I_q = \{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_q\},$$

式中，$I_q$是$S_k$的一个非空真子集。在$G_{k+1}(E_q^*;\ t_0^* - E_q^*)$中令合并的节点用$\beta$表示（该节点是当$E_q^*$的所有边被短接而得到的节点）。因此，在连接节点$m_x$（$x=1,\ 2,\ \cdots,\ k-q$）与$\beta$之间有$q$条并列边。此处$\bar{I}_q = \{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{k-q}\}$是$S_k$中$I_q$之补。为了我们的目的，这些$q$条并列边将用$(m_x i_z)(z=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$来表示。根据归纳法的假设和引理2，$G_{k+1}(E_q^*; t_0^* - E_q^*)$中的树对应于$(\bar{I}_q;\ \sum_z i_z)$最后展开式中的各项．此处$\sum_z i_z = i_1 + i_2 + \cdots + i_q$，且$q<k$。因为在$G_{k+1}$（$E_q^*$；$t_0^* - E_q^*$）中的树$t'$与$G_{k+1}$中的树$t^*$是一一对应的，如果$t''$是相应于$G_{k+1}$中$t'$的子图的话，那么$t^* = E_q^* t''$。由此得到$G_{k+1}$的树可表示为下式

$$t_0^* + \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{(I_q)} E_q^* \left(\bar{I}_q;\ \sum_z i_z\right) = (S_k;\ w),$$

定理证毕。

## 参 考 文 献


〔1〕W. K. Chen, "Unified theory on the generation of trees of a graph. Part I. The Wang algebra formulation", *Int. J. Electronics*, Vol. 27, pp. 101—117, 1969.

〔2〕W. K. Chen, "Unified theory on the generation of trees of a graph. Part II. The matrix formulation", *Int. J. Electronics*, Vol. 27, pp. 319—336, 1969.

〔3〕G. W. Zobrist and G. V. Lago, "Method for obtaining the trees of a v vertex complete graph from the trees of a v-1 vertex complete graph", *Matrix Tensor Quart.*, Vol. 15, pp. 94—96, 1965.

〔4〕H. Hirayama, H. Watanabe and K. Harada, "Digital computer determination of trees in network topology", *Electronics and communications in Japan*, Vol. 46, pp. 9—18, 1963.

〔5〕J. P. Char, "Generation of trees, two-trees, and storage of master forests", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 228—238, 1968.

〔6〕S. Seshu and M. B. Reed, "Linear Graphs and Electrical Networks", Reading, Mass., Addison-Wesley, 1961.

〔7〕W. K. Chen, "Unified theory on topological analysis of linear systems", *Proc. IEE*(London), Vol. 114, pp. 1630—1636, 1967.

〔8〕W. K. Chen, "Applied Graph Theory", Amsterdam, North-Holland, 1971.

〔9〕I. E. Clarke, "On Cayley's formula for counting trees", *J. London Math. Soc.*, Vol. 33, pp. 471—473, 1958.

〔10〕S. D. Bedrosian, "Trees of a full graph as an occupancy problem", *IEEE Trans Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 290—291, 1964.

〔11〕W. K. Chen, "Unified theory on the generation of trees of a graph. Part III. Decomposition and elementary transformations", *Int. J. Electronics*, Vol. 31, 1971.

# 五、论同号行列式及其计算


## 摘　要

本文研究了两种同号行列式，它们把电网络理论与图论紧密地联系起来。证明了在同号行列式的最后展开式中的各正项都与一个图的某类子图相对应。还给出了计算同号行列式所有正项（无重复项）的方法。因此这种方法可用来无重复地产生一个图的某类子图。


**1. 引言**

在电网络的分析中，得到下列形式的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} & -a_{23} & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{mk} \end{bmatrix} \tag{1}$$

在其行列式$A$展开时所有项都为正值，对于这种行列式的计算，Sylvester曾称之为同号行列式（*unisignants*）[1,pp.762-764]。可以证明在该行列式中的最后展开式中的正项的最大项数是$(m+1)^{m-1}$。显然，利用常规的方法将这种行列式展开，由于沿主对角线元素的乘积是$m^m$，所以它是费时的，例如，对于一个全部元素都存在的三阶行列式来说，用常规的方法展开而得的项数在对消之前为38项，而彼此相消的将有22项。Sylvester[2]曾指出在对称同号行列式$A$的展开式中的各项可简单地表示为“树支乘积”。虽然Sylvester的工作与基尔霍夫[3]的工作是同时代的，但是他似乎未觉察到与电网络的联系。最近Chen[4]，[5]推广了Sylvester与基尔霍夫的工作，并且证明了在对称同号行列式的展开式中的各项可简单地表示为$A$的伴随有向图的“有向树支乘积”。当有向图呈对称时，它即简化为Sylvester与基尔霍夫的情况，

在电网络的频域分析中，网络行列式（同号行列式）的元素通常是复变量$s$的有理函数，即为两个$s$多项式之比。有时还有必须计算用文字而非用数字形式表示的符号网络函数。虽然同号行列式可以利用高斯消去法或主元凝聚法进行计算，但是这一过程是缓慢与复杂的。甚至如果得到了最后结果，依然还存在着大量相消项。拓扑公式为该问题提供了一种有效的解决办法。

电网络拓扑分析的中心问题是产生树与有向树的问题，亦即列出同号行列式中的各正项。为了产生树与有向树，已经提出了许多算法[5]～[24]，其中一些算法已在数字计算机上执行过[7]～[17]。

近年来已经出现了许多程序语言，它们涉及到符号的运算问题[25]～[28]。很明显，一些产生树的算法利用这些语言[5]、[20]是非常有效的，即它们能容易地编成程序与执行。

本文的目的在于证明两类同号行列式的展开式的各正项对应于一个图的某些子图。还给出了计算这些子图的方法。但是下面要叙述的第一种方法与无重复地产生树的方法[24]，[29]相似。

**2. 对应的关联矩阵**

对于一个同号行列式$A$来说，对应的关联矩阵$H$的定义如下：$H=[h_{ij}]$是$m\times n$阶矩阵，此处$m$是$A$的阶数，$n$是$A$中相异而非消失元素的数目。$H$的每一列对应于一个元素。如果$a_{ij}\neq 0$，$i\neq j$，则$h_{it}=1$与$h_{jt}=-1$，此处$t$对应于$a_{ij}$所在的列号；如果$a_{ij}\neq 0$，则$h_{it}=1$，此处$t$对应于$a_{ii}$所在的列号，$H$的其它所有元素则为零。

作为示例，研究下列同号行列式$A$：

$$A=\begin{bmatrix} a_{13}+a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{11}+a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & a_{32}+a_{33} \end{bmatrix}$$

对应的关联矩阵$H$给出为：

$$\begin{matrix} & a_{11} & a_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{33} & a_{32} \end{matrix}$$
$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**定理1.** (Talbot[30])。

$$A=H^{+}DH',$$

式中，$D$是一个$n\times n$阶对角线矩阵，第$t$个元素$d_{tt}$是$A$对应于$H$的第$t$列的非零元素；$H^{+}$是在$H$中用0代替$-1$而得到的矩阵；一撇表示矩阵的转置。*

利用常规的方法，借助比耐——柯西定理容易看出：在同号行列式$A$的展开式的正项与$H^{+}$及$H'$的主行列式之非消失项的乘积是一一对应的。因此，这一问题就简化为有效地列出$H^{+}$与$H'$的所有主子行列式的问题。

**3. 无重复地计算一个矩阵的主子矩阵。**

列出一个给定矩阵的所有主行列式的主要困难在于需要求得一种方法，它所需要进行运算的次数是随矩阵的阶数呈线性地而非呈指数型地增长，同时为了消去重复项而无需相对于先前所求出的主行列式来校验其每一个新的主行列式。因为枚举法是一个极费时间的过程。正如与一个网络相对应的（各阶）主行列式，譬如说一个20个节点与40条边的网络，主行列式的数目可达到上百万个。例如，MacWilliams [31] 列举了一个有11个节点与21条边的网络，它含有12490个树。

令$F$是一个任意的$m\times n$阶、秩为$m$的矩阵。此外我们用$F$的转置来代替$F$进行研究。一个子矩阵$F_s$，若它是$F$中的$m$阶非奇异子矩阵，则称为$F$的主子矩阵。换句话说，$F_s$的行列式是$F$的一个非零值的主行列式。

令$I_q=\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$，$J_q=\{j_1, j_2, \cdots, j_q\}$与$K_q=\{k_1, k_2, \cdots, k_q\}$是整数1，2，…，$n$集合的一个子集。符号$F(I_q, J_q)$用来表示相应于各行$i_1$，$i_2$，…，$i_q$与各列$j_1$，$j_2$，…，$j_q$的子矩阵。$F(I_m)$是由各行$i_1$，$i_2$，…，$i_m$所组成的子矩阵。$\bar{I}_m$是$I_m$的补，我们还将论及$F(\bar{I}_m)$。

为方便起见，我们把含有对角线主子矩阵的矩阵称为范式矩阵。在下面的讨论中，我们

* 这一定理是定理6的一个直接结果，事实上$H$的主子矩阵与$G(A)$中的树(不是有向树)是一一对应的。

假设所有给定的矩阵都是范式的。这一假设并非是一种严格的限制，正象可容易证明的，阶数为$m\times n$、秩为$m$的每一个矩阵$F$，所对应的一个范式矩阵，可从$F$仅利用下列行运算而得到：

(a) 将数乘某行而加到另一行上，

(b) 将各行进行置换。

于是从所得矩阵与$F$将产生相同的线性矢量空间，在最多数的行置换的情况下，它们与主子矩阵的集合相同。此外，它们的行列式相应的符号维持不变。

对于一个给定的范式矩阵来说，$F_d$用来表示$F$的对角线主子矩阵$F(K_m)$，即$F_d=F(\bar{K}_m)$。为方便起见，假设一个给定的矩阵$F$的各列用1到$n$的整数标记，即$F$的第$i$行用$K_m$中的$k_i$表示，$i=1,2,\cdots,m$。在本文中，术语矩阵意指是一个已用刚才所提出的规则而进行标记的矩阵，在括号中的所有整数采用自然序列。

事实上，范式矩阵的限制可以稍为放宽。如果$F$的一个主子矩阵$F_p$，使其每一列都严格地含有一个非零元素时，我们称矩阵$F$含有一个特有型（*proper form*）的子矩阵$F_p$，即可仅对$F_p$进行行置换而使其成为对角线形式。这意味着对于每一个$m\times n$阶（$m\leqslant n$）、秩为$m$的矩阵来说，对应着一个特有型矩阵，它可以仅仅利用初等运算（乘上某一行而加到另一行上）而得到。因而，$F$的主行列式的值与其对应的特有型矩阵$F_p$的主行列式的值是相同的。不难看出，如果"范式"矩阵用"特有型"矩阵来代替，又假定给定矩阵$F$的各行已作了适当的标记，则下列给出的结论均成立：若$F_p=F(K_m)$，如果在第$i$行上出现了第$k_i$列的非零元素，则$F$的第$i$行用$k_i$来标记。因为用这种方法加在一个所定义的矩阵上是无多大意义的，故对此无需再作更进一步的说明。

如果$I_q\subseteq K_m$，所谓$K_mJ_q/I_q$是指集合为$(K_m-I_q)\cup J_q$。例如，$(15628/16)=(258)$。注意在第二个括号中的整数采用自然序列。由此，得到当且仅当$F(I_q;J_q)$是$F_d$的一个非奇异子矩阵时，$F(K_mJ_q/I_q)$是$F$的一个主子矩阵而不是$F_d$的主子矩阵，此处$1\leqq q\leqq m$。因而下列定理是显然的。

**定理2.** 令$F$是一个$m\times n$阶（$m\leqslant n$）、秩为$m$的范式矩阵。那么$F$的所有主子矩阵的集合$M$由下式给出：

$$M=\bigcup_{q=0}^{r}\bigcup_{(I_q)}\bigcup_{(J_q)}F(K_mJ_q/I_q),$$

式中$F(I_q;\ J_q)$是$F_d$的一个非奇异子矩阵，$r$是$\bar{F}_d$的秩，且由定义$F(K_mJ_0/I_0)=F(K_m)$。

现在列出$F$的所有主子矩阵的问题简化为计算$F_d$中所有阶数为1，2，…，与$r$的非奇异子矩阵的问题。1阶非奇异子矩阵是非常容易求得的；它们就是$F_d$中的非零元素。对于2阶以上的非奇异子矩阵，整个过程必须重复求取。例如，研究子矩阵$F(I_q;\ J_{n-m})$，$2\leqq q\leqq r$，此处$K_m$与$J_{n-m}$是整数$1,2,\cdots,n$补下标的集合。首先将矩阵处理成范式，并利用定理2可以求得该矩阵的主子矩阵。如果要研究上述类型的所有$F_d$的子矩阵，那么所有这些主子矩阵的总数是$F_d$中所有$q$阶非奇异子矩阵的集合。注意，在上述各步的每一步中，相同的过程可以重复进行，直到所有非奇异的子矩阵可用观察法求取或求到1阶时为止。

从概念上讲，上述方法类似于无重复地生成树的方法〔24〕，〔29〕。但是这里所给出的创见则是采用了更为方便的形式。

**4.同号行列式的计算。**

无重复地计算一个给定矩阵的主子矩阵的方法可以推广到无重复地产生同号行列式的展开式之所有正项上。

令$W=[w_{ij}]$与$Z=[z_{ij}]$是两个$t\times u$阶。其元素值为整数1、$-1$及0的矩阵。$W$与$Z$之交，记作$W\cap Z$。它为一个$t\times u$阶矩阵且使得$W\cap Z$的第$ij$个元素等于$w_{ij}z_{ij}$。

下列定理是定理1的直接结果。

**定理3.** 令$H$是给定同号行列式$A$的关联矩阵。还令$H_n$与$H_n^+$分别是矩阵$H$与$H^+$用范式表示，使得它们所确定的主子矩阵是相等的（如有必要，利用行交换或用$-1$乘上各行）。那么除了对应于确定的主子矩阵$H_n(\overline{K}_m)$（或$H_n^+(\overline{K}_m)$）之外，在$H_n(\overline{K}_m)$与$H_n^+(\overline{K}_m)$中相异的非奇异矩阵$H_n(I_q;J_q)$和$H_n^+(I_q;J_q)$是与$A$的展开式中之正项相一一对应，此处$m$是$A$的阶数，$q=1,2,\cdots,h$。$h=min\{$为$H_n(\overline{K}_m)$或$H_n^+(\overline{K}_m)$之秩$\}$。

**推论1.** 对应于$H$与$H^+$的主子矩阵的集合$M$由下式给出：

$$M=\bigcup_{q=0}^{h}\bigcup_{(I_q)}\bigcup_{(J_q)}H(K_mJ_q/I_q),^{*}$$

式中，$H(K_mJ_0/I_0)=H(K_m)$。

**推论2.** 与$H_n(K_m)$或$H_n^+(K_m)$有1列不同的主子矩阵的集合$M_1$由下式给出：

$$M_1=\{H(K_mJ_1/I_1)\},$$

此处$F(J_1;I_1)$是在$F(\overline{K}_m)$以及$F=H_n\cap H_n^+$中的1阶非奇异子矩阵。

应该注意1阶非奇异子矩阵是非常容易求出的；它们就是$F(\overline{K}_m)$中的非零元素。对于推论1中的2阶以上的非奇异子矩阵，整个过程是重复的。于是它等效于重复把矩阵处理成范式。因为$H$的元素是整数1，$-1$与0，$H$的每一列至多包含1与$-1$，使这种矩阵范式化通常是简单的。实现范式化的方法是对矩阵的各行与各列进行标准化的"扫描输出"过程〔32〕。

**推论3.** $A$的展开式之正项由下式给出：

$$\sum a(t_1)a(t_2)\cdots a(t_m),$$

此处$a(t_i)$是$A$中相应于$t_i$列的元素，$i=1,2,\cdots,m$；$t_1,t_2,\cdots,t_m$是相应于$H$与$H^+$的主子矩阵的各列；和式是对所有这种主子矩阵求取。

例1. 研究同号行列式$A$，其对应的关联矩阵已在§2中给出：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{13} & a_{21} & a_{23} & a_{33} & a_{32} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ H_n=\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{array}$$

---

* 如果我们定义两个主子矩阵，当且仅当它们仅有一列不同时则称为邻接的，那么可以证明〔33〕在推论1（至少含有三个元素）中集合M的元素可以用这种方法来排列，使得在排列中的相邻元素成为邻接主子矩阵。此外，在M中的任意两个邻接主子矩阵可以是一种排列方式中的相邻元素。注意在一种排列方式中的第一个和最后一个元素是作为此种排列方式中的相邻元素。不难看出，一般说来任意一个矩阵（至少含有3个主子矩阵）的主子矩阵集合可以用类似的样子来排列。显然，这一排列次序的条件对于一个方阵的集合是一个矩阵的主子矩阵是不充分的。因此，对于一个方阵的集合是一个矩阵的主子矩阵的充要条件是什么？这一结果在网络综合有重要意义。但是，该问题尚未解决。

$$
H_n^+ = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array},
$$

$H_n(K_m) = H_n^+(K_m) = H_n(145) = H_n^+(145)$，以及

$$
F(\overline{145}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array},
$$

式中

$$
F = H_n \cap H_n^+ = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.
$$

注意，$H$与$H^+$已成为范式，对此情况$F = H_n^+$。于是利用推论2，所有与$H_n(145)$有一列不同的相异主子矩阵的集合$M_1$由下式给出：

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{H_n(145\ 2/1), H_n(145\ 3/4), H_n(145\ 6/5)\} \\
&= \{H_n(245), H_n(135), H_n(146)\}.
\end{aligned}
$$

与$H_n(145)$有2列及3列不同的相异主子矩阵的集合$M_2$和$M_3$，可分别考虑在$H_n(\overline{145})$与$H_n^+(\overline{145})$中相应的2阶与3阶非奇异子矩阵而得到。为方便起见，令$H^{(ij)}$用来表示在$H_n(\overline{145})$中第$i$个$j\times 3$阶子矩阵。这对$H^{+(ij)}$也类似适用。因此，可以得到下列各对矩阵：

$$
H^{(12)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \text{与} \quad
H^{+(12)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array};
$$

$$
H^{(22)} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{与} \quad
H^{+(22)} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right];
$$

$$
H^{(32)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{与} \quad
H^{+(32)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right];
$$

以及

$$
H^{(13)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{与} \quad
H^{+(13)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].
$$

现在已把问题简化为求取所有相应的$H^{(ij)}$与$H^{+(ij)}$的矩阵对中的主子矩阵。我们首先研究$H^{(12)}$与$H^{+(12)}$这两个矩阵。首先仅利用前面定义过的行运算，将其处理成范式，其结果由下式给出：

$$
H_n^{(12)} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \text{与} \quad
H_n^{+(12)} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.
$$

因为

$$H_n^{(12)}\cap H_n^{+(12)}=\begin{matrix} & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0\end{matrix},$$

由此得到$M^{(12)}=\{H^{(12)}(23;23)\}=\{H_n(14;23)\}$。类似地，$M^{(22)}$、$M^{(32)}$ 与 $M^{(13)}$可得到如下：

$$M^{(22)}=\{H^{(22)}(36;36)\}=\{H_n(45;36)\},$$
$$M^{(32)}=\{H^{(32)}(26;26)\}=\{H_n(15;26)\},$$
$$M^{(13)}=\{\varnothing\},$$

式中$M^{(ij)}$表示在一对矩阵$H^{(ij)}$与$H^{+(ij)}$ 中相应的主子矩阵的集合。因而，集合$M_2$与$M_3$得到如下：

$$M_2=\{H_n(145\ 23/14),H_n(145\ 36/45),H_n(145\ 26/15)\}$$
$$=\{H_n(235),H_n(136),H_n(246)\},$$
$$M_3=\{\varnothing\}.$$

那么所有可能的$H$与$H^+$ 的相异主子矩阵可取集合 $M_i(i=0,1,2$ 与 $3)$ 之并而得到，其中$M_0=\{H_n(145)\}$，即

$$M=\{H(145),H(245),H(135),H(146),H(235),H(136),H(246)\}.$$

再利用推论3，同号行列式$A$的展开式由下式给出：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{33}+a_{11}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{21}a_{32}$$
$$+a_{13}a_{22}a_{32},$$

式中 $a(1)=a_{11},a(2)=a_{13},a(3)=a_{21},a(4)=a_{22},a(5)=a_{33}$以及$a(6)=a_{32}$。

**5.伴随有向图**

对于一个给定的同号行列式 $A$，我们可将其与一个有向图 $G(A)$相对应。其对应的过程如下：

(*i*) $G$具有$m+1$个节点。每个节点用 1 到$m+1$的整数来标记，使得标为 $k$ 的节点与$A$的第$k$行（或列）相对应，此处$A$已在§1中作了定义。

(*ii*) 若$a_{ij}\neq 0,i\neq j$,在$G(A)$ 中从节点 $i$ 到节点 $j$ 有一条权为$a_{ij}$的边。

(*iii*) 若$a_{ij}\neq 0,i=j$,在$G(A)$ 中从节点 $i$ 到节点$m+1$有一条权为$a_{ij}$的边。

现在很明显，$A$的关联矩阵实际上是移去$G$的对应于节点$m+1$的一行的关联矩阵。在[4]中已经证明，$detA$展开式中的各正项是与$G(A)$ 的有向树是一一对应的，则该图的有向树可用§4的方法来计算。

**6. 另一种类型的同号行列式。**

另一类同号行列式形式如下：

$$B=\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{m} b_{1k} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \sum_{k=1}^{m} b_{2k} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} b_{mk}\end{vmatrix}, \qquad (2)$$

再次地，将一个有向图记作 $G(B)$，可以与同号行列式 $B$ 相对应。其对应的过程与§5给出的相类似，只不过在 $i\neq j$ 时，从节点 $i$ 到节点 $j$ 相对应的权是 $b_{ij}$。下面，我们将证明，在同号行列式 $B$ 的展开式中的所有正项是与 $G(B)$ 中的某类子图一一对应的。但是，在我们叙述这一结果之前，需要下几个定义。

一个有向图 $G$ 是由集合 $V$ 与集合 $E$ 所组成，$V$ 中的元素称为节点，$E$ 中的元素是形如 $(i,j)$ 的有向节偶并称为边，此处 $i$ 与 $j$ 在 $V$ 中；节点 $i$ 称为起始节点，节点 $j$ 称为终止节点。对于 $V$ 中的任意一个节点 $i$，符号 $\rho(i)$ 与 $\rho^*(i)$ 分别表示 $G$ 中以节点 $i$ 作为起始节点与终止节点的边的集合。如果 $S$ 是 $G$ 的一个子图，且 $G$ 的每一个节点是 $S$ 的一个节点，则 $S$ 是 $G$ 的一个生成子图。如果 $\rho(i)=\rho^*(i)=k$，此处每一个 $i$ 均在 $V$ 中，则该有向图称为度数为 $k$ 的规则有向图。$G$ 的1-因子[35]是 $G$ 的一个生成子图，它是度数为1的规则图。更直观地讲，1-因子是包含 $G$ 之所有节点的、互不相重的有向回路之集合。$G$ 的一个生成子图，记作 $w_n$，当且仅当对于 $(V-n)$ 中的每一个节点 $i$，$\rho(i)=1$ 与 $\rho(n)=0$，则称其为以节点 $n$ 为参考点的广义有向树，此处 $(V-n)$ 是从 $V$ 中删去节点 $n$ 后的节点集合。显见，$w_n$ 无需是连通的，它可以由许多连通片组成。在不重要的情况下，一个连通片可以只有一个孤立节点所构成。显然，一个以节点 $n$ 为参考点的连通广义有向树简化为以节点 $n$ 为参考点的有向树[5]。如果一个广义有向树所含有的有向回路为奇数条边时，即每一个有向回路含有奇数条边时，称其为奇广义有向树，为方便起见，$f(S)$ 表示 $G$ 的子图 $S$ 的各条边相对应的权之乘积。其它所采用而未特别说明的定义可在 Chen 的论文[5]中找到。

**定理4.**

$$B=\sum_{w_{m+1}}2^{v}f(w_{m-1}),$$

式中，$w_{m+1}$ 是以节点 $m+1$ 为参考点的有向树或是具有相同参考点的广义有向树；$v$ 是 $w_{m+1}$ 中的有向回路数目；和式是对 $G(B)$ 中所有的 $w_{m+1}$ 求取。

上述定理的证明概要在附录中给出。因为没有有向回路的广义有向树也是一个有向树，现在可以叙述一个如下的推论。

**推论4.**

$$B=\sum_{t_{m+1}}f(t_{m+1})+\sum_{(w,v)}2^{v}f(w^{(v)}_{m+1}),$$

式中 $t_{m+1}$ 是在 $G(B)$ 中以节点 $m+1$ 为参考点的有向树，$w^{(v)}_{m+1}$ 是以节点 $m+1$ 为参考点、具有 $v$ 个有向回路的奇广义有向树；和式 $\sum_{t_{m+1}}$ 与 $\sum_{(w,v)}$ 是分别对 $G(B)$ 中所有可能的 $t_{m+1}$ 与 $w^{(v)}_{m+1}$ 求取。

我们用下列例子来说明这一点。

例2.试求同号行列式之展开式中的全部正项。

$$B=\begin{vmatrix} b_{11}+b_{12}+b_{14} & b_{12} & 0 & b_{14}\\ b_{21} & b_{21}+b_{23}+b_{24} & b_{23} & b_{24}\\ 0 & b_{32} & b_{32}+b_{33} & 0\\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{42}+b_{43}+b_{44}\end{vmatrix}$$

$B$ 的伴随有向图 $G(B)$ 示于图1。$G(B)$ 的有向树 $t_{m+1}$ 的集合 $T_{m+1}$ 得出如下：

$$f(T_{m+1})=\{b_{14}b_{24}b_{32}b_{44},b_{14}b_{24}b_{32}b_{43},b_{14}b_{24}b_{33}b_{44},b_{11}b_{24}b_{33}b_{43},$$
$$b_{11}b_{24}b_{33}b_{44},b_{11}b_{24}b_{32}b_{44},b_{11}b_{23}b_{33}b_{43},b_{11}b_{23}b_{33}b_{44},$$

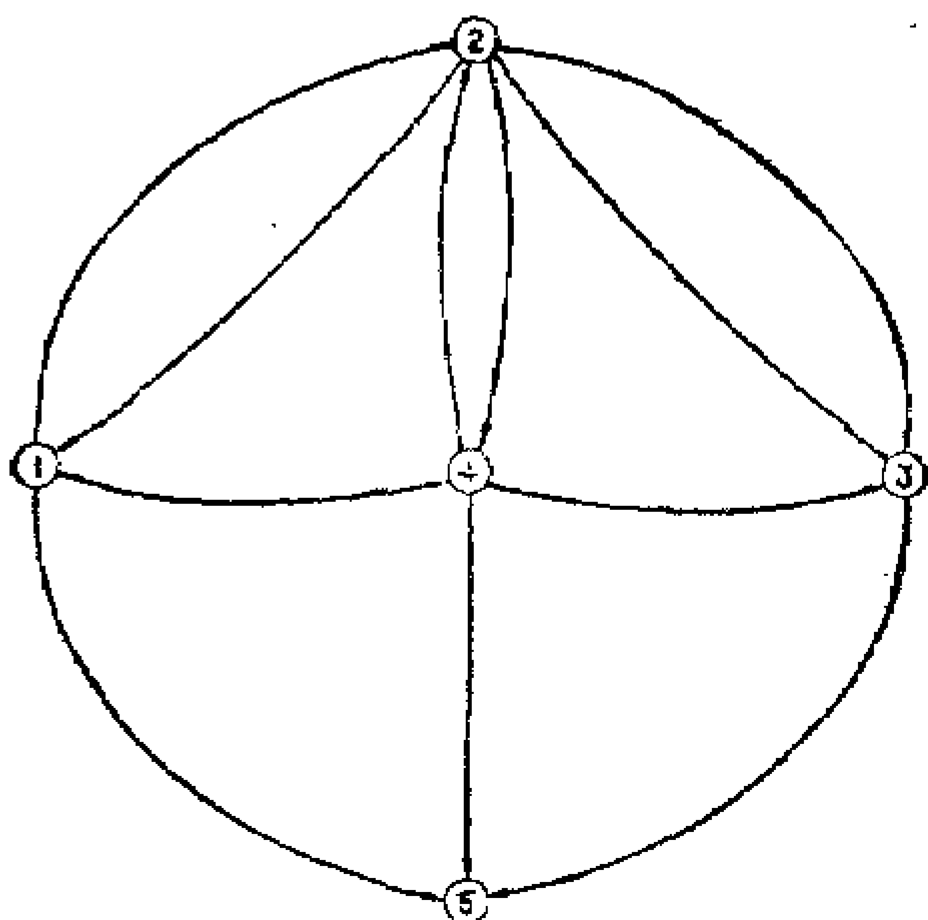



图1 B的伴随有向图G(B)

$$b_{11}b_{21}b_{33}b_{42},b_{11}b_{21}b_{33}b_{43},b_{11}b_{21}b_{33}b_{44},b_{11}b_{21}b_{32}b_{42},$$
$$b_{11}b_{21}b_{32}b_{43},b_{11}b_{21}b_{32}b_{44},b_{12}b_{24}b_{33}b_{43},b_{12}b_{24}b_{33}b_{44},$$
$$b_{12}b_{24}b_{32}b_{44},b_{12}b_{23}b_{33}b_{42},b_{12}b_{23}b_{33}b_{43},b_{12}b_{23}b_{33}b_{44},$$
$$b_{14}b_{23}b_{33}b_{42},b_{14}b_{23}b_{33}b_{43},b_{14}b_{23}b_{33}b_{44},b_{14}b_{21}b_{33}b_{43},$$
$$b_{14}b_{21}b_{33}b_{44},b_{14}b_{21}b_{32}b_{44},b_{11}b_{23}b_{33}b_{42}\}.$$

式中$f(T_{m+1})=\{f(t_{m+1})\}$与$T_{m+1}=\{t_{m+1}\}$。类似地以节点 $m+1$ 为参考点的奇广义有向树的集合$W_{m+1}$由下式给出：

$$f(W_{m+1})=\{b_{32}b_{43}b_{24}b_{11},b_{32}b_{43}b_{24}b_{12},b_{32}b_{43}b_{24}b_{14},b_{21}b_{14}b_{42}b_{32},$$
$$b_{21}b_{14}b_{42}b_{33}\}.$$

利用推论4，同号行列式$B$的展开式中的正项由下式给出：

$$B=\sum f(T_{m+1})+2\sum f(W_{m+1}),$$

式中和式是分别对$f(T_{m+1})$与$f(W_{m+1})$中所有可能的项求取。

值得注意，用常规的展开方法所得的总项数在未相消之前为81项，其中44项彼此抵消，且10项合并。剩下的37项与$G(B)$中的有向树及奇广义有向树一一对应。

**推论5.** 如(2)式所示的同号行列式之展开式的最大正项的数目为$(2m-1)\cdot(m-1)^{m-1}$，此处$m$是同号行列式的阶数。

证明：令$B$是一个$m$阶，所有元素都存在的，且使其每个元数的值为1的同号行列式。显然，$B$的所有非对角线元素为1，而对角线元素为$m$，$B$的伴随有向图$G(B)$是一个有向图，它具有$m$阶同号行列式之对应有向图中最大可能的边数。因为$G(B)$中与每一条边相对应的权为1，由此得到$f(w_{m+1})=1$，此处$w_{m+1}$是$G(B)$中的广义有向树。换句话说，$B$的数值表示了如(2)式所示类型的$m$阶同号行列式之展开式的最大正项。为了得到$B$的值，只需把$B$的第一列的负值加到以后的各列上，然后把所有的新行都加到第一行上，于是行列式成为三角形，容易得出其值为$(2m-1)\cdot(m-1)^{m-1}$。推论证毕。

**推论6.** 对于一个$n$个节点的有向图，其有向树与奇广义有向树的最大数目为$(2n-3)\cdot(n-2)^{n-2}$。

**定理5.** 对于一个给定的有向图$G$，集合$S_k$的笛卡儿乘积即产生了相应于参考点$t$的广义有向树的集合，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1,\ t+1,\ \cdots,\ n$，此处$S_k$是$G$中以$k$为起始节点的边之集合，$n$是$G$中的节点数。

换句话说，一个同号行列式的所有信息包含在主对角线元素的集合中。显然，笛卡儿乘积的最大项数为$(n-1)^{n-1}$，此处有向树的最大数目是$(n-1)^{n-2}$。

**定理6.** 令$H$是$G(B)$的关联矩阵中删去对应于节点$m+1$行的矩阵，此处$G(B)$是$m$阶同号行列式的对应有向图。当且仅当对应于$H^+$中的各列$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m$的子图是一个广义有向树时，则$H^+(i_1i_2\cdots i_m)$是$H^+$的一个主子矩阵。

对于一个给定的方阵来说，若该矩阵与其行列式存在，还采用一个较少见的量，即矩阵的积和式(permanent)。积和式与行列式的定义相同，但所有项均取正号。

前面，我们分别定义过(1)型与(2)型的$A$与$B$之同号行列式的对应有向图$G(A)$与$G(B)$。反之，我们分别定义$m+1$个节点之加权有向图，且与(1)型及(2)型相对应的同号行列式，并记作$A(G)$与$B(G)$。对于一个给定的有向图(加权的或未加权的)，令$G''$是从$G$，又令$f((i,j))=1$而得到的有向图，此处所有的$(i,\ j)$均在$G$中。

**定理7.** 对于一个有向图$G$，以节点$m+1$为参考点的有向树之数目等于$A(G'')$的值。从节点$m-1$为参考点的奇广义有向树的数目至多为$\frac{1}{2}[B(G'')-A(G'')]$。在$A$与$B$的同号行列式的展开式中的总数分别是$A(G''_A)$与$B(G''_B)$的积和式。此处$G_A=G(A)$与$G_B=G(B)$。在$A$与$B$的展开式中相互抵消的项数分别是$[A(G''_A)$的积和式$-A(G''_A)]$与$[B(G''_B)$的积和式$-B(G''_B)]$。

因为同号行列式的特殊形式。上述类型的行列式是不难计算的。作为一个示例，研究例2中给出的同号行列式$B$及其示于图1的对应有向图$G(B)(=G_E)$。下列值可以求得：

$B(G''_B)$的积和式$=81$；$B(G''_B)=37$；以及$A(G''_B)=27$，因此，相对于节点$m+1$，在$G(B)$中的有向树有27个。在$B$的展开式中总数为81项。其中44项$(=81-37)$相互抵消。相对于参考点$m+1$的奇广义有向树至多为$5\left(=\frac{1}{2}(37-27)\right)$事实上，$G(B)$中确有5个这样的树。

## 结　　论

已经证明在(1)式所示的同号行列式的最后展开式的正项可从关联矩阵无重复地生成。这种方法适合于数字计算机，且容易记忆、运算简单。因为此类同号行列式把电网络理论与图论紧密地相结合，所以这种方法可用来无重复地计算与生成一个图的某种类型的子图（如树，有向树等等）

文中还证明在(2)式所示的同号行列式的展开式的正项对应其相应有向图中某类“广义有向树”之乘积。还给出了一种列出所有可能的广义有向树的简单方法。但是有效地计算所有项，其中每一项至少含有一个偶有向回路的问题尚未解决。

**附录、定理4的证明概要**

为了简化证明，新的有向图$G'$是由(2)式且如下地构成：

*(i)* $G'$具有$m$个节点，除了没有参考点之外，标号的过程与§5相同。

(ii) 如果$b_{ij} \neq 0$，$i \neq j$，从节点$i$到节点$j$有一条权为$b_{ij}$的边，即$f((i, j)) = b_{ij}$，$i$，$j = 1, 2, \cdots, m$。

(iii) 如果$b_{ik} \neq 0$，$k = 1, 2, \cdots, m$，则在节点$i$处有一个权为$b_{ik}$的自环，并记作$(i, i)_k$，即

$$f((i, i)_k) = b_{ik}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

显然，$G'$在单节点处有$m$个自环。已经证明〔36〕，〔37〕

$$B = \sum (-1)^{t_h} f(h),$$

因为一个行列式的值与其转置行列式的值是相等的，此处$h$是$G'$中的1－因子，$t_h$是$h$中的偶连通片的数目，和式是对$G'$中所有的$h$求取。

为方便起见，如果仅包含自环的形式

$$(i_1, i_1)_{k1}(i_2, i_2)_{k2} \cdots (i_j, i_j)_{k_l}$$

使得存在一个$k$的子下标的集合$k_{t_1} k_{t_2} \cdots k_{t_v}$，$v \geqq 2$，以及存在一个对应的$i$的子下标的集合$i_{t_1} i_{t_2} \cdots i_{t_v}$且$i_{t_u+1} = k_{t_u}$，$u = 1, 2, \cdots, v-1$，$i_{t_1} = k_{t_v}$，此处$v$是一个适当的正整数。如果上述类型的子下标$t_v$是奇整数，则循环1－因子是奇的。否则，它是一个偶的循环1－因子。换句话说，如果至少含有一个上述类型的偶数子下标$t_v$时，则该循环1－因子称为偶的，若其它子下标存在，则可能是偶的或奇的。类似地，如果含有的有向回路是奇数长度（即为有向回路的边数）时，1－因子是奇的；如果至少含有一个偶数长度的有向回路时，1－因子是偶的，利用这些定义，现在可以叙述下列引理。

**引理1.** 令$C_1$是$G'$之1－因子的集合，使得$C_1$中的每一个$h$，它或是一个偶的循环1－因子，或者是一个至少包含有一个有向回路（长度$\geqslant 2$）的偶1－因子。则

$$\sum f(h) = 0,$$

此处$h$在$C_1$中，和式是对$C_1$中所有的$h$求取。

上述引理可用〔36〕中的引理2与3完全相似的方法加以证明。

**引理2.** 令$C_2$是$G'$中1－因子的集合，对于$C_2$中的每一个$h$，它或者是一个奇的循环1－因子或者是一个至少含有一个有向回路（长度$\geqslant 2$）的1－因子。还令$C_3$是$C_2$的子集，使得

$$h_i = (j_1, j_1)_{k1} \cdots (j_t, j_t)_{kt} P^1 P^2 \cdots P^v$$

在$C_3$中，此处$Pq$是长度$\geqslant 2$的、互不相接的有向回路，$q = 1, \cdots, v$，以及$v$，$t$与$i$是适当的正整数；则在$C_2$中不存在具有下列性质的$h_i'$：

$$h_i' = (j_1, j_1)_{k_1} \cdots (j_{t'}, j_{t'})_{k_{t'}} P^1 P^2 \cdots P^{v+v'},$$

$v' \geqslant 1$，$t' \leqslant t-3$，此处$v'$与$t'$是某个正整数。那么

$$\sum_{h在C_2中} f(h) = \sum_{h_i在C_3中} 2^v f(h_i),$$

此处$v$是在$h_i$中长度$\geqslant 2$的有向回路的数目。

证明：对于在$G'$中的每一条边$(i, j)$，$i \neq j$，在$G'$中还存在着一个唯一相应的自环$(i, i)_j$。如果$\bar{P}$是一个从$P$将其各条边用唯一相应的自环来代替而得到的有向图，那么在$C_2$中的元素总可分为子集的集合$S$，使得在$S$中的每一个$S_i$，$S_i = \{h_i^k | h_i^k$在$C_2$中；

$$h_i^k = (j_1, j_1)_{k1} \cdots (j_t, j_t)_{kt} \bar{P}^{i_1} \bar{P}^{i_2} \cdots \bar{P}^{i_x} P^{j_1} P^{j_2} \cdots P^{j_{v-x}},$$

此处$i_1, i_2, \cdots, i_x$与$j_1, j_2, \cdots, j_{v-x}$是$h_i$中的整数$1, 2, \cdots, v$的补下标；$h_i$在$C_3$中；同时其它所有符号与$h_i$的定义相同$\}$。

因为在$C_2$中所有的1－因子是相异的，由此得到$S_i \cap S_j = \phi$，$i \neq j$。

容易看出在$S_i$中有$2^v$个元素，其中每一个具有相同的权乘积，故得到引理。

**引理3.** 如果$C$是$G'$中所有1－因子的集合，$W$是相对于节点 $m+1$的所有有向树及所有广义有向树的集合，那么在集合 $C^*$中的元素与$W$中的元素之间存在着一一对应的关系。此处$C^*=(C-C_1-C_2)\cup C_3$。而且，在$C^*$中与$W$中的对应元素的权乘积是相等的，若$c^*\in C^*$与$w\in W$是相对应的元素，则

$$f(c^*)=f(w).$$

**证明：** 如果在$G'$中的每一条边$(i,\ i)_j$与$G(B)$中的一条边$(i,\ j)$相对应，$i\neq j$，$G'$中的一个自环$(i,\ i)_j$与$G(B)$中的$(i,\ m+1)$相对应，$i=j$以及$G'$中的一条边$(i,\ j)$与$G(B)$中的$(i,\ j)$相对应，$i\neq j$，则立即得出引理。

证明定理的其余部分现在可以如下地完成：

$$\begin{aligned}
B&=\sum_{h\in C}(-1)^{t_h}f(h)\\
&=\sum_{h\in C-C_1-C_2}f(h)+\sum_{h\in C_3}2^v f(h)\\
&=\sum_{w_{m+1}\in W_2}f(w_{m+1})+\sum_{w_{m+1}\in W_1}2^v f(w_{m+1})\\
&=\sum_{w_{m+1}\in W}2^v f(w_{m+1}),
\end{aligned}$$

此处$W_1$是$W$的一个子集，其中每一个是$G(B)$中的一个有向树，$W_2=W-W_1$。定理证毕。

## 参 考 文 献


[1] T. MUIR, A *Treatise on the Theory of Determinants* Dover, New York, 1960.

[2] ——, *The Theory of Determinants*, Dover, New York, 1960.

[3] G. KIRCHHOFF, *Übei die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, Poggendorf Ann. Physik, 72 (1847), pp. 497-508.

[4] W.-K. CHEN, *Topological analysis for active networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-12 (1965), pp. 85-91.

[5] ——, *on directed trees and directed k-trees of a digraph and their generation*, this Journal, 14 (1966), pp. 550—560.

[6] W. MAYEDA AND S. SESHU, *Generation of trees without duplications*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-12 (1965), pp. 181-185.

[7] H. HIRAYAMA, H. WATANABE AND K. HARADA, *Digital computer determination of trees in network topology*, Electronics and Communications in Japan, 46(1963), pp. 9-18.

[8] H. PACHON, *D. C. automatic electric network analysis*, 1620 Users'Group Meeting, Miami, 1965.

[9] A. H. EL-ABIAD, *Digital computer analysis of large linear systems*, Proc. 1st Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, Urbana, 1963, pp. 205-220.

[10] R. C. AMARA, *Computer design and cofntrol of probabiprlistic communication natworks*, IRE Trans. Comm. Systems, CS-11(1963), pp. 30-35.

[11] D. CHAI AND J. DIGUISEPPE, *A study of system design considerations in computers for symbol manipulation*, Rep. 05635-1-F, University of Michigan, Ann Arbor, 1965.

[12] W. H. KIM, D. H. YOUNGER, C. V. FREIMAN AND W. MAYEDA, *On iterative factorization in network analysis by digital computer*, Proc. Eastern Joint Computer Conference, New York, 1960, pp. 241-253.

[13] H. WATANABE, *A computational mathod for network topology*, IRE Trans. Circuit Theory,

CT-7 (1960), pp. 296-302.
[14] W. Mayeda, *Digital determination of topological quantities and network functions*, Interim Tech. Rep. 6, Electrical Engineering Research Lab., Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, 1957.
[15] W. Mayeda and M. E. Van Valkenburg, *Network analysis and synthesis by digital computer*, IRE Wescon Conv. Record, Part 2, 1957, pp. 137-144.
[16] H. Hirayama and T. Ohtsuki, *Topological network analysis by digital computer*, Electronics and Communications in Japan, 48(1965), pp. 52-61.
[17] W. Mayeda, *Digital computer program for general network analysis*, Tech. Rep., Circuit Theory Group, Electrical Engineering Research Lab., Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, 1958.
[18] H. M. Trent, *Note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 40(1954), pp. 1004-1007.
[19] S. L. Hakimi, *On trees of a graph and their generation*, J. Franklin Inst., 272(1961), pp. 347-359.
[20] S. L. Hakimi and D. G. Green, *Generation and realization of trees and k-trees*, IEEE *Trans. Circuit Theory*, CT-11(1964), pp. 247-255.
[21] W. Mayeda, *Reducing computation time in the analysis of networks by digital computer*, IRE Trans. Circuit Theory, CT-6(1959), pp. 136-137 and p. 394.
[22] S. K. Mark and W.-K. Chen, *On the generation of trees, cotrees, k-trees, and kcotrees*, Proc. 1st Asilomar Conf. on Circuits and Systems, Pacific Grove, California, 1967, pp. 659-668.
[23] A. J. Paul, Jr., *Generation of directed trees and 2-trees without duplication*, IEEE Trans. *Circuit Theory*, CT-14(1967), pp. 354-356.
[24] W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen and N. Deo, *Generation of complete trees*, Ibid., to appear.
[25] D. J. Farber, R. E. Griswold and I. P. Polonsky, *SNOBOL, a string manipulation language*, J. Assoc. Comput. Mach., 11(1964), pp. 21-30.
[26] V. H. Yngve, *COMIT Programmer's Reference Manual*, MIT Press, Cambridge, 1961.
[27] W. S. Brown, *The ALPAK system for nonnumerical algebra on a digital computer—I: Polynomials in several variables and truncated power series with polynomial coefficients*, Bell System Tech. J., 42(1963), pp. 2081-2120.
[28] J. McCarthy, P. W. Abrahams, D. J. Edwards, T. P. Hart and M. I. Levin, *LISP 1.5 Programmer's Manual*, MIT Press, Cambridge, 1961.
[29] W.-K. Chen, *On the generation of non-singular submatrices and their corresponding subgraphs*, Proc. 4th Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, Urbana, 1966, pp. 207-217.
[30] A. Talbot, *Topological analysis for active networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-13 (1966), pp. 111-112.
[31] F. J. MacWilliams, *Topological network analysis as a computer program*, IRE Trans. Circuit Theory, CT-5(1959), pp. 135-136.
[32] F. E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra*, Macmillan, New York, 1958.
[33] W. K. Chen, *Hamilton circuits in directed-tree graphs*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-14(1967), pp. 231-233.
[34] O. Ore, *Theory of Graphs*, Colloquium Publications, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, 1962.
[35] W. T. Tutte, *The 1-factors of oriented graphs*, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), pp. 922-931.
[36] W.-K. Chen, *On the modifications of flow graphs*, this Journal, 13(1965), pp. 493-505.
[37] ——, *The inversion of matrices by flow graphs*, this Journal, 12(1964), pp. 676-685.

# 六、论实数域中图的关联矩阵的非奇异子矩阵


## 摘　　要

本文证明了在实数域中的完备关联矩阵和降阶关联矩阵的最高阶非奇异矩阵，分别地一一对应于该图的奇广义回路与奇广义$k$-树．也证明了在一个同号行列式及其余子式的最后展开式中的正项对应于这一类子图．因此，得到了一种列举同号行列式及其余子式的全部正项（无重复项）的方法，还将此项研究推广到有向图中，同时给出了示例．


**1. 引言**

在图论中大家知道，一个图在模2域中的关联矩阵的最高阶非奇异子矩阵与该图的树之间存在着一一对应的关系[1]．因为一个在模2域中的奇异矩阵不可能在实数域中还是奇异的，所以在实数域中图的关联矩阵的非奇异子矩阵与该图的某类子图之间建立一种紧密关系是很有意义的．本文的目的是研究这些关系，并将证明这些关系可用来计算[2]中所定义的某类同号行列式．

**2. 在实数域中一个图的关联矩阵的非奇异子矩阵**

初步研究

在本节中，我们仅研究有限无向图或简单图．一个图G是由节点集合$V$与表示无序节偶$(v_i, v_j)$的边集合E所构成，其中$v_i$，$v_j$在$V$中．如果G具有$m$个节点与$e$条边，那么G的零度定义为$e-m+c$，式中$c$是连通片的数目．G中节点$v_i$的度数$d(v_i)$是与该节点相关联的边数．如果一个回路含有$k$条边，则称该回路的长度为$k$．长度为1的回路称为自环．用$H$(G)表示$G$的完备关联矩阵，它是一个$m$行、$e$列的矩阵，如果$v_i$与第$j$列所对应的边相关联，则$h_{ij}=1$，否则$h_{ij}=0$，此处$H(G)=[h_{ij}]$．

为方便起见，我们假设图不含有任何自环与并列边．以后，我们再把这些结果推广到有自环及有并列边的情况．其它一些未特别说明的术语和定义可在Shesu与Reed的著作[1]中查到．

**$H$($G$)的非奇异子矩阵与广义回路**

设图有$m$个节点及$e$条边，我们将确定图$G$在实数域中的完备关联矩阵$H(G)$的$m$阶非奇异子矩阵与图$G$的某类子图间的关系．

**定义1**．一个图$G$的生成子图$C$*，当且仅当$C$的每一个连通片的零度为1时，这种子图称为$G$的广义回路．

一个连通图，当且仅当它所具有的零度$n=0$时，是一个树．所以$C$的含有一个回路的连通片的零度必为1．因为从此回路中移去一条边时，即变为一个树．反之，若$C$的连通片的零度$n=1$，则必定含有一个回路．

* G的一个生子成图是包含有$G$的全部节点的子图。

**引理1.** 当且仅当一个图的每一个连通片均含有单回路时，它是一个广义回路。

**定义2.** 每一个连通片的长度为奇数的广义回路称为奇广义回路。

**引理2.** 如果$G$是一个连通的广义回路，若$G$中的回路的长度是偶数，则$\det H(G)=0$，若回路的长度是奇数，则$\det H(G)=\pm 2$。

证明：我们对$G$的节点用归纳法来证明这一引理。显然，该引理对于具有3个节点的任意图$G$是成立的，因为$G$是一个长度为3的单回路。假设该引理对于任意具有$k-1$个节点(或小于$k-1$个节点）的$G$成立，其中$k\geqslant 4$。我们将证明该引理对于任意具有$k$个节点的图也成立。下面研究两种情况。

**情况1.** 在$G$中不存在度数为1的节点。这意味着$G$是一个长度为$k$的回路，其中$k$是$G$的边数或节点数。因为对图$G$的节点与边的重新标记相当于$H(G)$中的各行之间与各列之间的交换，而这一过程并不会改变$H(G)$的秩。因此，$G$可用下列方法重新标记：$G=(v_1v_2)(v_2v_3)\cdots(v_kv_1)$，如果$H(G)$的各行与各列用下列次序分别排列，

$$v_1,v_2,\ \cdots,\ v_k \text{与} (v_1,\ v_2),\ (v_2,\ v_3),\ \cdots,\ (v_k,\ v_1),$$

若沿第一行展开，则$\det H(G)$的展开式为：

$$\det H(G)=1-(-1)^{1+k}$$

引理得证。

**情况2.** 在$G$中存在一个度数为1的节点。为方便起见，设该节点为$v_1$，其关联的边为$e_1$。显见，删去$H(G)$中对应于节点$v_1$的行和对应于边$e_1$的列而得到的矩阵$H^*(G)$是图$G_1=G-e_1$的完备关联矩阵。亦即$H^*(G)=H(G_1)$。因为$G_1$是一个具有$k-1$个节点与$k-1$条边的连通广义回路，利用归纳法的假设可知，若$G_1$中的回路长度为偶数，则$\det H(G_1)=0$，若该回路的长度为奇数，则$\det H(G_1)=\pm 2$，由于

$$\det H(G)=\pm\det H(G_1)$$

并考虑到$G$与$G_1$中的回路具有相同的长度，故引理得证。

**定理1.** 一个具有$m$个节点与$m$条边的图，其中$m\geqslant 3$，当且仅当其完备关联矩阵$H(G)$的行列式等于$\pm 2^q$时，该图是奇广义回路，此处$q$是$G$的回路数。

证明：令$G_i$是$G$的各个连通片，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ u$，此处$G_i$具有$k_i$条边及$m_i$个节点。若必要的话，重新按排它的节点与边，我们有：

$$H(G)=\begin{bmatrix} H(G_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H(G_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & H(G_u) \end{bmatrix}$$

必要性：假设$G$是一个奇广义回路。那么对于所有的$i$，则$k_i=m_i$，以及$H(G)$是一个方子矩阵。由此得到$u=q$以及

$$\det H(G)=\prod_{i=1}^{u}\det H(G_i)=\pm 2^u.$$

充分性：假设$H(G)$为非奇异矩阵，且$\det H(G)=\pm 2^q$。对于某个$i$，若$k_i\neq m_i$，那么$\det H(G)$的拉普拉斯展开式的每一个主子式（沿主子矩阵$H(G_i)$所对应的行）中至少包含了一个零行。这意味着$\det H(G)=0$。于是便出现了矛盾，因此对所有的$i$，$k_i=m_i$，以及

$$detH(G)=\prod_{i=1}^{s} detH(G_i)。$$

因为，零度为1的连通图仅仅可能是一个连通的广义回路，由此从引理2得到 $det\,H(G)=\pm 2^q$，意即$detH(G_i)=\pm 2$，且$u=q$。因此$G$是一个奇广义回路，定理得证。

广义回路的完整特性建立如下，它是定理1和引理2的直接结果。

**定理2．** 令$G$是一个$m$个节点与$e$条边的图，$e\geqslant m$且$m\geqslant 3$。在实数域中$m$阶方子矩阵$H(G)$为非奇异的充要条件是其子矩阵的各列对应于$G$的奇广义回路$C_0$的各条边，且该子矩阵的行列式值等于$\pm 2^q$，此处$q$是$C_0$中的回路数。

**定理3．** 令$G$是一个$m$个节点与$e$条边的图，$e\geqslant m$与$m\geqslant 3$。在实数域中$m$阶方子矩阵$H(G)$的积和式，当且仅当该子矩阵的各列对应于$G$的一个广义回路$C$的各条边时，该积和式不为零，且其大小等于$2^q$，此处$q$是$C$中的回路数。

**降价关联矩阵的非奇异子矩阵与广义k-树**

现在我们研究降阶关联矩阵的非奇异子矩阵的性质。为方便起见，用符号 $H_{i_1i_2\cdots i_k}(G)$ 表示$G$的降阶关联矩阵，此处$i_1$，$i_2$，…，$i_k$表示是从 $H(G)$ 中删去的各行，它们对应着$G$的节点$v_1$，$v_2$，…，$v_k$。

**定义3．** 一个图$G$的生成子图 $T_k$，当且仅当 $T_k$ 具有$k$个零度$n=0$的连通片，且若存在其它连通片的话，其零度$n=1$*，则称为一个广义$k$-树。

经常在广义$k$-树$T_k$中，要求某些被标识的节点处在不同的零度$n=0$的连通片之中。因此可用带括号的节点符号来表示这种$k$-树。例如$T_3(v_1v_2,\ v_3,\ v_4v_5)$是用于一个广义3-树的符号。其中$v_1$与$v_2$是在零度$n=0$的一个连通片中，节点$v_3$处在一个零度$n=0$的连通片中，而节点$v_4$与$v_5$又在另一个零度$n=0$的连通片中。为方便起见，一个广义1-树也称为广义树。显见没有回路的广义$k$-树就是一个$k$-树**。

**定义4．** 一个广义$k$-树，若它是一个$k$树或包含在所有连通片（零度为1）中的回路的长度为奇数，则称其为奇广义$k$-树。

注意，我们把一个$k$-树作为一个奇广义$k$-树来考虑。利用这些定义，在下列定理中建立了$G$的降阶关联矩阵的非奇异子矩阵与$G$的某类子图之间的关系。我们略去了这条定理的证明，因为其证明完全类似于定理1。

**定理4．** 令$G$是一个$m$个节点与$e$条边的图。那么在实数域中 $m-k$ 阶的方子矩阵 $H_{i_1i_2\cdots i_k}(G)$为非奇异的充要条件是该子矩阵的各列对应于$G$的奇广义$k$-树 $T_k(v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,\ v_{i_k})$的各条边，且该子矩阵的行列式值等于$\pm 2^q$，其中$q$是在奇广义回路中所含的回路数。

因为在模2域中，除了$q=0$外，$2^q$也等于0，由此得到下列结果。

**推论1．** 在模2域中，$m-k$阶的方子矩阵 $H_{i_1i_2\cdots i_k}(G)$ 为非奇异的充要条件是其子矩阵的各列对应于在不同的连通片（$G$的节点$v_{i_1}$，$v_{i_2}$，…，$v_{i_k}$均分开）之$k$-树的各条边。

**推论1．** 的特例是如下周知的结果[1]。

**推论2．** 在模2域中，一个$m-1$阶方子矩阵$H_{i_1}(G)$，当且仅当其子矩阵的各列对应于$G$的一个树的各条边时，它是非奇异的。

现在可以得到一个类似于定理3的结果，且叙述为：

* 孤立节点也作为一个零度$n=0$的连通片。

** 也称为林。

**定理5.** 令$G$是一个$m$个节点与$e$条边的图，那么在实数域中$m-k$阶方子矩阵$H_{i_1i_2\cdots i_k}(G)$的积和式为非零的充要条件是该矩阵的各列对应于$G$中的一个广义$k$-树$T_k(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$的各条边，其积和式的值等于$2^q$，此处$q$是广义$k$-树中的回路数。

**推广到有自环与有并列边的情况**

直到现在，我们仅仅研究的是无自环与无并列边$m\geqslant 3$的图。在本节中，我们将把这些结果推广到有自环及有并列边且$m$为任意数的情况。因为这种推广是直截了当的，故在此只需作简略的说明。

(1) 相应于图$G$的自环$(v_i, v_i)$的$H(G)$，仅仅在与$G$的节点$v_i$相对应的一行中有一个1，而该列中的其它元素为零。

(2) $G$的每一条并列边在$H(G)$中用一列来表示，亦即$G$的各并列边在$H(G)$的同一列中是重复的。

(3) 如果把$q$解释为长度大于1的回路数，那么至今所讨论而得的结论均成立。这是非常明显的，因为对应于有一个自环与零度$n=1$的连通的子矩阵之行列式（积和式）为$\pm 1(1)$，而不是$\pm 2(2)$。

**3.有向图的关联矩阵的非奇异子矩阵**

现在我们来研究有限有向图$G_d$。如果$G_d$有$m$个节点与$e$条边，那么$G_d$的完备关联矩阵$H(G_d)$是一个$m$行与$e$列的矩阵，若节点$v_i$是第$j$列所对应的边之起始节点，则$h_{ij}=1$，若$v_i$是第$j$列所对的边之终止节点，则$h_{ij}=-1$，否则$h_{ij}=0$，此处$H(G_d)=[h_{ij}]$。

为方便起见，符号$d(v_i)$与$d^*(v_i)$分别表示$G_d$中以$v_i$为起始节点与终止节点的边数，称为$G_d$在$v_i$处的出度与入度。

现在我们假设有向图不包含任何自环与并列边，然后再推广到有自环与有并列边的情况。其它一些没有专门定义的术语可在Chen[8]和Seshu及Reed的文献[1]中找到。

**非奇异子矩阵，广义有向回路与广义有向$k$-树**

大家知道，一个有$m$个节点与$e$条边的有向图$G_d$的关联矩阵$H(G_d)$的$m-1$阶非奇异子矩阵是与有向树是一一对应的[1]。在本节中我们将定义有向图的两种一般类型的子图，同时证明它们如何与某些矩阵的非奇异子矩阵建立联系。

**定义5.** 一个有向图$G_d$的生成子图$C_d$，对$C_d$中的每一个节点$v_i$，当且仅当$d(v_i)=1$，则称为一个广义有向回路。*

令$H^+(G_d)$是从$H(G_d)$中用0代替元素$-1$而所得到的矩阵，$H^-(G_d)$是从$H(G_d)$中用0代替元素1而得到的矩阵。注意$H^+(G_d)[H^-(G_d)]$在每一列中只有一个1（或$-1$），显见，$H^+(G_d)[H^-(G_d)]$的秩等于$G_d$中之出度（或入度）大于零的节点数目。由此得到由Ash[5]所给出的以下结论。

**定理6.** [见Ash[5]]。一个$m$阶的$H^-(G_d)$的方子矩阵为非奇矩阵的充要条件是该子矩阵的各列对应于$G_d$的广义有向回路的各条边，所有$H^+(G_d)$的非奇异子矩阵的行列式值为$\pm 1$。

**推论3.** 有向图$G_d$的广义有向回路数等于$\det H^+(G_d)H^+(G_d)'=\prod d(v_i)$，此处$H^+(G_d')$表示$H^+(G_d)$的转置，乘积遍取$G_d$中的全部节点。

证明：从定理6，将比耐-柯西定理应用到$H^+(G_d)H^+(G_d)'$上，便直接得到此推论。

**定义6.** 一个有向图$G_d$的生成子图$T_{kd}(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$，当且仅当对$T_{kd}(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots,$

* Harary还称为1-因子有向图，并且它与在有限集合上所定义的函数有关。

$v_{i_k}$)中的每一个节点$v_x$，在$x \neq i_1, i_2, \cdots, i_k$时，有$d(v_x)=1$，而在$x=i_1, i_2, \cdots, i_k$时，$d(v_x)=0$，则称之为$G_d$以$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$，为参考点的广义有向$k$-树。

为简便起见，一个广义的有向1-树称为广义有向树。显然，与$G_d$的广义有向$k$-树相对应的无向图是相应于$G_d$的无向图$G_d^u$中的一个广义$k$-树。下列定理是正确的。

**定理7.** 令$H^+_{i_1 i_2 \cdots i_k}(G_d)$是从$H^+(G_d)$中删去$i_1, i_2, \cdots, i_k$行而得到的矩阵，那么$H^+_{i_1 i_2 \cdots i_k}(G_d)$的$m-k$阶的方子矩阵为非奇异矩阵的充要条件是其各列对应于以$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$为参考点的广义$k$-树的各条边，此处$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$对应于$H^+(G_d)$的第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行。

如果广义有向回路与广义$k$-树是用入度而不是用出度来定义时，若把$H^-(G_d)$换成$H^-(G_d)$则上述全部讨论的结果仍然正确。

**推广到有自环及有并列边的有向图的情况**

现在，上一节所有讨论的结果都可推广到有自环与有并列边的有向图的情况。这种推广是直截了当的，仅需作下面的一些修正即可。

(1) $G_d$的每一条并列边$H(G_d)$的一列表示，即$G_d$的并列边在$H(G_d)$中产生相同列的重复项。

(2) 在$H(G_d)$中与$G_d$的自环$(v_i, v_i)$相对应的列在相应于$G_d$的节点$v_i$的一行上出现一个1，而该列中的所有其它元素为零。

(3) $H^-(G_d)$由$H(G_d)$按以下方法而得到：若$H(G_d)$中的一列（对应于$G_d$之非自环的各列），则用0代替1，同时与$G_d$的自环相对应的各列中用$-1$代替1，对于$H^+(G_d)$则无变化。

**4.应用**

一个图的匹配和一个集合映射的匹配问题是紧密地与第2节中所讨论过的广义回路的概念有关，同时由$O_{re}$作过广泛的论述[3, 4, 9]。在下面，我们将证明，文献[2]中所定义的(1)式所示的$B$之同号行列式及其余子式的展开式之各项对应于第3节所定义的子图。

$$B=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} b_{1k} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \sum_{k=1}^{m} b_{2k} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} b_{mk} \end{bmatrix} \tag{1}$$

在[2]中，定义了两种类型的同号式矩阵。一种用符号$A$表示，因为它与电网络理论密切有关，称为节点导纳矩阵。另一类如(1)式所示，在[8]和[2]中已经证明，$detA$与$detB$的展开式的各正项分别与伴随有向图$G(A)$与$G(B)$中的有向树与奇广义有向树有关。因为我们能把一个矩阵$A$分解为三个矩阵$H^-$，$D$与$H'$的乘积[$H^+$，$D$及$H'$的定义见[2]。我们能利用[2]中所介绍的方法来有效地计算其行列式。在下面我们将指出$B$可以类似地分解为三个矩阵的乘积，但是在做到这一点之前，有必要引出$B$的新伴随有向图。为了与我们现在的表示法相一致，用$G_d$来表示$B$的原来的伴随有向图$G(B)$。

对于一个同号式矩阵$B$，新有向图$U_d$按以下原则构成：

(i) $U_d$具有$m$个节点。$B$的每一行（或列）用一个节点来表示，使得标为$v_k$的节点与第$k$行（或第$k$列）相对应。

(ii) 如果$b_{ij}\neq 0$，在$U_d$中从节点$v_i$到节点$v_j$有一条权为$b_{ij}$的有向边，这里 $i, j=1, 2, \cdots, m$。

因此，如果$b_{ii}\neq 0$，在$U_d$中节点$v_i$处有一条权为$b_{ii}$的自环。反之，如果$U_d$给定，可直接得到伴随矩阵$B$。

两个伴随有向图$G_d$与$U_d$之间的主要差别在于$G_d$是一个无自环的$(m+1)$个节点的有向图，而$U_d$是一个$m$个节点且有自环的有向图。

**定理8.** 令$H(U_d^u)$是在实数域中的对应于$U_d$的无向图$U_d^u$的完备关联矩阵，$H(U_d)$是$U_d$的完备关联矩阵，那么

$$B=H^{+}(U_d)DH(U_d^u)',$$

式中，$D$是$e\times e$ 阶对角线矩阵，它的第$i$个元素是一个与$H(U_d)$第$i$列边相对应的权，$H(U_d^u)'$表示$H(U_d^u)$的转置，$e$是$U_d$中的边数。

证明：

令 $X=H^{+}(U_d)DH(U_d^u)'=[x_{ij}]$，

$H^{+}(U_d)=[h^{+}_{ij}]$及$H(U_d^u)=[h^{u}_{ij}]$

因此

$$x_{ij}=\sum_{t=1}^{e}h^{+}_{it}h^{u}_{jt}d_{tt}$$

对于$i=j$的情况，当且仅当在$H(U_d)$ 中相应于$t$列的边具有节点$v_i$作为其起始节点时，$h^{+}_{it}h^{u}_{it}=1$。于是$x_{ii}$表示了具有以节点$v_i$为其起始节点的边的权之和，即$x_{ii}=\sum_{t=1}^{m}b_{it}$。对于$i\neq j$的情况，当且仅当在$H(U_d)$中相应于$t$列的边从节点$v_i$指向节点$v_j$时，$h^{+}_{it}h^{u}_{jt}=1$。因此$x_{ij}$表示了在$U_d$中从节点$v_i$指向$v_j$的边的权，即$x_{ij}=b_{ij}$。因此$X=B$，定理证毕。

用通常的方法，把比耐—柯西定理应用到矩阵乘积$H^{+}(U_d)DH(U_d^u)'$上，容易看出在$B$的一般同号行列式展开的各正项是与$H^{+}(U_d)$与$H(U_d^u)'$ 的相应主行列式的非零项之乘积一一对应。因为一个矩阵转置的行列式等于其本身的行列式，该问题即简化为在$H^{+}(U_d)$与$H(U_d^u)$中产生相应的$m$阶非奇异子矩阵的行列式的问题。这利用[2]中提出的方法是很容易实现的。

应该注意，如果$B$是给定的，矩阵$H^{+}(U_d)$，$D$以及$H(U_d^u)$可直接从$B$而得到，而没有必要象我们在[2]中那样首先建立伴随有向图$U_d$。

遵照第2节中的这些定义，一个广义有向回路，若其连通片中的每一个都包含有奇数长度的有向回路时，则称为奇广义有向回路。类似池，如果一个广义的有向$k$-树，若其中包含的有向回路是奇数长度或长度为零时，则称为奇广义有向$k$-树。换句话说，一个没有有向回路的广义$k$-树，即有向$k$-树，作为奇广义有向$k$-树来考虑。为方便起见，我们已稍微地修改了[2]中奇广义有向树的定义。符号$T_{kd}(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots v_{i_k})$还表示了一个广义有向$k$-树$T_{kd}(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$此处节点$v_{i_x}$与$v_{i_y}$总是包含在一个连通片中。

如果$B$是对称的，即$U_d$是一个满足$b_{ij}=b_{ji}$（适用于所有的$i$与$j$）的对称有向图，我们将一个权$b_{ij}$赋给$U_d$的相应无向图$U_d^u$中节点$v_i$与$v_j$之间的一条边。对于一个$U_d$（或$U_d^u$的非零子图来说，用$f(S)$表示$S$的边权之乘积。

利用这些定义连同以上的论述与定理2，4，6与7，可立即得到定理9。

**定理9.**

$$detB = \sum 2^q f(C_{od})$$

以及 $(-1)^{i_1+j_1}detB_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k} = \sum 2^{q'} f[T_{kd}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})]$，此处 $C_{od}$ 与 $T_{kd}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$ 分别是 $U_d$ 中奇广义有向回路与奇广义有向树；$q$ 与 $q'$ 分别为在 $C_{od}$ 与 $T_{kd}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$ 中长度大于 1 的有向回路数；$B_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k}$ 是从 $B$ 利用删去第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行与第 $j_1, i_2, \cdots, i_k$ 列而得到的矩阵；和式是对于所有的此类子图求取。

显然，如果 $U_d$ 是任意给定的有向图，则我们可把它作为某个 $B$ 的伴随有向图来研究。差别仅仅在于如果存在并列边的话，$b_{ij}$ 表示在 $U_d$ 中从节点 $v_i$ 到节点 $v_j$ 的有向边标识符之和。

**推论4.** 如果 $B$ 是对称的，则

$$B = H(U_d^u)DH(U_d^u)'.$$

注意在推论 4 中的 $H(U_d^u)$ 再次地是对实数域而言的。

**推论5.** 如果 $B$ 是对称的，则

$$\det B = \sum 2^{2q} f(C_0)$$

以及

$$(-1)^{i_1+j_1}\det B_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k} = \sum 2^{2q'} f[T_k(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})],$$

式中 $C_0$ 与 $T_k(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$ 分别是 $U_d^u$ 中的奇广义回路与奇广义k-树；$q$ 与 $q'$ 分别是在 $C_0$ 与 $T_k(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$ 中长度大于1的回路数；和式是对在 $U_d^u$ 中所有的这两类子图求取。

正如前面所提到，$G_d$ 是[2]中所定义的 $B$ 之另一种伴随有向图，还给出了 $B$ 的行列式与 $G_d$ 的广义有向树之间建立联系的显式公式，下面我们把该公式推广到带符号的 $\det B$ 的主子式上。

**推论6.**

$$\det B = \sum 2^q f(T_{1d}(v_{m+1}),$$

以及

$$(-1)^{i_1+j_1}\det B_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k} = \sum 2^{q'} f(T_{(k+1)d}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1}).$$

式中 $T_{1d}(v_{m+1})$ 与 $T_{(k+1)d}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1})$ 分别是 $G_d$ 的奇广义 $(k+1)$-有向树；$q$ 与 $q'$ 分别是在 $T_{1d}(v_{m+1})$ 与 $T_{(k+1)d}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1})$ 中的有向回路数，和式是对 $G_d$ 中所有的这两类子图求取。

上述推论是从下面两个事实而得到的：$U_d$ 中的一个广义有向回路是 $G_d$ 中的一个广义有向树 $T_{1d}(v_{m+1})$，同时 $U_d$ 的一个广义有向k-树是 $G_d$ 中的一个广义有向 $(k+1)$-树，反之亦然。有向图 $G_d$ 还可用 $U_d$ 来说明，这种解释将自身地导致本推论的证明。令 $R = [b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{mm}]$ 是一个行矩阵，且

$$B'' = \begin{bmatrix} B & R' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中，$R'$ 是R的转置。$G_d$ 实际上是 $B''$ 的新伴随有向图。因为 $\det B$ 等于 $B''$ 的第 $(m+1)(m+1)$ 个元素的余子式，于是上述结果直接从定理 9 而得出。

**推论7.** 如果 $B$ 是对称的，那么

$$\det B = \sum 2^{2q} f[T_1(v_{m+1})]$$

以及

$$(-1)^{i_1+j_1}\det B_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k} = \sum 2^{2q'} f[T_{k+1}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1})],$$

式中 $T_1(v_{m+1})$ 与 $T_{k+1}(v_{i_1}v_{j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1})$ 分别是 $G_d$ 的相应无向图 $G_d^u$ 之奇广义树与奇广

义$(k+1)$-树；$q$与$q'$是在$T_1(v_{m+1})$与$T_{k+1}(v_{i_1 j_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{m+1})$中的有向回路数，和式是对$G_d^*$中所有的这两类子图求取。

在本推论中，我们已隐含地假设在$G_d^*$中在节点$v_i$与$v_j$之间连接的边所对应的权是$b_{ij}$或$b_{ji}$。

我们将下列例子来说明上述结果。

例　研究如图1所示的有向图$U_d$。伴随同号矩阵$B$以及完备关联矩阵由下式给出：

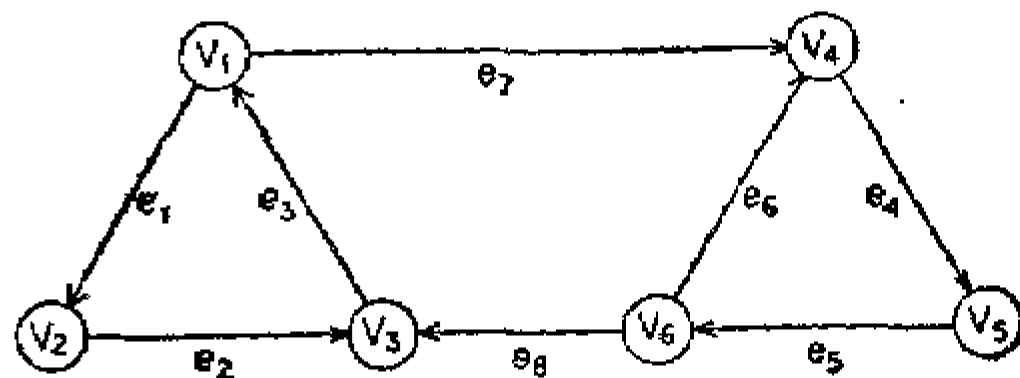



图1. 给定有向图$U_d$

$$B=\begin{pmatrix} e_1+e_7 & e_1 & 0 & e_7 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & e_5 \\ 0 & 0 & e_8 & e_6 & 0 & e_6+e_8 \end{pmatrix}$$

$$H(U_d^*)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

以及

$$H^+(U_d)=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

因为$H(U_d^*)$很容易写成规范型式，在$H^+(U_d)$与$H(U_d^*)$中相应于非奇异的子矩阵的集合$M$是容易产生的，并由下式给出：见[2]

$$M=\{H(123456),\ H(234567),\ H(123458),\ H(234578)\},$$

此处$H(i_1 i_2 \cdots i_k)$是由第$i_1, i_2, \cdots, i_k$列所构成的$H(U_d^*)$的子矩阵。很容易检查对应于$M$的每一个元素的各列形成了$U_d$的奇广义有向回路。因此，利用定理9，我们有$\det B$的展开式。

$$detB = 4e_1e_2e_3e_4e_5e_6 + 2(e_2e_3e_4e_5e_6e_7 + e_1e_2e_3e_4e_5e_8 + e_2e_3e_4e_5e_7e_8)$$

类似地，如果在$H^+(U_d)$ 中删去第1行与第6行，所得到的矩阵仅包含有第2,3,4与5列的4阶非奇异子矩阵，与这些列相应的边形成了一个以$v_1$与$v_6$为参考点的有向2-树，利用定理9，我们有：

$$detB_{11,66} = -e_2e_3e_4e_5,$$

因为没有$T_{2d}(v_1v_5, v_6)$ 型的有向2-树，故$B_{15,66} = \sum 2^q f[T_{2d}(v_1v_5, v_6)] = 0$。

## 结　　论

现在已经建立了一个与有向图的完备关联矩阵与降阶关联矩阵的非奇异子矩阵与图及有向图的某类子图间的关系。这些子图还紧密地建立了一个图的关联匹配与一个函数的映射之间的关系[3,4,6,7,9]。

还证明了如(1) 式所示的同号行列式及其余子式的最后展开式中的各项对应于伴随有向图中的奇广义回路与奇广义有向$k$-树的同类子图。因此，我们可以利用[2]中所提出的方法来有效地计算同号行列式及其余子式。

## 参　考　文　献


[1] S. Seshu and M. B. Reed, "Linear Graphs and Electrical Networks", Reading, Mass., Addison-Wesley, 1961.

[2] W. K. Chen, "On Unisignants and Their Evaluations", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 16, pp. 603-619, 1968.

[3] O. Ore, "Incidence Matchings in Graphs", *J. Math. pures Appl.*, Vol. 40, pp. 123-127, 1961.

[4] O. Ore, "Graphs and Correspondences", in "Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser", pp. 184-191, Füssli, Zürich, 1945.

[5] R. B. Ash, "Topology and the Solution of Linear Systems", *J. Franklin Inst.*, Vol. 268, pp. 453-463, 1959.

[6] F. Harary, "The Number of Functional Digraphs", *Math. Ann.*, Vol. 138, pp. 208-210, 1959.

[7] R. L. Davis, "The Number of Structures of Finite Relations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, pp. 486-495, 1953.

[8] W. K. Chen, "On Directed Trees and Directed $k$-Trees of a Digraph and Their Generation", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, pp. 550-560, 1966.

[9] O. Ore, "Theory of Graphs", Colloquium Publications, Vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1962.

[10] W. K. Chen, "On Directed Graph Solutions of Linear Algebraic Equations", *SIAM Review*, Vol. 9, pp. 692-707. 1967.

# 七、关于产生一个图的树的统一理论（Ⅰ）

## 第一部分　王氏代数公式

**一个复杂的电网络可借助数字计算机、利用拓扑公式来进行分析，其有效性很大程度上决定于在相应图中树及有向树生成的有效性。有效地产生一个图的树的问题在各种文献中已作过相当广泛的论述。本文指出：对于文献中现有的许多方法，虽然初看起来表现形式有所不同，但是实际上都是王氏代数公式的变型。因此，所有公式可以进行统一化，统一理论使人们能系统地总结这些结果，并将提供一种推导它们的简易方法。**

**1.引言**

在线性系统的频域分析中，网络行列式的元素通常是复变量$s$的有理函数，即为两个$s$多项式之比；在大多数情况下必需计算符号网络函数，即网络的元素是用文字形式表示而非用数值形式表示的。虽然这些行列式可用高斯消去法或主元凝聚法进行计算，但是，这种求解过程是缓慢与复杂的。即使得到了最后的表达式，其中也仍存在着大量的相消项。拓扑公式对解决该问题提供了一种有效的方法（例如，见*Chen* 1965*a*，1967*a*）。

基尔霍夫（1847）与麦克斯韦（1892）首先应用了拓扑概念来分析电网络。之后，关于这些公式出现了许多论文；或者是进一步推广它们，或者是给出这些公式的新证明。事实上，用一类同号行列式（*unisignants*——这一术语是在1855年首先由Sylvester提出）来进行计算是一条捷径，因为在同号行列式的计算中避免了通常固有的相消项。Sylvester证明了对称同号行列式的展开式中的各项可简单地表示成"树之乘积"。虽然Sylvester的工作是与基尔霍夫处在同一个时代，但是他似乎未觉察到所涉及的电网络行列式也是同号行列式。因此，一个复杂的电网络用数字计算机进行分析的有效性很大程度上决定于与此网络相对应的图中树生成的有效性。

产生一个图的树之最简单的方法是研究$v$个节点的连通图的$v-1$条边的所有可能的组合。如果该图的总边数是$e$，则必须研究$\binom{e}{v-1}$个集合，然而这对于高速数字计算机来说，这一数字嫌太大。但是，已由Hale(1961)，Mayeda和Van Valkenburg(1957)，Zobrist和Lago（1964)，Edelmann（1967)，以及Rode和Chan（1968）基于这种组合的思想提出了各种算法。

产生一个图的树的主要困难在于必须求得一种方法，它所需的运算次数随着该图的节点数（或同号行列式的阶数）呈线性地、而非呈指数增长，同时为了消除重复项无需对先前已求得的树来校核每一个新树，因为枚举法是一种极费时间的过程——如一个具有20个节点、40条边的图之树的数目将达到百万个。例如MacWilliams(1958)列举了一个11个节点、21条边的图，它含有12490个树。除了减慢产生树的过程之外，在借助于数字计算机进行分析网络时，下列事实也限制了它的规模，因为人们必须在计算机的存贮器中保留所有树的集合，

并且必须与之相对照检查每一个新树，从而找出重复项。

近年来已经出现了许多处理符号运算问题的程序语言。例如，见McCarthy等人（1961），Yngve（1961），Brown（1963），以及Farber等人（1964）的论文。看来很显然，本文中所叙述的一些生成树的算法使用这些语言可以非常有效地实现。

本文的主要目的是指出许多在文献中所描述的以供利用的方法可用王氏代数法统一起来。统一理论使人们能系统地总结现有许多成果并提供一种推导它们的简易方法。

**2.预备知识与定义**

在本文中我们将只研究带标号的图$G$，即所有的节点用整数$1,2,\cdots,v$表示，各条边用$e_1,e_2,\cdots,e_b$来标记，此处$v$与$b$分别表示$G$的节点数与边数。在本文中，术语"图"意指带标号的图。

两个$G$的子图，若它们无公共节点时，则称为互不相交的。如果$g$是$G$的一个子图，$G$的每一个节点是$g$中的一个节点，则$g$是$G$的一个生成子图。若$G$的一个回路含有$h$条边，则称其为是一个长度为$h$的回路。

$G$的一个树$t$是这样的一个生成子图，即它是一个不含回路的连通子图。一个树的各条边称为树支。一个$G$的生成子图，若其具有$k$个连通片且不包含回路，则称其为一个$k$-树。某些连通片可能只含一个孤立节点。经常在所用的$k$-树中，要求某些被标识的节点出现在不同的连通片中。为方便起见，我们将采用分号来隔开需出现在不同连通片中的节点组。例如，符号$t(i_1,i_2;i_3,i_4,i_5;i_6,i_7)$，或简写为$t(I)$，此处$I=\{i_1,i_2;i_3,i_4,i_5;i_6,i_7\}$，表示了一个3-树，其中节点$i_1$与$i_2$在一个连通片中，节点$i_3$、$i_4$与$i_5$在一个连通片中，节点$i_6$与$i_7$在一个连通片中。特殊地，如果$I$仅含有一个节点组，则我们定义$t(I)=t$，即为$G$的树，即把1-树定义为$G$的树。如果$I$是空集，那么$t(I)$表示了$G$的一个零图。这种符号推广到一般情况是自然的。例如，如果$I$具有$k$个节点组，则$t(I)$是$G$的一个$k$-树的符号。符号$T(I)$表示了$G$中所有形如$t(I)$的$k$-树集合。

$G$的补树$\bar{t}$是$G$中树$t$的补图，$G$的补$k$-树$\bar{t}(I)$是$G$中$k$-树$t(I)$的补图，此处假定集合$I$具有$k$个元素。显然，如果$I$仅有一个元素，则$\bar{t}(I)=\bar{t}$，即为$G$的一个补树。类似地，符号$\bar{T}(I)$表示了在$G$中所有可能的形如$\bar{t}(I)$的补$k$-树的集合。为简便起见，令$T$与$\bar{T}$分别表示$G$的树与补树的集合。

对于一个有$v$个节点、$e$条边的连通图$G$，数值$r=v-1$与$n=b-v+1$分别称为$G$的秩与零度。相对于$G$的一个树$t$的基本回路集（简写为$f$-回路）是由补树$\bar{t}$的每一条边与唯一的树支通路所形成的$n$个回路。$G$的一个割集是$G$的最小子图，若从$G$中移去该子图，使得$G$的秩减少1。对于$G$的一个树$t$的基本割集的集合（或简写为$f$-割集）是$r$个割集的集合，对于$t$的每一条边有一个割集，在每一个割集中恰含有$t$的一条边。对于$G$的一个节点$i$而定义的关联切割，是一个由与该节点$i$相关联的所有边而组成的子图。注意，一个关联切割可以不是一个割集，它可以是$G$的几个边不相交的割集之并。

四种集合论的二元运算，"并"、"交"，"环和"以及"差"，分别记作"$\cup$"、"$\cap$"、"$\oplus$"以及"$-$"。它们可用于两种稍为不同的范畴。如果$g_1$和$g_2$是$G$的两个子图，那么$g_1\cup g_2$表示包含了或在$g_1$中、或在$g_2$中、或在二者之中的元素的子图。如果$H_1$与$H_2$是两个集合，那么$H_1\cup H_2$表示并集。这对于"$\cap$"、"$\oplus$"、以及"$-$"也同样适用。所谓$g\subseteq G$，意指$g$是$G$的一个子图，所谓$h\subseteq H$，意指$h$是$H$的一个子集。符号$\phi$与$H_\phi=\{\ \}$分别表示零图与空集。

为方便起见，一个$G$的子图$g$用其元素的"乘积"或并置来表示，例如$G$的一个树$t$用$e_{i_1}e_{i_2}$

$\cdots e_{i_r}$来表示，而$G$用$e_1e_2\cdots e_6$来表示。对于一个有限集合$I$来说，其元素的个数记作$\alpha(I)$。如果$H=\{g_i\}$，所谓$\bar{H}$，意指$\bar{H}=\{\bar{g}_i\}$，此处$\bar{g}_i$是$G$中子图$g_i$的补图。

**3. 王氏代数公式**

王氏代数首先由王季同(1934)提出，他的意图是列出一些规则，以得到展开网络行列式的一条捷径。因为网络（图）的树与网络行列式未相消项之间的内在联系，这种代数已经广泛地用来产生一个图的树。在文献中已出现了许多王氏代数的变型。但是，这些作者们似乎未觉察到各种方法与王氏代数的联系。

一种代数，对其一个元素$x$来说，具有下列性质：

$$x+x=0 \quad 与 \quad x\cdot x=0 \tag{1}$$

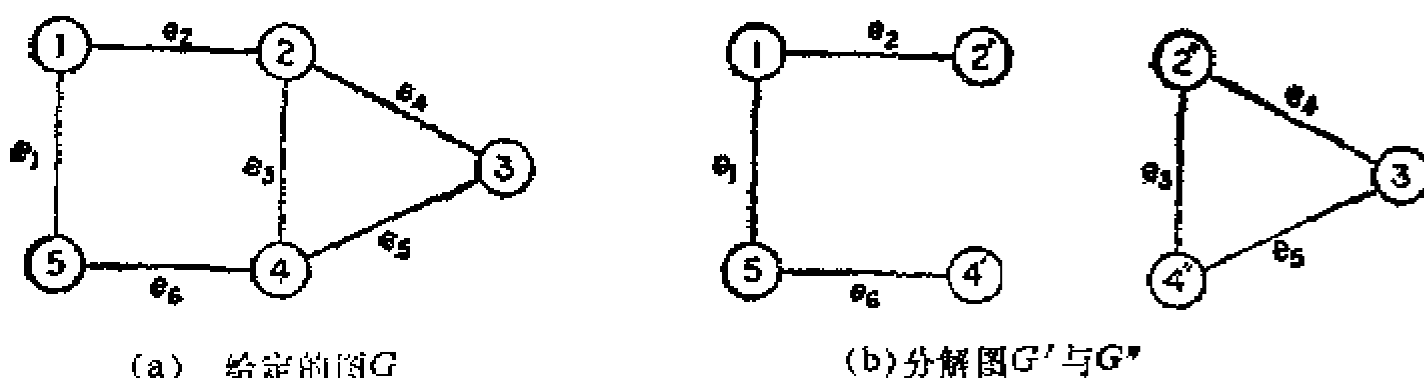
Duffin(1959)将这种代数称为王氏代数。式中0是该代数中的零元素。在我们的场合下，我们将用下列方法来定义王氏代数：令$C$是一个给定图$G$的所有子图的集合。研究$C$的所有子集的集合$D$，对此，定义一个等价关系"="。假设$D$中有两种二元运算。第一种二元运算称为"环和"，并记作⊕，第二种二元运算称为"星乘"，并记作$*$，注所定义的两种运算满足下列规则：对于在$D$中的$H_1$与$H_2$来说：

$$H_1\oplus H_2=\{g;\ g在H_1中，或在H_2中，但不在二者之中\}, \tag{2}$$

$$H_1*H_2=\{g_1\cup g_2;\ g_1在H_1中，g_2在H_2中，以及\ g_1\cap g_2=\phi\} \tag{3}$$

*Chen*(1966)已证明，这些运算满足交换律与结合律。此外，集合$D$相对于环和运算形成一个阿贝尔群，即交换群。为完整性起见，我们提到在集合$D$中的零元素是空集$H_0$，而其相等的元素是$\{\phi\}$。对于$D$中的每一个$H$来说，$H*H_0$或$H_0*H$定义为$H_0$，$H$相对于本身的环和运算也是$H_0$，即$H\oplus H=H_0$。

作为一个例子，研究示于图(a)的图$G$，其子图的集合为：




(a) 给定的图$G$　　(b)分解图$G'$与$G''$

图1

$$H_1=\{e_1e_2,e_3e_4e_5,e_5e_6\}, \tag{4}$$

$$H_2=\{e_1e_2,e_1e_3e_4,e_1e_6\} \tag{5}$$

因此

$$H_1\oplus H_2=\{e_3e_4e_5,e_5e_6,e_1e_3e_4,e_1e_6\}, \tag{6}$$

$$H_1*H_2=\{e_1e_2e_3e_4e_5,e_1e_2e_5e_6,e_1e_3e_4e_5e_6,e_1e_6e_3e_4e_5\} \tag{7}$$

注意，在(7)式中并非所有元素都是相异的。如果集合$H$的各元素不全然相异，所谓$W(H)$是指从集合$H$，删去其出现偶数次的元素而保留其出现奇数次元素中的一个而所得到的集合，即

注：Chen在"应用图论"一中用符号⊗来代替$*$——译者

$$W(H)=\{w_1\}\oplus\{w_2\}\oplus\cdots\oplus\{w_{\alpha(H)}\},\tag{8}$$

式中，$w_i$是$H$的各元素，$i=1,2,\cdots,\alpha(H)$。

**引理1.** 如果$H_1$、$H_2$与$H_3$是图$G$的三个子图的集合，那么 $W(H')=W(H'')$，此处 $H'=H_1*(H_2\oplus H_3)$ 以及$H''=(H_1*H_2)\oplus(H_1*H_3)$ 此外，$W(H_1\oplus H_2)=W(H_1)\oplus W(H_2)$

**推论1.** 令$H_p,H_1,\cdots,H_k$是$G$的 $(k+1)$ 个子图集合，则

$$W(H_p*H)=W(H_p*H_1)\oplus W(H_p*H_2)\oplus\cdots\oplus W(H_p*H_k),\tag{9}$$

此处$H=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_k$

如果对于一个不全为零的$c_x=1$或0的常数集合，$x=1,2,\cdots,k$，我们有：

$$c_1H_1\oplus c_2H_2\oplus\cdots\oplus c_kH_k=H_0,\tag{10}$$

式中，$H_x$是图$G$的子图集合，且 $1H_x=H_x$　$0H_x=H_0$，，那么集合 $H_1,H_2,\cdots,H_k$称为线性相关。但是如果 (10)式仅当所有$c_x$为零时才满足，则这些集合称为线性独立。于是我们有：

**定理1.** 令$H_1,H_2,\cdots,H_n$是图$G$的$n$个子图集合，还令$H_i'=c_{i1}H_1\oplus c_{i2}H_2\oplus\cdots\oplus c_{in}H_n$，$i=1,2,\cdots,k$，式中，$c_{ix}=1$或0，$x=1\ 2,\cdots,n$. 那么

$W(H_1'*H_2'*\cdots*H_k')=H_0$，若$H_1',H_2',\cdots,H_k'$为线性相关时，

$=W(H_1*H_2*\cdots*H_n)$，若$k=n$，且$H_1',H_2',\cdots,H_k'$是线性无关时，

$=\oplus W(H_{j_1}*H_{j_2}*\cdots*H_{jk})$，若$k\leqq n$，

式中，$c_{ij_i}=1$，$i=1,2,\cdots,k$以及所有$j_i$是相异的，$1\leqq j_i\leqq n$，环和是对所有可能的下标 $j_1j_2\cdots j_k$ 求取。

证明：这条定理可从推论 1 与下列事实而直接得到，即有 $W(H_i*H_i*H)=H_0$ 以及 $W(H_0)=H_0$

显然，若$k>n$，因为$H_1',H_2',\cdots,H_k'$是线性相关的，则$W(H_1*H_2'*\cdots*H_k')=H_0$。

**4. 一个图的偏导数**

一个图$G$相对于$G$的一个子图的偏导数是由 Watanable (1960) 首先提出的，后来又由 Hakimi和Green(1964) 系统地发展了该问题。

令$g$是$G$的一个子图，$e$是$G$的一条边。那么，$g$相对于$e$的偏导数定义为：

$$\frac{\partial g}{\partial e}=\partial g/\partial e=g\oplus e,\ \text{若}e\subseteq g,$$

$$=\phi,\ \text{若}e\text{不在}g\text{中。}\tag{11}$$

如果$H$是$G$的子图的集合，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial e}=\partial H/\partial e=\{\partial g/\partial e;\ g\subseteq H\text{以及}e\subseteq g\}\tag{12}$$

如果，$g=e_1e_2\cdots e_k$是$G$的一个子图．我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial g}=\partial H/\partial g=\partial H/\partial e_1\oplus\partial H/\partial e_2\oplus\cdots\oplus\partial H/\partial e_k\tag{13}$$

所谓$\partial^2H/(\partial g_1\partial g_2)$，我们意指$\partial(\partial H/\partial g_2)/\partial g_1$。$\partial^kH/(\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k)$ 的意义是显然的，这里$g_1,g_2,\cdots,g_k$都是$G$的子图。容易证明求偏导数的次序是无关紧要的。在无括号的情况下我们假设按下列运算次序进行：求偏导数的运算、笛卡儿乘积运算、环和运算与并运算。

作为一个例子，研究(4) 式中的集合$H_2$。如果$g=e_1e_3e_4$，则

$$\partial H_2/\partial g=\partial H_2/\partial e_1\oplus\partial H_2/\partial e_3\oplus\partial H_2/\partial e_4$$

$$=\{e_2, e_3e_4, e_6\}\oplus\{e_1e_4\}\oplus\{e_1e_3\}$$
$$=\{e_2, e_3e_4, e_6, e_1e_4, e_1e_3\}$$

下面，我们定义任意两个集合$H_1$与$H_2$的笛卡儿乘积，它记作符号$H_1\times H_2$：

$$H_1\times H_2=\{g_i\cup g_j;\ g_i\subseteq H_1与g_j\subset H_2\}, \tag{14}$$

以及$H_1\times H_0=H_0\times H_1=H_0$，即所有的子图的集合是由$H_1$中的子图与$H_2$中的子图作所有可能的并。

为完整性起见，我们叙述Hakimi与Green的两个等式(1964)，可看出它们是正确的：

$$\partial(H_1\oplus H_2)/\partial g=\partial H_1/\partial g\oplus\partial H_2/\partial g \tag{15}$$

在$H_1$中的子图都不包含$H_2$的子图的一条边时，

$$\partial(H_1\times H_2)/\partial g=H_1\times\partial H_2/\partial g\cup H_2\times\partial H_1/\partial g \tag{16}$$

特殊地，若$H_2$中没有包含$g$的一条边的子图时，我们有：

$$\partial(H_1\times H_2)/\partial g=H_2\times\partial H_1/\partial g, \tag{17}$$

因为$\partial H_2/\partial g=H_0$将这个等式稍作推广如下，它是由Chen和Mark(1969)给出的：如果$H_1$中的子图不包含$H_2$中的一子图的一条边，并且在$H_2$中的子图不包含$G$的子图$g_1, g_2, \cdots, g_k$中的任一子图的一条边时：

$$\partial^k(H_1\times H_2)/\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k=H_2\times(\partial^k H_1/\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k). \tag{18}$$

重复运用偏导数的定义，可以证明：

$$\partial^k H/\partial(g_1\oplus g_2\oplus\cdots\oplus g_k)=\partial H/\partial g_1\oplus\partial H/\partial g_2\oplus\cdots\oplus\partial H/\partial g_k, \tag{19}$$

$$\partial^k H/\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k=所有\ \frac{\partial^k H}{\partial e_{i_1}^1\partial e_{i_2}^2\cdots\partial e_{i_k}^k}集合的环和 \tag{20}$$

此处$e_{i_j}^j$是$g_i$的一条边，$j=1,2,\cdots,k$。

一个图$G$的各子图的线性相关与线性独立的定义完全与早先给出的子图的集合之有关定义相似。此处我们不作重复。差别仅仅在于将(10)式中的集合$H_x$用子图$g_x$来代替，$H_0$用$\phi$来代替。

一个重要的等式作为定理2来叙述，它们用来推广在下一节中所述的一些结果。

**定理2.** 令$g_1, g_2\cdots, g_n$是图$G$的$n$个子图，还令$g_i'=c_{i1}g_1\oplus c_{i2}g_2\oplus\cdots\oplus c_{in}g_n$，$i=1,2,\cdots,k$，此处$c_{ix}=1$或$0$，$x=1,2,\cdots,n$。那么对于$G$的子图集合$H$，

$$\partial^k H/\partial g_1'\partial g_2'\cdots\partial g_k'=H_0，若g_1', g_2', \cdots, g_k'为线性相关时；$$
$$=\partial^k H/\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k，若k=n，且g_1', g_2', \cdots, g_k'为线性无关时；$$
$$=\oplus\partial^k H/\partial g_{j_1}\partial g_{j_2}\cdots\partial g_{j_k}，若k\leq n,$$

式中，$c_{ij_i}=1$　$i=1,2,\cdots,k$与所有的$j_i$是相异的，$1\leq j_i\leq n$，环和是对所有可能的下标$j_1j_2\cdots j_k$选取。

证明：重复运用(15)式与(19)式，我们有：

$$\partial^k H/\partial g_1'\partial g_2'\cdots\partial g_k'=\frac{\partial^k H}{\partial c_{1t_1}g_{t_1}\partial c_{2t_2}g_{t_2}\cdots\partial c_{kt_k}g_{t_k}}所有集合的环和$$

式中，$c_{yt_y}=1$，$1\leq t_y\leq n$，$y=1,2,\cdots,k$。现在容易看出，若$t_u=t_v$　$u\neq v$，此处$1\leq u, v\leq k$时，相应的集合是空集。由此再利用$\partial^2 H/\partial g\partial g=H_0$，从而得出本定理。

显然，若$k>n$，子图$g_1', g_2', \cdots, g_k'$必然是线性相关的。于是我们有：

$$\partial^k H/\partial g_1'\partial g_2'\cdots\partial g_k'=H_0，\ k>n \tag{21}$$

**5. 王氏代数与偏导数之间的关系**

现在我们来叙述一条作为定理 3 的有用恒等式。它把一个子图的集合相对于一个子图集合的偏导数与王氏代数建立了联系。这一结果是由Chen(1968) 所给出的。

**定理3.** 令$g_1, g_2, \cdots, g_k$是图$G$的$k$个子图。还令$h_i = \{e;\ e$是$g_i$的一条边$\}$，$i = 1, 2, \cdots, k$ 与$h = h_1 * h_2 * \cdots * h_k$。那么对于一个$G$的子图集合$H$，我们有

$$\partial^k H / \partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k = \oplus\{g \oplus g_x\}, \tag{22}$$

式中，$g \subseteq H, g_x \subseteq g, g_x \subseteq W(h)$，环和是对所有可能的$\{g + g_x\}$求取。

**证明：** 从(20)式，我们有：

$\partial^k H / \partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k = \partial^k H / \partial e_{i_1}^1 \partial e_{i_2}^2 \cdots \partial e_{i_k}^k$的所有集合的环和，式中

$e_{i_j}^j$是$g_j$的一条边，$j = 1, 2, \cdots, k$；

$= \{g \oplus g_x\}$的所有集合的环和

式中$g \subseteq H, g_x \subseteq g$，$g_x = e_{i_1}^1 e_{i_2}^2 \cdots e_{i_k}^k$（具有的边全部相异）；

当且仅当$j = t$时，$e_{i_j}^j = e_{i_t}^t$；

$= \{g \oplus g_x\}$的所有集合的环和，

定理证毕。

**推论2.**

如果$g$是$G$的一个子图，则

$$\partial^k\{g\} / \partial g_1 \partial g_2 \cdots \partial g_k = \{g \oplus g_x,\ g_x \subseteq g \text{与} g_x \subseteq W(h)\} \tag{23}$$

作为一个示例，研究示于图$(a)$的图$G$。令

$g = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, g_1 = e_3 e_4, g_2 = e_1 e_2 e_5 e_6$ 则

$$\begin{aligned}
\partial^2\{g\} / \partial g_1 \partial g_2 &= \partial^2\{e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6\} / \partial e_3 e_4 \partial e_1 e_2 e_3 e_6 \\
&= \partial\{e_2 e_3 e_4 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_4 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_4 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_3 e_4 e_6\} / \partial e_3 e_4 \\
&= \{e_2 e_4 e_5 e_6,\ e_1 e_4 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_4 e_5,\ e_2 e_3 e_5 e_6, \\
&\quad e_1 e_3 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_5 e_6,\ e_1 e_2 e_3 e_5\}
\end{aligned} \tag{24}$$

我们还有

$h_1 = \{e_3,\ e_4\}$，$h_2 = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_6\}$，以及

$$h = h_1 * h_2 = \{e_1 e_3,\ e_1 e_4,\ e_2 e_3,\ e_2 e_4,\ e_5 e_4,\ e_3 e_6,\ e_4 e_6\} \tag{25}$$

于是$W(h) = h$。容易验证(24)式中的每一项是(25)式中每一项之补，所以证明了恒等式(23)之正确性。

最后，应该提到王氏代数与偏导数公式之间的关系最近还由Berger和Nathan (1968) 给出了证明。他们的公式是十分不同的，但是基本结果相同。

**6.树、补树与独立回路**

在本节中，我们将用王氏代数来列写出一个图的树、补树与独立回路之间的关系。正如前所提到，这种代数首先由王季同提出，他的意图是希望得到一条展开网络行列式的捷径。因为网络行列式与相应图的树与补树之间的内在关系，所以这种代数可用来产生一个图的树与补树。但是这一规则仅能应用到平面图中。丁氏（Ting. S. L.）在1935年推广了王氏的规则，使其可以应用到任意图形上。为了富有史实的趣味性，我们首先叙述他们的原始规则，然后用我们刚才定义过的术语来列出公式。他们的原始规则为：

把所有围成一个独立网孔的各边加在一起形成一个乘积的因子，把所有独立网孔的因子放在一起并将其乘出来。因此，从得到的乘积中选择：（1）所有由不同的电阻（边）形成的、且出现一次的项；（2）由不同的电阻形成的且出现奇数次的项组成若干组，再从各组中选出

一组的乘积项。上述各项的总和是公分母（即该图的补树）。

**定理4.**（王和丁）对于一个零度为$n$的连通图$G$，如果$C_1$，$C_2$，…，$C_n$是$G$的$n$个独立回路，那么$G$的补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$\bar{T}=W(h_1*h_2*\cdots*h_n)$，式中$h_i=\{e;\ e$是$C_i$的一条边$\}$，$i=1$，2，…，$n$。

证明：我们首先将证明$G$的补树$\bar{t}$包含在$W(h_1*\cdots*h_n)$中。假定为否，即存在着$G$的一个不包含在$W(h_1*\cdots*h_n)$中的补树$\bar{t}$。令$C_{f1}$，$C_{f2}$，…，$C_{fn}$是$G$中相对于$t$（$G$中$\bar{t}$的补）的$n$个$f$-回路集。因为$G$的每一个回路可以表示为$n$个$f$-回路集的线性组合（环和），由此得到$h_i=c_{i1}h_{f1}\oplus c_{i2}h_{f2}\oplus\cdots\oplus c_{in}h_{fn}$，此处$c_{ij}=1$或0，以及$1h_{fj}=h_{fj}$，$0h_{fj}=H_0$，$h_{fj}=\{e;\ e$是$C_{fj}$中的一条边$\}$，$j=1$，2，…，$n$。于是根据定理1，我们有$W(h_1*h_2*\cdots*h_n)=W(h_{f1}*h_{f2}*\cdots*h_{fn})$，由此得到$\bar{t}$在$W(h_{f1}*\cdots*h_{fn})$中而又不在$W(h_1*\cdots*h_n)$中，即出现了一个矛盾。因此$G$的每一个补树都包含在$W(h_1*\cdots*h_n)$中。因为$G$的每一个回路$C$可以包括在一组$n$个$G$的独立回路中，由此得到对于$W(h_1*\cdots*h_n)$中的每一个$w$，有$C\cap w\neq\phi$，即它们有公共边。下面我们必须证明在$W(h_1*\cdots*h_n)$中的每一项是一个补树。假设在$W(h_1*\cdots*h_n)$中存在一个元素$w$不是一个补树。那么$\bar{w}$，即$G$中$w$的补，必定是至少包含了一个回路（譬如说为$C$）的子图。因此$C\cap w=\phi$，又出现了一个矛盾，则定理证毕。

从定理1可知，如果$C_i$表示回路或为边不相接的回路之并，只要它们是（线性）独立的，显然上面的定理仍然正确。于是我们得到了*Maxwell*与*Cline*(*1966*)的结果。

**推论3.**（Maxwell和 Cline）。如果$C_1$，$C_2$，…，$C_n$是$G$的$n$个独立回路或为边不相接的回路之并，则

$$\bar{T}=W(h_1*h_2*\cdots*h_n)$$

最近，Chen与Mark(1969) 给出了一个重要的恒等式，它把一个图的树的集合与一个图相对于该图的$n$个独立回路集合的偏导数建立了联系。

**推论4.**（Chen和Mark)）。如果$C_1$，$C_2$，…，$C_n$是$G$的$n$个独立回路或为边不相接的回路之并，则$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T=\frac{\partial^n\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_n} \tag{26}$$

证明：从推论2与定理4，我们有：

$$\begin{aligned}\partial^n\{G\}/\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_n&=\{G\oplus\bar{t};\ \bar{t}\text{在}W(h_1*h_2*\cdots*h_n)\text{中}\}\\&=\{t;\ t\text{是}G\text{的一个树}\}\\&=T\end{aligned} \tag{27}$$

推论证毕。

**定理4.** 也已由 Bellert(1962) 用"结构数"的形式列出。除了结构数是用矩阵阵列表示之外，结构数代数基本上与王氏代数和丁氏代数相同。对于这些矩形阵列所定义的运算基本上与王氏代数中所定义的运算相同，例如见Chen(1967b)、Mullineux和Reed(1967)的论文。

为了减少利用数字计算机分析复杂网络（图）的计算时间，MacWilliams(1958) 建议把一个给定的图分成几个合适的连通小块，然后利用对每一部分进行适当的拓朴量的组合，从而得到所要求的解答。Hakimi和Green(1964)，以及Mayeda(1959)已讨论了某些可能的解。下面我们将证明Hakimi和Green的结论可从推论4得到。Mayeda 的方法将在后面的部分中进行讨论。

**推论5.**（*Hakimi*和*Green*）。令$G$是一个连通图$G'$的节点$i_1'$，$i_2'$，…，$i_k'$与另一个连通图

$G''$的节点$i''_1$，$i''_2$，…，$i''_k$相重合而得到的图，$1 \leqq k-1 \leqq \min(r', r')$，此处$r'$与$r''$分别是图$G'$与$G''$的秩。令$P'_{i_x i_{x+1}}$与$P''_{i_x i_{x+1}(x=1,2,\cdots,k-1)}$分别是连接节点$i'_x$与$i'_{x+1}$以及$i''_x$与$i''_{x+1}$的通路。如果$T$，$T'$与$T''$分别是$G$，$G'$与$G''$中的树的集合，则

$$T=\frac{\partial^{k-1}T' \times T''}{\partial(P'_{i_1 i_2} \cup P''_{i_1 i_2})\partial(P'_{i_2 i_3} \cup P''_{i_2 i_3})\cdots\partial(P'_{i_{k-1} i_k} \cup P''_{i_{k-1} i_k})} \tag{28}$$

**证明**：令$C_x = P'_{i_x i_{x+1}} \cup P''_{i_x i_{x+1}}$，不难看出回路$C_x(x=1, 2, \cdots, k-1)$是线性独立的。令$C'_j(j=1, 2, \cdots, n')$与$C''_t(t=1, 2, \cdots, n'')$分别是$G'$与$G''$中的独立回路的集合，使得$C'_1$，$C'_2$，…，$C'_{n'}$，$C''_1$，$C''_2$，…，$C''_{n''}$，$C_1$，$C_2$，…，$C_{k-1}$是$G$中$(n'+n''+k-1)$个独立回路，此处$n'$与$n''$分别为$G'$与$G''$的零度。因为$G$的零度等于$(n'+n''+k-1)$，由推论4得到：

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\partial^{n}\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}\partial C'_1\partial C'_2\cdots\partial C'_{n'}\partial C''_1\partial C''_2\cdots\partial C''_{n''}} \\
&= \frac{\partial^{n-n''}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}\partial C'_1\partial C'_2\cdots\partial C'_{n'}}\left[\frac{\partial^{n''}\{G'\}\times\{G''\}}{\partial C''_1\partial C''_2\cdots\partial C''_{n''}}\right] \\
&= \frac{\partial^{n-n''}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}\partial C'_1\partial C'_2\cdots\partial C'_{n'}}\left[\{G'\}\times\frac{\partial^{n''}\{G\}}{\partial C''_1\partial C''_2\cdots\partial C''_{n''}}\right] \\
&= \frac{\partial^{k-1}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}}\left[\frac{\partial^{n'}\{G'\}\times T''}{\partial C'_1\partial C'_2\cdots\partial C'_{n'}}\right] \\
&= \frac{\partial^{k-1}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}}\left[T''\times\frac{\partial^{n'}\{G'\}}{\partial C'_1\partial C'_2\cdots\partial C'_{n'}}\right] \\
&= \frac{\partial^{k-1}T'\times T''}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{k-1}}
\end{aligned} \tag{29}$$

推论证毕。

把推论5推广到两个图$G'$与$G''$之一是非连通图的情况已由Mark和Chen(1967) 研究过。假若$P'_{i_x i_{x+1}}$或$P''_{i_x i_{x+1}}=\phi$，即相对于$P'_{i_x i_{x+1}} \cup P''_{i_x i_{x+1}}$无偏导数，可以证明我们仍可利用推论5的公式用到产生$G$的树集合$T$上。同时如果$G'$（或$G''$）具有$m$个连通片，那么在该式中必须用$T'(I)$（或$T''(I)$）代替$T'$（或$T''$），此处$T'(I)$与$T''(I)$分别是$G'$与$G''$中的$m$-树的集合。这一推广的不同形式已由Jong等人给出(1966)。我们用下列例子来说明上述结果。

例1.研究图$(a)$中所示的图$G$。我们利用上面提出的方法来计算$G$的树之集合$T$。

令$C_1=e_1e_2e_3e_6$与$C_2=e_3e_4e_5$。根据定理4，$G$的补树集合$\bar{T}$可得到如下：

$$h_1=\{e_1, e_2, e_3, e_6\}\text{与}h_2=\{e_3, e_4, e_5\},$$

$$h_1 * h_2=\{e_1e_3, e_1e_4, e_1e_5, e_2e_3, e_2e_4, e_2e_5, e_3e_4, e_3e_6, e_4e_6, e_5e_6, e_3e_6\}$$

因此，$T=W(h_1 * h_2)=h_1 * h_2$，以及

$$T=\{e_2e_4e_5e_6,\ e_2e_3e_5e_6,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_3e_4e_6,\ e_1e_2e_5e_6,\ e_1e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_6,\ e_1e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_4e_5\}$$

我们还可利用推论4来产生$G$的树集合$T$，

$$\begin{aligned}
T &= \partial^2\{e_1e_2e_3e_4e_6e_5\}/\partial e_1e_2e_3e_6\partial e_3e_4e_5 \\
&= \partial\{e_1e_2e_3e_4e_6, e_1e_2e_3e_5e_6, e_1e_2e_4e_5e_6\}/\partial e_1e_2e_3e_6 \\
&= \{e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_5, e_1e_2e_4e_6, e_1e_2e_5e_6, e_1e_3e_4e_6, \\
&\quad e_1e_3e_5e_6, e_1e_4e_5e_6\ e_2e_3e_4e_6, e_2e_3e_5e_6, e_2e_4e_5e_6\}
\end{aligned}$$

如图$(b)$所示图$G$通过节点2与4分成两个子图$G'$与$G''$。令$P'_{24}=e_1e_2e_3$与$P'_{24}=e_6$。利用

推论5，我们有：

$$T=\partial\{e_1e_2e_6\}\times\{e_3e_4,e_3e_5,e_4e_5\}/\partial(e_1e_2e_6\cup e_3)$$
$$=\partial\{e_1e_2e_3e_4e_6,e_1e_2e_3e_5e_6,e_1e_2e_4e_5e_6\}/\partial e_1e_2e_3e_6$$
$$=\{e_1e_2e_3e_4,e_1e_2e_3e_5,e_1e_2e_4e_5,e_1e_2e_4e_6,e_1e_2e_5e_6,e_1e_3e_4e_6,e_1e_3e_5e_6,$$
$$e_1e_4e_5e_6,e_2e_3e_4e_6,e_2e_3e_5e_6,e_2e_4e_5e_6\}$$

**7. $k$-树、补$k$-树与独立回路**

令$G(I)$是从图$G$，利用短接$G$中的节点$i_1$，$i_2$，…，$i_k$，然后移去所有的自环$g_s$而形成的图，此处$I=\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$。因为在$G(I)$中的树与$G$中的$k$-树$t(I)$是一一对应的，可看出下列结果是正确的。

**推论6** 如果$C_1,C_2$，…，与$C_{n_s}$是$G(I)$的$n_s$个独立回路、或者为几个边不相接的回路之并。此处$n_s$是$G(I)$的零度。那么$G$的补$k$-树$\bar{t}(I)$的集合$\bar{T}(I)$由下式给出：$\bar{T}(I)=W(h_s*h_1*h_2*\cdots*h_{n_s})$，此处$h_i=\{e;\ e$是$C_i$的一条边$\}$，$i=1, 2, \cdots, n_s$，$h_s=\{g_s\}$。

**推论7.**

$$T(I)=\partial^{n_s}\{G(I)\}/\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_{n_s} \tag{30}$$

**推论8** (Hakimi和Green)。令$P_{i_xi_{x+1}}(x=1, 2, \cdots, k-1)$是连接节点$i_x$与$i_{x+1}$的一条通路。则$G$的$k$-树$t(I)$的集合$T(I)$由下式给出：

$$T(I)=\partial^{k-1}T/\partial P_{i_1i_2}\partial P_{i_2i_3}\cdots\partial P_{i_{k-1}i_k} \tag{31}$$

证明：我们可以假设$I$中的所有元素是相异的。若不是，则推论很简单地得到满足。我们对$k$用数学归纳法来证明此推论。令$k=2$与$G_1$是从$G$，利用在节点$i_1$与$i_2$之间连上一条添加边$e$而得到的图。根据推论5，$G_1$的树集合$T_1$由下式给出：

$$T_1=\partial(T\times\{e\})/\partial(P_{i_1i_2}\cup e)=\partial(T\times\{e\})/\partial(P_{i_1i_2}\oplus e)$$
$$=\partial(T\times\{e\})/\partial P_{i_1i_2}\oplus\partial(T\times\{e\})/\partial e$$
$$=\{e\}\times\partial T/\partial P_{i_1i_2}\oplus T\times\{\phi\}$$
$$=\{e\}\times\partial T/\partial P_{i_1i_2}\oplus T \tag{32}$$

因为$G$中的2-树$t(I)$与$G_1$中的一些树相一一对应，后者之中的每个树都包含了一条边$e$，由此得到$T_e=\{e\}\times T(I)$与

$$T_1=T_e\oplus T=\{e\}\times\partial T/\partial P_{i_1i_2}\oplus T, \tag{33}$$

此处$T_e$是$G_1$中树的集合，其中的每一个树都包含了一条边$e$。于是

$$T_e=\{e\}\times T(I)=\{e\}\times\partial T/\partial P_{i_1i_2}, \tag{34}$$

$$T(I)=\partial T/\partial P_{i_1i_2}, \tag{35}$$

因为集合$\{e\}\times\partial T/\partial P_{i_1i_2}$与$T$是不相交的。

下面，假设推论对于$k-1$是正确的。我们将证明它对于$k$也是正确的。亦即我们将证明$T(I)=\partial T(I-\{i_k\})/\partial P_{i_{k-1}i_k}$。如果$P_{i_{k-1}i_k}$有一条边，可以看出等式是正确的。现在，我们假设$P_{i_{k-1}i_k}$具有$m-1$条边时等式正确，那么我们将证明$P_{i_{k-1}i_k}$具有$m$条边时仍将正确。令$P_{i_{k-1}i_k}=e_{xi_k}\cup P_{i_{k-1}x}$，此处$e_{xi_k}$是连接节点$x$与$i_k$之间的一条边，并且$P_{i_{k-1}x}$是$P_{i_{k-1}i_k}$不包含$e_{xi_k}$的部分。因此，

$$\partial T(I-\{i_k\})/\partial P_{i_{k-1}i_k}=\partial T(I-\{i_k\})/\partial e_{xi_k}\oplus\partial T(I-\{i_k\})/\partial P_{i_{k-1}x}$$
$$=T(i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},x)\oplus T(I)\oplus T(i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},x)$$
$$=T(I) \tag{36}$$

推论证毕。

**8.树、补树与独立割集**

基于一个图的关联割集，与王和丁相对应的方法是由蔡（Tsai, C. T, 1939)所提出。蔡最初给出的规则为：

从给定的网络（图）去掉任意一个（称为参考点）的节点，最好是去掉尽可能多的网孔公共节点。重画网络图使参考点处汇合的所有网络支路开路，为方便起见，该网络称为“简化网络”。利用一个符号或一个数码来表示网络的每一条支路的导纳。然后在表（称为表$J$）中写下在不同连接点的简化网络的所有支路的导纳，使得表中每一行对应于每一个连接点，每一列对应于每一条支路。从该表中利用每一行与每一列中取一个导纳以形成所有可能的乘积，把每个乘积带正号地相加。从这一和式中，删去所有以下的乘积项，即删去可能形成简化网络的某网孔以支路导纳乘积而组成的因子。然后剩下的和是以最简形式所表示的$D(A)$（节点导纳矩阵的行列式，即所有可能的树乘积）的完全展开式…。因为每一个网孔把该网孔的不同支路引向该网孔的不同连接点有两种方式，……从表$J$中所得到的不希望项总是2的幂次。

采用我们前面所定义的术语与定义时，蔡氏规则可大大简化，并给出如下：

**定理5** （蔡）。对于一个秩为$r$的连通图$G$，如果 $Q_{i_1}$，$Q_{i_2}$，…，$Q_{i_r}$是$G$的$r$个关联割集，则$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T = W(h_1 * h_2 * \cdots * h_r),$$

此处$h_x = \{e;\ e$是$Q_{i_x}$的一条边$\}$，$x = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$。

本定理的证明与定理4的证明完全相似，这里从略。

因为$G$的任何一个割集或几个边不相接的割集之并可以表示成 $G$ 的关联割集的线性组合（环和），所以定理1的直接结果如下：

**推论9** （Maxwell和Cline）如果$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_r$是$r$个独立割集或几个边不相接的割集之并，则$T = W(h_1 * h_2 \cdots * h_r)$，式中$h_x = \{e;\ e$是$Q_x$的一条边$\}$，$x = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$。

**推论10** （Chen和Mark）。如果$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_r$是$r$ 个独立割集或为几个边不相接的割集之并，则$G$的补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$$\bar{T} = \frac{\partial^r\{G\}}{\partial Q_1 \partial Q_2 \cdots \partial Q_r} \qquad (37)$$

这一推论可从定理3而直接得到，并且完全可用类似于推论4的方法加以证明。

定理5还由Bellert(1962, 1963) 用“结构数”的形式，由Piekarski(1965) 用矢量的形式，由Maxwell和Cline(1966) 用“关联多项式”的形式，Mukherjee和Sarkar(1966)用“覆盖表”的形式以及其它的形式（Wózniacki 1961）列写出公式。但是他们本质上与蔡给出的结果相同。

现在我们来叙述一条与Hakimi和Green(1964) 的结论——即推论5相对偶的结论。

**推论11** （Chen和Mark）。令$G$通过一组节点$i_1, i_2, \cdots, i_k$分解为两个子图$G'$与$G''$，使得$G$可由$G'$的节点$i'_1$，$i'_2$，…，$i'_k$分别与$G''$的节点$i''_1$，$i''_2$，…，$i''_k$ 相重合而形成，此处$1 \leq k-1 \leq \min(r',\ r'')$，$r'$与$r''$分别是$G'$与$G''$的秩。如果$\bar{T}$，$\bar{T}'(I')$与$\bar{T}''(I'')$分别是$G$、$G'$与$G''$中形如$\bar{t}(I')$与$\bar{t}(I'')$的补树集合与补$k$-树的集合，此处$I' = \{i'_1,\ i'_2,\ \cdots,\ i'_k\}$与$I'' = \{i''_1,\ i''_2,\ \cdots,\ i''_k\}$，则

$$\bar{T} = \frac{\partial^{k-1}\bar{T}'(I') \times \bar{T}''(I'')}{\partial Q_{i_1} \partial Q_{i_2} \cdots \partial Q_{i_{k-1}}} \qquad (38)$$

式中$Q_{i_x}$是$G$中节点$i_x$的关联割集，$x=1, 2, \cdots, k-1$。

证明：为方便起见，令$G$的节点用下列方法来标记：包含在$G'$中的一些节点不是标为$i_1, i_2, \cdots, i_k$，而是标为$i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+m'}$，同时包含在$G''$中的那些节点不是标为$i_1, i_2, \cdots, i_k$，而是标为$i_{k+m'+1}, i_{k+m'+2}, \cdots, i_{k+m'+m''}$，此处$m'+k$与$m''+k$分别为$G'$与$G''$中的节点数。因此，$Q_{i_u}=Q'_{i_u}$，$u=k+1, k+2, \cdots, k+m'$；$Q_{i_u}=Q''_{i_u}$，$u=k+m'+1, k+m'+2, \cdots, k+m'+m''$；$Q_{i_u}=Q'_{i_u}\oplus Q''_{i_u}$，$u=1, 2, \cdots, k$。此处$Q'_{i_u}$与$Q''_{i_u}$分别是$G'$与$G''$的节点$i'_u$与$i''_u$的关联割集。利用推论10，我们有

$$
\begin{aligned}
\bar{T} &= \frac{\partial^{m'+m''+k-1}\{G\}}{\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}\partial Q_{i_{k+1}}\partial Q_{i_{k+2}}\cdots\partial Q_{i_{k+m'}}\partial Q_{i_{k+m'+1}}\cdots\partial Q_{i_{k+m'+m''}}} \\
&= \frac{\partial^{m'+m''+k-1}\{G'\}\times\{G''\}}{\partial Q_{i_1}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}\partial Q'_{i_{k+1}}\cdots\partial Q'_{i_{k+m'}}\partial Q''_{i_{k+m'+1}}\cdots\partial Q''_{i_{k+m'+m''}}} \\
&= \frac{\partial^{m'-k-1}}{\partial Q_{i_1}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}\partial Q'_{i_{k+1}}\cdots\partial Q'_{i_{k+m'}}}\left[\{G'\}\times\frac{\partial^{m''}\{G''\}}{\partial Q''_{i_{k+m'+1}}\cdots\partial Q''_{i_{k+m'+m''}}}\right] \\
&= \frac{\partial^{k-1}}{\partial Q_{i_1}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}}\left[\frac{\partial^{m'}\{G'_s\}}{\partial Q'_{i_{k+1}}\cdots\partial Q'_{i_{k+m'}}}\times\frac{\partial^{m''}\{G''_s\}}{\partial Q''_{i_{k+m'+1}}\cdots\partial Q''_{i_{k+m'+m''}}}\right] \\
&= \frac{\partial^{k-1}\bar{T}'_s\times\bar{T}''_s}{\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

式中$\bar{T}'_s$与$\bar{T}''_s$分别是$G'_s$与$G''_s$中的补树的集合。$G'_s$与$G''_s$分别是从$G'$与$G''$，利用短接节点$i'_1, i'_2, \cdots, i'_k$，与短接节点$i''_1, i''_2, \cdots, i''_k$，并且保留所有的自环而得到的图。这一推论可直接从下列事实中得出：在$G'_s$与$G''_s$中的补树分别是$G'$与$G''$中的补$k$-树。因此我们得到了所希望的结果，推论证毕。

注意，在推论11中，图$G'$与$G''$无需是连通的。但是，我们假设$G$是连通的。这的确是一个所非常希望具有的特点，因为我们能把$G$分解为$G'$与$G''$，而其中每一个包含了许多个连通片。

我们将用下列例子来说明上面的结果。

例2.研究示于图($a$)中的图$G$。我们将利用上面提出的方法来例举$G$的树集合$T$与补树集合$\bar{T}$。

根据定理5，得到$G$的树集合$T$如下：

$$h_1=\{e_1,e_2\}, h_2=\{e_2,e_3,e_4\}, h_3=\{e_4,e_5\} \text{与} h_5=\{e_1,e_6\};$$

$$
\begin{aligned}
h_1*h_2*h_3*h_5=\{&e_1e_2e_4e_5, e_1e_2e_5e_6, e_1e_3e_4e_6, e_1e_3e_5e_6, e_1e_4e_5e_6, e_2e_3e_4e_1, \\
&e_2e_3e_4e_6, e_2e_3e_5e_1, e_2e_3e_6e_5, e_2e_4e_5e_6, e_2e_4e_5e_1\}
\end{aligned}
$$

因此，$T=W(h_1*h_2*h_3*h_5)=h_1*h_2*h_3*h_5$

我们可以利用推论10来产生$G$的补树集合$\bar{T}$。令$Q_1=e_1e_6$，$Q_2=e_2e_6$，$Q_3=e_3e_5e_6$以及$Q_4=e_4e_5$。那么

$$
\begin{aligned}
\bar{T} &= \partial^4\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}/\partial e_1e_6\partial e_2e_6\partial e_3e_5e_6\partial e_4e_5 \\
&= \partial^3\{e_1e_2e_3e_5e_6, e_1e_2e_3e_4e_6\}/\partial e_1e_6\partial e_2e_6\partial e_3e_5e_6 \\
&= \partial^2\{e_1e_2e_5e_6, e_1e_2e_3e_6, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_6, e_1e_2e_3e_4\}/\partial e_1e_6\partial e_2e_6 \\
&= \partial\{e_1e_5e_6, e_1e_2e_5, e_1e_3e_6, e_1e_2e_3, e_1e_3e_5, e_1e_4e_6, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4\}/\partial e_1e_6 \\
&= \{e_5e_6, e_1e_5, e_2e_5, e_3e_6, e_1e_3, e_2e_3, e_3e_5, e_4e_6, e_1e_4, e_2e_4, e_3e_4\}
\end{aligned}
$$

图$G$可以如图（$b$）中所示，在节点2与4将其分为两个子图$G'$与$G''$。利用推论11，我们有：

$\bar{T}'(2,4)=\{e_1,e_2,e_6\}$以及$\bar{T}''(2,4)=\{e_3e_4,e_3e_5\}$；

$$\bar{T}=\partial(\{e_1,e_2,e_6\}\times\{e_3e_4,e_3e_5\})/\partial e_2e_3e_4$$
$$=\partial\{e_1e_3e_4,e_1e_3e_5,e_2e_3e_4,e_2e_3e_5,e_3e_4e_6,e_3e_5e_6\}/\partial e_2e_3e_4$$
$$=\{e_3e_4,e_3e_5,e_1e_4,e_1e_5,e_2e_4,e_2e_5,e_4e_6,e_5e_6,e_1e_3,e_2e_3,e_3e_6\}$$

从我们刚才计算过的两个例子不难看出，根据经验若该图的零度较小，则用独立回路来生成树（补树）的方法要比用独立割集的方法要更有效，若该图的秩较小，则反之。显然，若图的秩与零度二者均较大，则我们首先将其分解为子图$G'$与$G''$，然后用推论5或推论11求得所希望的树（补树）的集合。如果子图$G'$与$G''$仍然具有大的秩与零度，首先，人们可以利用类似的方法来确定子图$G'$与$G''$的树集合。但是在$G'$与$G''$中的树（补树）的数目要远小于原有图中的树（补树）的数目。

**9．$k$-树，补$k$-树与独立割集**

现在叙述与§7相对偶的结果。由于割集的特点，这些结果中的某些公式可写成更加方便的形式。

**推论12**（Chen和Mark）。如果$Q_1$，$Q_2$，…，与$Q_{r_s}$是$G(I)$的$r_s$个独立割集或为几个边不相接的割集之并，此处$G(I)$与§7中的定义相同，$r_s$是$G(I)$的秩，那么$G$的$k$-树$t(I)$的集合$T(I)$由下式给出：$T(I)=W(h_1*h_2*\cdots*h_{r_s})$，式中$h_i=\{e;\ e是Q_i中的一条边\}$，$i=1,2,\cdots,r_s$以及$I=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}$。

不失一般性，我们假设给定的图$G$是连通的。

**推论13**（Chen 1966）。如果$Q_{i_x}$是$G$的节点$i_x$的$r+1$个关联割集，$x=1,\ 2,\ \cdots,\ r+1$，则$G$的$k$-树$t(I)$的集合$T(I)$由下式给出：

$$T(I)=W(h_{k+1}*h_{k+2}*\cdots*h_{r+1}),\tag{40}$$

式中$h_x=\{e;\ e是Q_{i_x}的一条边\}$，$x=1,\ 2,\ \cdots,\ r+1$。

证明：这一推论可直接从推论12与下列事实得到——$Q_{i_x}=Q_{i_x}^{I}$，$x=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ r+1$，此处$Q_{i_x}^{I}$是$G(I)$中在节点$i_x$处的关联割集。

**推论14**（Chen和Mark）：

$$\bar{T}(I)=\partial^{r_s}\{G\}/\partial Q_1\partial Q_2\cdots\partial Q_{r_s}$$
$$=\{g_s\}\times\partial^{r_s}\{G(I)\}/\partial Q_1\partial Q_2\cdots\partial Q_{r_s},\tag{41}$$

式中，$Q_i$与推论12中的定义相同，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r_s$。$g_s$是把$G$的节点$i_1$，$i_2$，…，$i_k$短接后，包含了所得图的自环的子图。

**推论15**（Chen和Mark）如果$Q_{i_1i_2\cdots i_{k-1},i_k}$是一个把节点$i_k$从$i_1$，$i_2$，…，$i_{k-1}$，分离开的割集，那么

$$\bar{T}(I-\{i_k\})=\partial\bar{T}(I)/\partial Q_{i_1i_2\cdots i_{k-1},i_k}\tag{42}$$

**推论16** 如果$Q_{i_x}$是节点$i_x$的关联割集，$x=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$，则$G$的补树集合$\bar{T}$与$G$的补$k$-树集合$\bar{T}(I)$的关系为：

$$\bar{T}=\partial^{k-1}\bar{T}(I)/\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}。\tag{43}$$

证明：令$Q_{i_x}$是节点$i_x$的关联割集，$x=1,\ 2,\ \cdots,\ r+1$。式中，$r$是$G$的秩。利用推论10，我们有：

$$\bar{T}=\partial^r\{G\}/\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}\partial Q_{i_{k+1}}\partial Q_{i_{k+2}}\cdots\partial Q_{i_{r+1}}$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}}\left[\frac{\partial^{r-k+1}\{G(I)\}}{\partial Q_{i_k}\partial Q_{i_{k+1}}\cdots\partial Q_{i_{r+1}}}\times\{g_s\}\right]$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}}\left[\frac{\partial^{r-k+1}\{G(I)\}}{\partial Q'_{i_k}\partial Q'_{i_{k+1}}\cdots\partial Q'_{i_{r+1}}}\times\{g_s\}\right]$$

$$= \frac{\partial^{k-1}T'\times\{g_s\}}{\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}}$$

$$= \partial^{k-1}T(I)/\partial Q_{i_1}\partial Q_{i_2}\cdots\partial Q_{i_{k-1}}, \tag{44}$$

式中，$G(I)$与$g_s$在推论14中已定义过；$T'$表示了$G(I)$的补树集合；$Q'_{i_x}$是$G(I)$中在节点$i_x$处的关联割集，$x=k+1$，$k+2$，…，$r+1$。(44)式的第二行与第三行是从下列事实而得到的——$\{G\}=\{G(I)\}\times\{g_s\}$以及$Q_{i_x}=Q'_{i_x}$，$x=k+1$，$k+2$，…，$r+1$，同时将推论10用于第三行就得到了我们所希望的结果。定理证毕。

## 结　　论

在本文中，我们已经指出：文献中关于一个图的树的生成问题的许多现有结果，在表面上看来似乎有所不同，但是实际上都是王氏代数的变型。因此，它能帮助人们提供一种统一理论，并对绝大多数结论进行了系统化的总结。

王氏代数的主要优点在于，从一个给定图一旦导出了各集合的一个所希望的集合（它可很容易地用观察法来得到），所有其余的运算全是代数运算。人们无需从一个集合而返回到原始图，以察看一个生成项是否形成树（补树）。但是这种方法对于大型图不并是非常有效的，因为在计算过程中产生了重复项。这除了减慢生成树的过程之外，它还限制了所进行分析电路的规模，因为人们必须在计算机的存储器中保留树的集合，同时必须将每一个新树与之相核对是否是重复项。王氏代数对应用到有向树及有向$k$-树中已由Chen(1966)作了研究。最近它的一种特殊情况由Shinoda(1968)给出。

## 参　考　文　献


[1] BELLERT, S., 1962, *J. Franklin Inst.*, 274, 425; 1963, *Archiwum Elektrotechniki*, 12, 473.
[2] BERGER, I., and NATHAN, A., 1968, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 15, 221.
[3] BROWN, W. S., 1963, *Bell Syst. tech. J.*, 42, 2081.
[4] CHEN, WAI-KAI, 1965 a, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 12, 85; 1965 b, *Proc. 3rd Allerton Conf. on Circuit and System Theory*; University of Illinois, Urbana, p. 889; 1966, *SIAM J. appl. Math.*, 14, 550; 1967 a, *Proc. Instn elect. Engrs*, 114, 1630; 1967 b, *Ibid.*, 114, 86; 1968, *Electronics Lett.*, 4, 456.
[5] CHEN, WAI-KAI, and MARK, S. K., 1969, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 16, 176.
[6] CHOW, W. L., 1940, *J. Chin. math. Soc.*, 2, 321.
[7] DUFFIN, R. J., 1959, *Trans. Am. math. Soc.*, 93, 114.
[8] EDELMANN, H., 1967, *Arch. elektr. Übertr.*, 21, 622.
[9] FARBER, D. J., GRISWOLD, R. E., and POLONSKY, I. P., 1964, *J. Ass. comput. Mach.*, 11, 21.
[10] HALE, H. W., 1961, *Pwr Appar. Syst.*, 80, 195.
[11] HAKIMI, S. L., and GREEN, D. G., 1964, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 11, 247.
[12] JONG, M. T., LAU, H. C., and ZOBRIST, G. W., 1966, *Electronics Lett.*, 2, 318.
[13] KIRCHHOFF, G., 1847, *Annln Phys.*, 72, 497.
[14] McCARTHY, J., ABRAHAMS, P. W., EDWARDS, D. J., HART, T. P., and LEVIN, M. I., 1961, *LISP 1.5 Program Manual* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press).
[15] MACWILLIAMS, F. J., 1958, *I.R.E. Trans. Circuit Theory*, 5, 228.
[16] MARK, S. K., and CHEN, W. K., 1967, *Proc. 1st Asilomar Conf. on Circuits and Systems*,

Pacific Grove; California; p. 659.
[17] MAXWELL, J. C., 1892, *Electricity and Magnetism* (Oxford: Clarendon Press); Chap. VI and Appendix.
[18] MAXWELL, L. M., and CLINE, J. M., Jr., 1966, *Proc. Instn elect. Engrs*, 113, 1344.
[19] MAYEDA, W., 1959, *I.R.E. Trans. Circuit Theory*, 6, 136.
[20] MAYEDA, W., and VAN VALKENBURG, M. E. 1957, *IRE WESCON Conv. Rec.*, Pt. 2.5, 137.
[21] MUKHERJEE, T., and SARKAR, P. K., 1966, *Int. J. Control*, 4, 465.
[22] MULLINEUX, N., and REED, J. R., 1967, *Proc. Instn elect. Engrs*, **114**, 210.
[23] PIEKARSKI, M., 1965, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, **12**, 124.
[24] RODE, F., and CHAN, S. P., 1968, *Electronics Lett.*, 4, 256.
[25] SHINODA, S., 1968, *Electronics and Communications in Japan* **51-A**, 45.
[26] SYLVESTER, J. J., 1855, *Q. Jl pure. appl. Math.*, 1, 42.
[27] TING, S. L., 1935, *Chin. J. Phys.*, 1, 18.
[28] TSAI, C. T., 1939, *Chin. J. Phys.*, 3, 148.
[29] WANG, K. T., 1934, *Mem. natn. Res. Inst. Engng, Shanghai*, 2, 1.
[30] WATANABE, H., 1960, *I.R.E. Trans. Circuit Theory*, 7, 296.
[31] WRZNIACKI, H., 1961, *Archiwum Elektrotechniki*, 10, 57.
[32] YNGVE, V. H., 1961, *COMIT Programmer's Reference Manual* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press).
[33] ZOBRIST, G. W., and LAGO, G. V., 1964, *Proc. Second Allerton Conference on Circuit and System Theory*, University of Illinois, Urbana, p. 573.

# 八、关于产生一个图的树的统一理论（II）

## 第二部分　矩阵公式法

### 摘　要

在文献中已经相当广泛地论述了有效地生成一个图的树的问题。在本系列论文的这一部分，将指出现有的许多方法可用矩阵方法来列写。因此，它们是统一的。这种统一理论使人们能系统地总结许多现有结果并且提供一种推导它们的简易方法。这里的第二部分可与第一部分相独立地阅读（见Chen，1969）。

**1.引言**

在第一部分（Chen，1969），我们已经指出在文献中关于产生一个图的树的问题，现有的许多方法看起来它们的表现形式有所不同，但是实际上都是王氏代数公式的变型。在此第二部分中，我们将指出其它关于树的生成方法可用矩阵代数来列出公式。

**2.预备知识与定义**

一个图的树和补树与某种类型矩阵之间有密切关系并不是新发现。基尔霍夫（1847）首先观察到一个网络（图）的回路阻抗矩阵的行列式展开简单地表现为该图的“补树阻抗乘积”。相对偶的结论由麦克斯韦（1892）给出，他叙述为：一个网络的节点导纳矩阵的行列式之展开式与该图的树有一一对应的关系。正如第一部分中所提到，在计算一类由Sylvester（1855）称为同号行列式（*unisignant*）时这些公式是一条捷径。称为这一术语的理由是由于这种行列式的展开式中的所有项均为正值。虽然Sylvester与基尔霍夫是同时代的，但是，他似乎并无觉察到与电网络对应的行列式也是同号行列式。为了把这些问题列写为一个电网络的问题，必须给一个图的各条边规定方向。令$G''$是一个从给定的图$G$，利用任意地给每一条边规定方向而得到的有向图。$G''$称为$G$的伴随有向树。我们还假设$G''$的回路与割集也是有方向的（见Seshu和Reed 1961）。

在本文中，符号$n$、$b$与$c$分别表示$G$或$G''$的节点数、边数与连通片数。我们分别用$r$与$m$来表示$G$（或$G''$）的秩与零度。即$r=n-c$与$m=b-n+c$。我们假设$G$与$G''$的各节点用1，2，…，$n$来标记，其边用$e_1$，$e_2$，…，$e_b$来表示。如果$g$是$G$或$G''$的一个子图，所谓$f(g)$，我们意指$g$的各个边标识符$e_s$的乘积。

为方便起见，我们把秩分别为$r$，$r$与$m$的$G$的关联矩阵、割集矩阵与回路矩阵记作$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$；$G''$的对应矩阵为$\boldsymbol{A}''$、$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{B}''$。这些矩阵用通常的方法（见Seshu与Reed）来定义。但是应该注意矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$是模2域中的矩阵，而$\boldsymbol{A}''$、$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{B}''$是在实数域中的矩阵。众所周知，在$\boldsymbol{Q}$或$\boldsymbol{Q}''$（$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}''$）中的非零主行列式与$G$（或$G''$）的树（或补树）之间存在着一一对应的关系。此外，如果$\boldsymbol{Q}_f''$与$\boldsymbol{B}_f''$分别是基本割集矩阵与基本回路矩阵的话，则它

们所有的子方阵的行列式所具有的值为1、-1或0。这对于$\boldsymbol{A}''$也类似成立。为简单起见，我们用下标$t$来表示一个矩阵的转置。例如，$\boldsymbol{B}_t$表示$\boldsymbol{B}$的转置。

**3. 树、补树与同号行列式**

不失一般性地我们假设$G$是连通的。令$\boldsymbol{D}$是$b$阶对角线矩阵，其第$i$个元素表示了$G$或$G''$中标识为$e_i$的边。除非另有规定，我们假设$G$的矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$或$G''$的矩阵$\boldsymbol{A}''$、$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{B}''$的各列和$\boldsymbol{D}$的各行（或各列）以相同的次序来排列。

**定理1** （基尔霍夫 1847）：

$$\det \boldsymbol{Z}_m = k^2 \Sigma f(\bar{t}), \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{Z}_m = \boldsymbol{B}''\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_t''$；$\bar{t}$是$G$或$G''$的补树；$k$是一个整数，对于一个给定的$\boldsymbol{B}''$，它是固定的；和式是对$G$或$G''$中所有的$\bar{t}$求取。

至少有两种情况、整数$k$的值为1；对于基本回路集合的情况$k^2=1$，对于平面图的窗口集合的情况$k^2=1$。Okada（1955）证明了$k$等于$\pm 2^i$，$i$是一个非负整数，如果$m$个回路与$m$个面一起，假设每一个回路是一个面的边界，则由此而得到的拓扑结构称为不定取向的多面体。Seshu和Reed（1961）已暗示这一结果是普遍正确的。但从Chen（1969 a）所给出的例子，其中$k=9$，所得到的结果并非是这一结论。

**定理2** （Maxwell 1892）

$$\det \boldsymbol{Y}_n = \Sigma f(t), \tag{2}$$

式中$\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{A}''\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_t''$；$t$是$G$或$G''$的一个树；和式是对$G$或$G''$的所有可能的$t$求取。

若用基本割集矩阵$\boldsymbol{Q}_f''$来代替$\boldsymbol{A}''$，定理2仍然成立。但是，用观察法得到矩阵$\boldsymbol{Q}_f''\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Q}_f'')_t$的规律要比得到矩阵$\boldsymbol{A}''\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_t''$的规律要更为复杂。矩阵$\boldsymbol{Z}_m$与$\boldsymbol{Y}_n$分别称为回路阻抗矩阵与节点导纳矩阵。在计算同号行列式，尤其在它的元素是用文字形式而非用数字形式表示时，上面的公式提供了一条捷径。反之，Okada与Onodera（1952，1954），以及Trent(1954)独立地提出这些公式也可用以产生一个图的树与补树的集合。但是相反的过程并不那么有效，原因在于在这些行列式的展开式中存在着大量的相消项。尽管如此，它们还是提供了一种简单、精致地确定$G$的树与补树数目的方法。为完整性起见，我们将首先叙述用观察法得到$\boldsymbol{Z}_m$与$\boldsymbol{Y}_n$元素的规律，然后给出$G$的各个树与补树的行列式的公式。

令 $\boldsymbol{Z}_m = [z_{ij}]$　　$\boldsymbol{Y}_n = [y_{ij}]$ (3)

得到$z_{ij}$与$y_{ij}$的规则给出如下：

$z_{ii}$ = 包含在相应于$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}''$的第$i$行的回路中的各边标识符$e_x$之和，$i=1, 2, \cdots, m$；

$z_{ij}$ = 对应于$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}''$中的第$i$行与第$j$行两个回路的公共边之标识符$e_x$之和，当两个回路经过$e_x$的绕行方向相同，则$e_x$的前缀带“+”号，若二者经过$e_x$的绕行方向相反时，则前缀带“-”号，$i \neq j$，$i, j=1, 2, \cdots, m$；

$y_{ii}$ = 包含在相应于$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{A}''$的第$i$行的关联割集中的各边标识符$e_x$之和，$i=1, 2, \cdots, r$，以及

$y_{ij}$ = -（连接$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{A}''$的第$i$行与第$j$行节点的各边标识符$e_x$之和），$i \neq j$，$i, j=1, 2, \cdots, r$。

现在可很容易地把定理1与定理2的结果叙述如下：

**推论1** 令 $e_x=1$，$x=1, 2, \cdots, b$。则$G$的树与补树的数目$\alpha(T)$与$\alpha(\bar{T})$分别由$\alpha(T) = \det \boldsymbol{A}''\boldsymbol{A}_t''$与$\alpha(\bar{T}) = \det \boldsymbol{B}_f''(\boldsymbol{B}_f'')_t$给出。

这一推论已由Brooks等人（1940），Okada和Onodera（1952，1954），以及Trent(1954)

重新发现。Tutte（1948），Aardenne-Ehrenfest和Bruijn（1951），Bott和Mayberry(1954)，以及Chen（1966 b）已推广到有向图中。对于这些Harary（1967）已作了总结。

显然，如果对于所有的$x$，$e_x=1$，$y_{ii}$表示了相应于$\boldsymbol{A}''$的第$i$行的节点之度数，$-y_{ij}$（$i\neq j$）表示了连接相应于$\boldsymbol{A}''$的第$i$行与第$j$行的节点之间边之数目。对于$z_{ij}$也可得到类似的结果。因为$\boldsymbol{Y}_n$与$\boldsymbol{Z}_m$的特殊形式，其行列式是不难计算的，（例如见Chen 1966 b)。如果$G$无并列边，并且在$\boldsymbol{Y}_n$中我们把所有各列加到$\boldsymbol{Y}_n$的第1列上，则第1列将仅仅包含1或0。现在我们可利用这一列来“消去”其它为非零值的非对角线元素。因此这一推论提供了计算$G$的树与补树数目的一个精巧与有效的方法。有人认为这一方法要优越于现有的许多方法（如Myers 1967，Kasai等人，1966)。为了简化某种类型$\boldsymbol{Y}_n$的计算，已由O'Neil与Slepian（1966)对这些情况导出了几个公式。

**4.同号行列式的迭代计算法**

与一个图$G$相对应的节点导纳矩阵$\boldsymbol{Y}_n$，有时还有回路阻抗矩阵$\boldsymbol{Z}_m$，具有下列形式：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \sum_{x=1}^{r} e_{1x} & -e_{12} & -e_{13} & & -e_{1r} \\ -e_{21} & \sum_{x=1}^{r} e_{2x} & -e_{23} & \cdots & -e_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -e_{r1} & -e_{r2} & -e_{r3} & \cdots & \sum_{x=1}^{r} e_{rx} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

在$|\boldsymbol{U}|$的展开式中的所有项均为正值，正因为如此，Sylvester（1855）称这种行列式为同号行列式（*unisignant*)。Sylvester证明了一个对称的同号行列式的展开式中的各项简单地就是$G$的“树支乘积”，对无互感的无源网络的节点导纳矩阵的行列式，Maxwell（1892）得出了类似的结果。最近，Chen（1965）推广了他们的工作，并证明在非对称的同号行列式展开后的各项简单地就是该矩阵对应的伴随有向图的“有向树乘积”。当矩阵为对称时，此结果即简化为Sylvester和Maxwell的结果。

下面，我们要讨论由Chen（1968 c）所提出的一种方法，即改进了同号行列式的拉普拉斯展开，其中将迭代地消除同号行列式的所有相消项，因此，将大大地减少了进行行列式展开的工作量。所以这种方法可用来产生$G$的全部树与补树，且没有重复而产生的多余项。

迭代地消除同号行列式中相消项的方法可如下地实现，把(4）式的第一列用其它所有列的和来代替。这将得到一个有相同行列式的新矩阵：

$$\begin{bmatrix} e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & \cdots & -e_{1r} \\ e_{22} & \sum_{x=1}^{r} e_{2x} & -e_{23} & \cdots & -e_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{rr} & -e_{r2} & -e_{r3} & \cdots & \sum_{x=1}^{r} e_{rx} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

为方便起见，将(5）式称为(4）式的改进形式或简称为$\boldsymbol{U}$用改进型来表示。现在我们沿第一列用拉普拉斯展开法展开(5）式，我们有：

$$\det \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{r} e_{ii} \Delta_{i1}, \tag{6}$$

式中$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{M}_{ij}$，$\boldsymbol{M}_{ij}$是从(5) 式删去第$i$行与第$j$列而得到的子矩阵。在$i=1$时，$\boldsymbol{M}_{11}$可以表示成以相邻的各列加到$\boldsymbol{M}_{11}$的第一列上的改进型式。在$i \neq 1$时，$\boldsymbol{M}_{i1}$也可以表示成改进型式，即简单地把第 $(i-1)$ 列移到第 1 列的位置，而其它各列仍保持原来的次序。照此办理，需要交换 $(i-2)$ 的总数已足够。因为所得矩阵第一列的各元素带有负号，令该列的所有元素改为正号，并记所导出的矩阵为$\boldsymbol{M}_{i1}^{*}$。不难看出$\boldsymbol{M}_{i1}^{*}$是$\boldsymbol{M}_{i1}$的改进形式，且

$$\Delta_{i1} = (-1)^{i+1}(-1)^{i-2}(-1)\det \boldsymbol{M}_{i1}^{*} = \det \boldsymbol{M}_{i1}, \tag{7a}$$

$$\det \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{r} e_{ii} \det \boldsymbol{M}_{i1} \tag{7b}$$

因而，我们已经证明，对于一个给定的用改进型表示的同号式矩阵，其行列式可表示为另一些改进型的同号式矩阵之行列式的加权之和，而后者的阶数要比前者低。这一过程可重复进行，直到同号式矩阵成为 1 阶矩阵时为止。

仅需作少量的修改，相同的方法还可用来产生2-树的集合（Chen 1968 c)。此外，如果令所有各边的边标识符为 1，则这一过程可相当有效地来计算$G$的树与2-树的数目。我们用下列例子来加以说明。

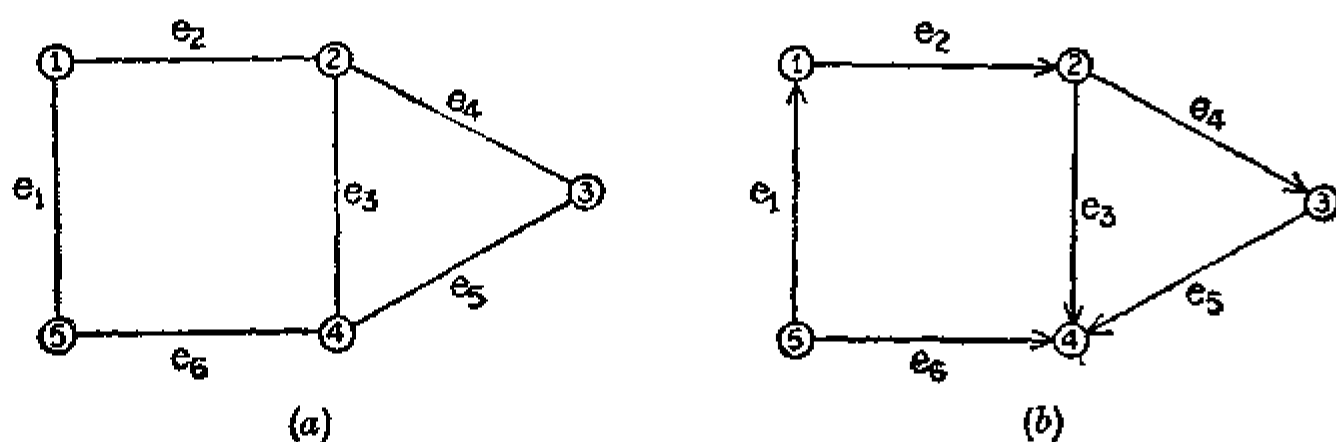



图1

(a) 一个给定的图G　　　　(b) G的伴随有向图G″

例 1．研究图1($a$) 所示的图$G$。$G$的相应的节点导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_n$ 的行列式（$\boldsymbol{Y}_n$用改进形式表示）及所展成低阶同号式矩阵（也用改进形式表示）的行列式给出如下：

$$\det \boldsymbol{Y}_n = \begin{vmatrix} e_1+e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ -e_2 & e_2+e_3+e_4 & -e_4 & -e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4+e_5 & -e_5 \\ 0 & -e_3 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2+e_3+e_4 & -e_4 & -e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4+e_5 & -e_5 \\ e_6 & -e_3 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$=e_1\begin{vmatrix} e_2 & -e_4 & -e_3 \\ 0 & e_4+e_5 & -e_5 \\ e_6 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}+e_6\begin{vmatrix} 0 & -e_2 & 0 \\ e_3 & e_2+e_3+e_4 & -e_4 \\ e_5 & -e_4 & e_4+e_5 \end{vmatrix}$$

$$=e_1\left(e_2\begin{vmatrix} e_4 & -e_5 \\ e_3+e_6 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}+e_6\begin{vmatrix} e_3 & -e_4 \\ e_5 & e_4+e_5 \end{vmatrix}\right)$$

$$+e_6\left(e_3\begin{vmatrix} e_2 & 0 \\ e_4 & e_4+e_5 \end{vmatrix}+e_5\begin{vmatrix} 0 & -e_2 \\ e_4 & e_2+e_3+e_4 \end{vmatrix}\right)$$

$$=e_1e_2(e_3e_4+e_4e_5+e_4e_6+e_3e_5+e_5e_6)+e_1e_6(e_3e_4+e_2e_5+e_4e_5)$$

$$+e_6e_3(e_2e_4+e_2e_5)+e_6e_5e_2e_4$$

如果我们令所有的边标识符为 1，则

$$\det \boldsymbol{Y}_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=5+3+2+1=11$$

因此$G$中有11个树。

**5、同号行列式的折边行列式的计算**

另一种用与计算一个网络的“树支导纳乘积” 之和的算法是由Nakagawa（1958）提出的。这里我们将指出他的称为“折边行列式”（foldant） 的展开式非常类似于我们的改进形式的同号式矩阵。最近Chang和Chan（1968)应用了类似的思想建立了他们的“$T$—三角形”。

令$\boldsymbol{W}$是一个$r\times r$阶上三角矩阵。然后由下式递归地定义折边行列式$\boldsymbol{W}$。 在$r=1$ 时，foldant$\boldsymbol{W}=w_{11}$，在$r\geqq 2$时，

$$\text{foldant}\boldsymbol{W}=\sum_{i=1}^{r} w_{ir}\text{foldant}\boldsymbol{F}_i \tag{8}$$

式中$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]$，$\boldsymbol{F}_i$是从$\boldsymbol{W}$而得的$r-1$阶矩阵——即删除$\boldsymbol{W}$中的第$r$行与第$r$列，然后用下列矩阵代替所得矩阵的第$i$行，

$$[f_{i1}\quad f_{i2}\cdots f_{i(r-1)}], \tag{9}$$

式中，在$k<i$时，$f_{ik}=0$，在$k\geqslant i$，$i$，$k=1$，2，…，$r-1$时，$f_{ik}=w_{ik}+w_{(k+1)r}$，$\boldsymbol{F}_r$是一个从$\boldsymbol{W}$中删去第$r$行与第$r$列而得到的矩阵。

**定理3** 如果$\boldsymbol{U}$是一个如(4) 式所示的对称同号式矩阵，如果$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]$ 是一个$r\times r$ 阶的三角形矩阵，使得在$i\leqslant j$时$w_{ij}=e_{i(j+1)}$，$i$，$j=1$，2，…，$r$，其中$e_{ii}=e_{i(r+1)}$，在$i>j$时，$w_{ij}=0$，那么

$$\det\boldsymbol{U}=\text{foldant}\boldsymbol{W} \tag{10}$$

这条定理是很容易对同号式矩阵的阶数，利用数学归纳法来加以证明。

令$\mathbf{W}^*$是从$\mathbf{W}$中用1代替每一个$e_{ij}$而得到的矩阵。还令$\alpha(T)$与$\alpha(\bar{T})$分别是$G$的树与补树的数目。

**推论2** (Nakagawa 1958) 如果$\mathbf{Y}_n$是与一个连通图$G$相对应的节点导纳矩阵，那么

$$\alpha(T)=\text{foldant}\,\mathbf{W}^*, \tag{11a}$$

$$\text{foldant}\,\mathbf{W}=\sum f(t) \tag{11b}$$

式中，$t$是$G$的一个树，和式是对$G$中所有可能的$t$求取。

**推论3** 对于一个连通图$G$，令$\mathbf{Z}_m$是如(4)式所示类型的对应的回路阻抗矩阵：

$$\alpha(\bar{T})=\text{foldant}\,\mathbf{W}^* \tag{12a}$$

$$\text{foldant}\,\mathbf{W}=\sum f(\bar{t}) \tag{12b}$$

式中$\bar{t}$是$G$的一个补树，和式是对$G$中所有的$\bar{t}$求取。

**例2.** 在例1中所研究的问题可用如下的折边行列式来列出公式：

$$\text{foldant}\,\mathbf{W}=\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0 & 0 & e_1\\ 0 & e_4 & e_3 & 0\\ 0 & 0 & e_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_6\end{bmatrix}$$

$$=e_1\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0 & e_6\\ 0 & e_4 & e_3\\ 0 & 0 & e_5\end{bmatrix}+e_6\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0 & 0\\ 0 & e_4 & e_3\\ 0 & 0 & e_5\end{bmatrix}$$

$$=e_1\Big(e_6\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2+e_3 & e_6\\ 0 & e_4\end{bmatrix}+e_3\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0\\ 0 & e_4+e_5\end{bmatrix}$$

$$+e_5\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0\\ 0 & e_4\end{bmatrix}\Big)+e_6\Big(e_3\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0\\ 0 & e_4+e_5\end{bmatrix}$$

$$+e_5\text{foldant}\begin{bmatrix} e_2 & 0\\ 0 & e_4\end{bmatrix}\Big)$$

$$=e_1e_6e_5(e_2+e_3+e_4)+e_1e_3e_4(e_2+e_3)+e_1e_3(e_4+e_5)e_2$$

$$+e_1e_5e_4e_2+e_6e_3(e_4+e_5)e_2+e_6e_5e_4e_2$$

在展开式中有11项，其中每一项对应于$G$的一个树。为了计算$G$中树的数目，我们对所有的$x$，令$e_x=1$，这便得到：

$$\alpha(T)=\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\text{foldant}\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$+\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\text{foldant}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=3+2+2+1+2+1=11$$

**6. 同号行列式沿对角线展开**

在本节中我们将指出，产生一个图$G$的树的许多现有结果可以利用行列式沿对角展开的定理来得到。

研究如(4)式所示类型的$G$所对应的同号式矩阵$\boldsymbol{U}$*。令$e_{1i_1}, e_{2i_2}, \cdots e_{ri_r}$是$G$的一个子图。还令$\boldsymbol{U}_0$是从$\boldsymbol{U}$移去所有对应于$e_{1i_1}$，$e_{2i_2}$，…，$e_{ri_r}$边的对角线元素而得到的矩阵。利用对角线展开定理（例如，见Aitken 1962），则$\boldsymbol{U}$的行列式可用这些元素来表示，便得到：

$$\det\boldsymbol{U} = \det\boldsymbol{U}_0 + \sum_{x=1}^{r}\sum_{(K_x)} e_{k_1 i_{k_1}} e_{k_2 i_{k_2}} \cdots e_{k_x i_{k_x}} M_{(K_x)}, \tag{13}$$

式中$K_x = \{k_1, k_2, \cdots, k_x\}$是整数$1, 2, \cdots, r$的集合之非空子集，$M_{(K_x)}$是删去对应于$K_x$中整数的行与列的$\boldsymbol{U}_0$的主子式。$M_{(K_r)}$定义为1；第二个和式是对所有可能的非空子集$K_x$求取。

显然在上述展开式中的所有项且为正值。此展开式应用于节点导纳矩阵的行列式，最初是由Wing(1963)提出，且适用于无互感的无源网络。因为(13)式对于任意同号式矩阵也适用，所以该恒等式也可用来分析含互感的线性有源网络。

对于一个给定的图$G$，令$G(g_1; g_2)$是从$G$把包含在$g_1$中的所有边短接(移去所有由此而产生的自环)，然后移去包含在$g_2$中的边而所得的图，此处$g_1$与$g_2$是$G$的两个子图。如果$H$是一个$G$的子图的集合，它的每一个元素是作为各边的边标识符的乘积而给出，那么所谓$\sum H$，意指$H$的各元素之和。作为一个例子，令

$$H = \{e_1e_2e_5e_6, e_1e_2e_4e_6, e_1e_2e_3e_4, e_2e_4e_5e_6\}。$$

因此

$$\sum H = e_1e_2e_5e_6 + e_1e_2e_4e_6 + e_1e_2e_3e_4 + e_2e_4e_5e_6$$

令$t_0$与$\bar{t}_0$分别是$G$的一个树及补树，使得$G = t_0 \cup \bar{t}_0$。还令$E_q$与$E'_q$分别是含有$t_0$与$\bar{t}_0$的$q$条边的子图。那么所谓$t(E'_q)$与$\bar{t}(E_q)$分别意指$G$的一个树与补树，使得

$$t(E'_q) \cap \bar{t}_0 = E'_q, \tag{14a}$$

$$\bar{t}(E_q) \cap t_0 = E_q \tag{14b}$$

因此，两个含有相同边数之子图的距离定义为存在于一个子图中而不存在于另一个子图中的边数，$t(E'_q)$与$\bar{t}(E_q)$分别是离开$t_0$(与$\bar{t}_0$)的距离为$q$的一个树(与补树)。$t_0$与$\bar{t}_0$分别称为$G$的基准树与基准补树。为方便起见，我们分别将$G$中形如$t(E'_q)$与$\bar{t}(E_q)$的树与补树的集合记为$T(E'_q)$与$T(E_q)$。特别地，我们定义$t(E'_0) = t_0$，$\bar{t}(E_0) = \bar{t}_0$，$T(E'_0) = \{t_0\}$以及$\bar{T}(E_0) = \{\bar{t}_0\}$。最后，在$t_0$与$\bar{t}_0$中的$E_q$与$E'_q$的补分别记作$\bar{E}_q$与$\bar{E}'_q$。

**推论4** (Wing 1963) 对于一个给定的图$G$，令$\boldsymbol{Q}''_f$是$G$的$G''$中相对于基准树$t_0$的$f$-割集矩阵。则在$G$中离开$t_0$距离为$r-q$的树的集合$T_{r-q}$由下式给出：

$$\sum T_{r-q} = \sum_{(K_q)} E_q M_{(K_q)}, \tag{15}$$

$q = 1, 2, \cdots, r$，式中$E_q = e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_q}$；$\sum T_r = \det\boldsymbol{U}_0$，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}''_f\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Q}''_f)_t$；$\boldsymbol{U}_0$是从$\boldsymbol{U}$中令$t_0$的各树支的边标识符为零而得到的矩阵，和式是对$\{1, 2, \cdots, r\}$的所有可能的非空集$K_q$求取。

**推论5**

$$\sum T(E_q) = E_q M_{(K_q)}, \tag{16a}$$

$$M_{(K_q)} = \sum T(E_q; \bar{E}_q), \tag{16b}$$

式中$T(E_q; \bar{E}_q)$是图$G(E_q; \bar{E}_q)$的树的集合。

**推论6** 对于一个给定的图$G$来说，令$\boldsymbol{B}''_f$是$G$的$G''$的相对于树$t_0$的$f$-回路矩阵，则在$G$中离开基准补树$\bar{t}_0$距离为$m-q$的补树的集合$\bar{T}_{m-q}$由下式给出：

---

* 为方便起见，$G$的各边也用$e_{ij}$来表示。

$$\sum T_{m-q}=\sum_{(K_q)} E'_q M_{(K_q)},\tag{17}$$

$q=1,2,\cdots,m$，此处$E'_q=e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_q}$；$\sum \bar{T}_m=\det \boldsymbol{U}_0$；$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}''_f\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}''_f)_t$；$\boldsymbol{U}_0$是从$\boldsymbol{U}$中令$\bar{t}_0$的各连支的边标识符为零而得到的矩阵；和式是对$\{1,2,\cdots,m\}$的所有可能的非空集$K_q$求取。

**推论7**

$$\sum T(E'_q)=E'_q M_{(K_q)},\tag{18a}$$

$$M_{(K_q)}=\sum T(\bar{E}'_q;E'_q),\tag{18b}$$

式中$T(\bar{E}'_q;E'_q)$是图$G(\bar{E}'_q;E'_q)$的补树集合。

为了避免上述推论中的符号更加复杂，我们对$G$的$t_0$与$\bar{t}_0$采用相同的边标识符。

如果$\boldsymbol{U}$是一个稀疏矩阵，这正如我们在网络问题中经常发生的那样，$\det\boldsymbol{U}$的展开式是特别有效的。在这种情况下，许多高阶主子式$M_{(K_q)}$不存在，且仅需计算一些较低阶的主子式，其次，我们能够恰当地选取子图$t_0$与$\bar{t}_0$，使得高阶主子式$M_{(K_q)}$不再存在。

现在$G$的某类树与补树和上述讨论过的相应同号行列式之间的关系是很清楚的了。不难看出，如果$\boldsymbol{U}$是推论4中用$G$的$f$-割集矩阵而定义的同号式矩阵的话，则$M_{(K_q)}$就是在$G(E_q;\bar{E}_q)$中相对于树$T(E_q;\bar{E}_q)$的$f$-割集矩阵而定义的同号行列式。*或从(16)式，我们有：

$$\sum T(E_q)=E_q\sum T(E_q;\bar{E}_q)\tag{19}$$

这一关系已经包括在Hakimi(1961)的著作中，并且由Hirayama和Ohtsuki(1965)明显地给出过。现在相同的关系可以应用到$G(E_q;\bar{E}_q)$上。基于这一原理，Hirayama和Ohtsuki(1965)提出过一种计算$\det\boldsymbol{U}$与余子式的迭代算法，他们已在数字计算机上执行过。因为$G(E_q;\bar{E}_q)$的关联矩阵可以很容易地从$G$的关联矩阵加上相应于$E_q$的各节点的行与删去对应于$\bar{E}_q$的各边的列而得到，当一台具有即位运算功能的数字计算机上执行时，这一方法将是特别有效的。

例3．研究图1(a)所示的图$G_0$令$t_0=e_1e_2e_3e_4$，则$\bar{t}_0=e_5e_6$，$r=4$，$m=2$以及

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}''_f\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Q}''_f)_t=\begin{bmatrix} e_1+e_6 & e_6 & e_6 & 0\\ e_6 & e_2+e_6 & e_6 & 0\\ e_6 & e_6 & e_3+e_5+e_6 & -e_5\\ 0 & 0 & -e_5 & e_4+e_5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_0=\begin{bmatrix} e_6 & e_6 & e_6 & 0\\ e_6 & e_6 & e_6 & 0\\ e_6 & e_6 & e_5+e_6 & -e_5\\ 0 & 0 & -e_5 & e_5\end{bmatrix}$$

于是$\det\boldsymbol{U}_0=0$。从推论4，我们有：

$$\sum T_1=e_1e_2e_3e_5+e_1e_2e_4(e_5+e_6)+e_1e_3e_4e_6+e_2e_3e_4e_6$$

$$\begin{aligned}\sum T_2&=e_1e_2(e_5e_6)+e_1e_3(e_5e_6)+e_1e_4(e_5e_6)+e_2e_3(e_5e_6)+e_2e_4(e_5e_6)+e_3e_4(0)\\&=e_1e_2e_5e_6+e_1e_3e_5e_6+e_1e_4e_5e_6+e_2e_3e_5e_6+e_2e_4e_5e_6\end{aligned}$$

$$\sum T_3=e_1(0)+e_2(0)+e_3(0)+e_4(0)=0,$$

以及$T_0=\{e_1e_2e_3e_4\}$与$T_4=\{\quad\}$。故$G$的树集合由下式给出：

$$T=T_0\cup T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$$

---

* 此处应为相对于树$T(E_q;\bar{E}_q)$，系原文有误——译者

$$= \{e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_5, e_1e_2e_4e_6, e_1e_3e_4e_6, e_2e_3e_4e_6, e_1e_2e_5e_6, e_1e_3e_5e_6, e_1e_4e_5e_6, e_2e_3e_5e_6, e_2e_4e_5e_6\}$$

类似地，如果我们希望利用推论 6 来产生$G$的补树集合，我们需计算：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_f''\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}_f'')_t = \begin{bmatrix} e_1+e_2+e_3+e_6 & e_3 \\ e_3 & e_3+e_4+e_5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_0 = \begin{bmatrix} e_1+e_2+e_3 & e_3 \\ e_3 & e_3+e_4 \end{bmatrix}$$

于是，我们有：

$$\det\boldsymbol{U}_0 = e_4(e_1+e_2+e_3)+e_3(e_1+e_2),$$

$$\sum\bar{T}_1 = e_6(e_3+e_4)+e_5(e_1+e_2+e_3),$$

以及$\bar{T}_0 = \{e_5e_6\}$与$\sum\bar{T}_2 = \det\boldsymbol{U}_0$。$G$的补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$$

$$= \{e_5e_6, e_3e_6, e_4e_6, e_1e_5, e_2e_5, e_3e_5, e_1e_4, e_2e_4, e_3e_4, e_1e_3, e_2e_3\}$$

### 7.主子矩阵的计算

因为$G$的树与补树分别与割集矩阵$\boldsymbol{Q}$或$\boldsymbol{Q}''$以及回路矩阵$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}''$的非零值的主行列式有一一对应的关系，所以生成树与补树的问题便等效于有效地生成$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{B}''$的非零值的主子行列式的问题。

令$\boldsymbol{F}$是一个$p\times b$阶且秩为$p$的任意矩阵，显然我们有$p\leqslant b$。如果$\boldsymbol{F}$的一个子矩阵$\boldsymbol{F}_s$是$p$阶非奇异方阵，则称其为主子矩阵。换言之，$\det\boldsymbol{F}_s$是$\boldsymbol{F}$的一个非零值的主行列式。为方便起见我们称含对角线主子矩阵的矩阵为范式矩阵。令$I_q$、$J_q$与$K_q$是$I=\{1,2,\cdots,b\}$的子集，其中每个子集含有$q$个元素。符号$\boldsymbol{F}(I_q;J_q)$是$\boldsymbol{F}$的子矩阵，它包含了相应于在$I_q$中整数的各行与相应在$J_q$中整数的各列。特殊地，我们令$\boldsymbol{F}(I_q,\bar{J}_q)^* = \boldsymbol{F}(\bar{J}_q)^*$。$\boldsymbol{I}$中$J_q$的补记作$\bar{J}_q$，显然$\boldsymbol{F}(\bar{J}_q)$是从$\boldsymbol{F}$中删去相应于$J_q$中整数的各列而得到的矩阵。对于一个给定的范式矩阵$\boldsymbol{F}$来说，用$\boldsymbol{F}_d$来表示$\boldsymbol{F}$的对角线主子矩阵$\boldsymbol{F}(K_p)$，即我们令$\boldsymbol{F}_d = \boldsymbol{F}(\bar{K}_p)$，为方便起见，我们假设$\boldsymbol{F}$的各列用$I$的整数来标记，各行用这种方法来标记——使$\boldsymbol{F}$的第$i$行用$k_i$来表示，$i=1,2,\cdots,p$。此处$K_p=\{k_1,k_2,\cdots,k_p\}$。贯穿于以后各节中，术语“矩阵”意指已根据刚才所提出的规则来加以标号的矩阵。

如果$I_q$是$K_p$的一个子集，所谓$K_pJ_q/I_q$意指$(K_p-I_q)\cup J_q$。例如，我们有$(156\ 28/16)=(258)$。由此得到，在$1\leqslant q\leqslant p$时，$\boldsymbol{F}(K_pJ_q/I_q)$是$\boldsymbol{F}$的（而不是$\boldsymbol{F}_d$的）一个主子矩阵的充要条件是$\boldsymbol{F}(I_q;J_q)$是$\boldsymbol{F}_d$的非奇异子矩阵。

**定理4**（Chen 1968a）令$\boldsymbol{F}$是$p\times b$阶、秩为$p$的范式矩阵。那么$\boldsymbol{F}$的主子矩阵的集合$M$由下式给出：

$$M = \bigcup_{q=0}^{h}\bigcup_{\{I_q\}}\bigcup_{\{J_q\}}\boldsymbol{F}(K_pJ_q/I_q), \tag{20}$$

式中$\boldsymbol{F}(I_q;J_q)$是$\boldsymbol{F}_d$的非奇异子矩阵；$h$是$\boldsymbol{F}_d$的秩；由定义$\boldsymbol{F}(K_pJ_0/I_0)=\boldsymbol{F}(K_p)$。

现在计算$\boldsymbol{F}$的所有主子矩阵的问题简化为在$\boldsymbol{F}_d$中计算阶数为$1,2,\cdots,h$的所有非奇异的子矩阵的问题。阶数为 1 的非奇异子矩阵是容易求得的；即是$\boldsymbol{F}_d$中的非零元素。对于2阶以上的非奇异子矩阵，可以重复整个计算过程。

---

* 原文有误，译者已作更正

**例4.** 求取下列矩阵的所有主子矩阵：

$$\boldsymbol{F}=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & 9 \end{matrix}$$

此处$\boldsymbol{F}(K_3)=(257)$，即$\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{F}(1346)$以及$h=3$*。令$S_i$是在$\boldsymbol{F}(1346)$中的第$i$阶非奇异子矩阵的集合。那么：

$S_1=\{\boldsymbol{F}(2;1),\boldsymbol{F}(2;3),\boldsymbol{F}(2;4),\boldsymbol{F}(5;1),\boldsymbol{F}(5;3),\boldsymbol{F}(5;6),\boldsymbol{F}(7;4),\boldsymbol{F}(7;6)\}$,

$S_2=\{\boldsymbol{F}(25;13),\boldsymbol{F}(25;14),\boldsymbol{F}(25;16),\boldsymbol{F}(25;34),\boldsymbol{F}(25;36),\boldsymbol{F}(25;46),$
$\boldsymbol{F}(57;14),\boldsymbol{F}(57;16),\boldsymbol{F}(57;34),\boldsymbol{F}(57;36),\boldsymbol{F}(57;46),\boldsymbol{F}(27;14),$
$\boldsymbol{F}(27;16),\boldsymbol{F}(27;34),\boldsymbol{F}(27;36),\boldsymbol{F}(27;46)\}$,

$S_3=\{\boldsymbol{F}(257;346),\boldsymbol{F}(257;146),\boldsymbol{F}(257;134),\boldsymbol{F}(257;136)\}$,

式中，$S_3$是将$\boldsymbol{F}(1346)$看成给定矩阵，然后重复整个计算过程而得。相应于集合$S_i$的$\boldsymbol{F}$的主子矩阵集合$M_i$，$i=1,2,3$，可得到如下：

$M_1=\{\boldsymbol{F}(157),\boldsymbol{F}(357),\boldsymbol{F}(457),\boldsymbol{F}(127),\boldsymbol{F}(237),\boldsymbol{F}(267),\boldsymbol{F}(245),\boldsymbol{F}(256)\}$,

$M_2=\{\boldsymbol{F}(137),\boldsymbol{F}(147),\boldsymbol{F}(167),\boldsymbol{F}(347),\boldsymbol{F}(367),\boldsymbol{F}(467),\boldsymbol{F}(124),\boldsymbol{F}(126),$
$\boldsymbol{F}(234),\boldsymbol{F}(236),\boldsymbol{F}(243),\boldsymbol{F}(145),\boldsymbol{F}(156),\boldsymbol{F}(345),\boldsymbol{F}(356),\boldsymbol{F}(456)\}$,

$M_3=\{\boldsymbol{F}(346),\boldsymbol{F}(146),\boldsymbol{F}(134),\boldsymbol{F}(136)\}$

然后利用各集合$M_i$取并，$i=0,1,2,3$，此处$M_0=\{\boldsymbol{F}(257)\}$，便得到$\boldsymbol{F}$的所有可能的主子矩阵的集合$M$。

将定理4用来产生一个图的树与补树是直接了当的，我们将仅仅叙述一些结果而把一些显见的细节留下。（见Chen 1968b与Hakimi以及Deo 1966）

**推论8.**（Mayeda等人1968）如果$\boldsymbol{Q}$是一个连通图$G$的割集范式矩阵，则离开基准树$t_0=e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_r}$距离为$q$的树集合$T_q$由下式给出：

$$T_q=\{t;t=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_r}\quad 且\quad (x_1x_2\cdots x_r)=(K_rJ_q/I_q)\} \tag{21}$$

$q=0,1,2,\cdots,r$，式中$\boldsymbol{Q}(I_q;J_q)$是$\boldsymbol{Q}_d$的非奇异子矩阵以及$T_0=\{t_0\}$。

**推论9.** $G$中离开$t_0$距离为$q$的树之数目等于在$\boldsymbol{Q}_d$中$q$阶非奇异子矩阵的数目。

于是，离开$t_0$距离为1的树之数目简单地等于$\boldsymbol{Q}_d$中非零元素的数目。因为一个子图当且仅当它不含有割集时，它才能作为补树的一部分，我们有

**推论10.** 令$I_u$是$K_r$的一个子集，则对应于$I_u$中整数的子图，当且仅当子矩阵$\boldsymbol{Q}(I_u;\bar{K}_r)$的秩等于$u$时，它能作为一个补树的一部分。

Fujisawa(1959)与Coates–Mayeda公式（Coates 1958以及Mayeda 1958）相对偶，提出一种方法，得出了与一个有源网络对应的图中所有可能的补树及其符号，为此目的，可以利用上面的叙述方法而只需作少量的修改，并叙述为：

**推论11.** 如果$\boldsymbol{B}$是一个连通图$G$的范式回路矩阵，则离开一个基准补树$\bar{t}_0=e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_m}$的距离为$q$的补树集合$\bar{T}_q$由下式给出：

$$\bar{T}_q=\{\bar{t};\bar{t}=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_m}\quad 且\quad (x_1x_2\cdots x_m)=(K_mJ_q/I_q)\} \tag{22}$$

$q=0,1,\cdots,m$，式中$\boldsymbol{B}(I_q;J_q)$是$\boldsymbol{B}_d$的一个非奇异子矩阵以及$\bar{T}_0=\{\bar{t}_0\}$

---

* 此处原文有误，译者根据《应用图论》一书已作更正。

**推论12**．在$G$中离开$\bar{t}_0$距离为$q$的补树数目等于$\boldsymbol{B}_d$中$q$阶非奇异子矩阵的数目。

因此离开$\bar{t}_0$距离为1的补树的数目简单地等于$\boldsymbol{B}_d$中非零元素的数目。因为一个子图，当且仅当其不包括回路时，它才能作为树的一部分，我们有：

**推论13**．(Hakimi 1961)。令$I_u$是$K_m$的一个子集，那么对应于$I_u$中整数的子图，当且仅当子矩阵$\boldsymbol{B}(I_u, \bar{K}_m)$的秩等于$u$时，它才能作为一个树的一部分。

因为对于一个零度$m>0$的连通图$G$来说，一个补树是$G$中一个树之唯一而非零的补图，由此得到当且仅当相应的两个补树的距离为$q$时，则两个树的距离也为$q$。

**推论14**．令$t_0$与$\bar{t}_0$分别是$G$的相应树与补树。那么在$\boldsymbol{Q}(\bar{K}_r)$中$q$阶非奇异矩阵的数目与$\boldsymbol{B}(K_r)$中$q$阶非奇异子矩阵的数目相同，$q=1,2,\cdots,\min(r,m)$，此处$t_0=e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_r}$。

显然，上述方法也可用来产生一个有向图的树与补树。正如前面所提到，差别仅仅在于$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$是在模2域中计算的，而$\boldsymbol{B}''$与$\boldsymbol{Q}''$是在实数域中计算的。

例5　假设希望产生图2所示图$G$的树集合。$G$的割集矩阵由下式给出：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{matrix} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\4\\7\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\end{bmatrix}\end{matrix},$$

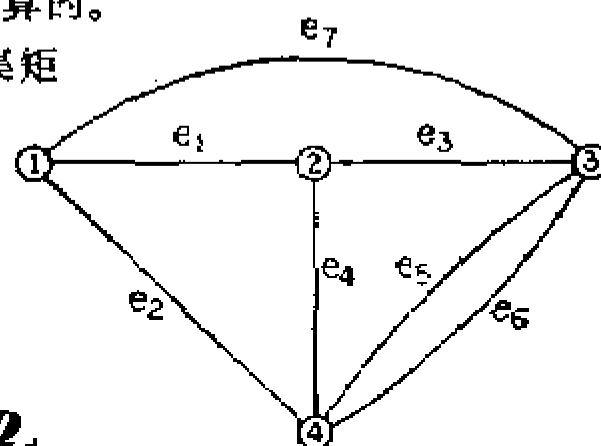


图2　例5与例7中所研究的图$G$

式中$\boldsymbol{Q}(k_3)=\boldsymbol{Q}(147)$，$\boldsymbol{Q}_d=\boldsymbol{Q}(2356)$，以及$r=3$。在$\boldsymbol{Q}_d$中$i$阶非奇异子矩阵的集合$S_i, i=1,2,3$，由下式给出：

$S_1=\{\boldsymbol{Q}(1;2),\ \boldsymbol{Q}(1;3),\ \boldsymbol{Q}(1;5),\boldsymbol{Q}(1;6),\ \boldsymbol{Q}(4;2),\ \boldsymbol{Q}(4;5),\ \boldsymbol{Q}(4;6),$
$\boldsymbol{Q}(7;3),\ \boldsymbol{Q}(7;5),\boldsymbol{Q}(7;6)\}$,

$S_2=\{\boldsymbol{Q}(14;23),\ \boldsymbol{Q}(14;35),\ \boldsymbol{Q}(14;36),\ \boldsymbol{Q}(47;23),\boldsymbol{Q}(47;25),\boldsymbol{Q}(47;26),$
$\boldsymbol{Q}(47;35),\ \boldsymbol{Q}(47;36),\ \boldsymbol{Q}(17;25),\ \boldsymbol{Q}(17;26),\ \boldsymbol{Q}(17;23)\}$,

$S_3=\{\boldsymbol{Q}(147;235),\ \boldsymbol{Q}(147;236)\}$

离开$t_0=e_1e_4e_7$距离为$i$的树集合$T_i$ $(i=1,2,3)$可得出如下：

$T_1=\{e_2e_4e_7, e_3e_4e_7, e_4e_5e_7, e_4e_6e_7, e_1e_2e_7, e_1e_5e_7, e_1e_6e_7, e_1e_3e_4, e_1e_4e_5,$
$e_1e_4e_6\}$,

$T_2=\{e_2e_3e_7, e_3e_5e_7, e_3e_6e_7, e_1e_2e_3, e_1e_2e_5, e_1e_2e_6, e_1e_3e_5, e_1e_3e_6, e_2e_4e_5,$
$e_2e_4e_6, e_2e_3e_4\}$,

$T_3=\{e_2e_3e_5, e_2e_3e_6\}$

因此利用对集合$T_i$ $(i=0,1,2,3)$取并便得到$G$的树集合$T$，此处$T_0=\{e_1e_4e_7\}$。

回忆起早先定义过的符号$T(E_q)$。不难看出集合$T_{r-q}$是集合$T(E_q)$的不相交之并。将其写成不同的形式，我们有$T_q=$集合$T(E_q)$之并。因此无重复地从$T_{q-1}$计算$T_q$的Mayeda和Seshu法(1965)可以写成矩阵形式，然后很容易地在一台数字计算机上按拟定程序执行。

两个$p\times q$阶矩阵$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{Z}$之交，记作$\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{Z}$，是一个$p\times q$阶矩阵，使得$\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{Z}$的第$i$, $j$个元素为$w_{ij}z_{ij}$，此处$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]$与$\boldsymbol{Z}=[z_{ij}]$。

早先，我们已经讨论过一种方法，标定了矩阵$\boldsymbol{F}$相对于对角线主子矩阵$\boldsymbol{F}(K_p)=\boldsymbol{F}_d$的各行。下面，我们将利用$\boldsymbol{F}^*(K_p)$来表示相对于对角线主子矩阵的范式矩阵$\boldsymbol{F}$。

**定理5** (Chen 1969$d$)。令$t_0=e_1e_2\cdots e_r$是$G$的一个基准树，使得每一个子图$e_1e_2\cdots e_x$是$t_0$的一个连通子图，$x=1,2,\cdots,r$。还令$\boldsymbol{Q}$是$G$相对于$t_0$的$f$-割集矩阵*。如果$S(K_i^r)$表示$\boldsymbol{Q}$

的主子矩阵$\boldsymbol{Q}(I_r)$使得$I_r \cap K_r = K_q'$，$K_q' = \{k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_l}\}$，$k_{i_1} < k_{i_2} < \cdots < k_{iq}$，是$K_r = \{1, 2, \cdots, r\}$的一个子集（对应于$t_0$的树支），那么

$$S(K_q'/k_x) = \{\boldsymbol{Q}(J_r);\ J_r = I_r \oplus \{k_x, i\},\ \boldsymbol{Q}(I_r)\text{在}S(K_q')\text{中},\ \boldsymbol{F}(k_x;\ i) \neq 0,$$

$$\text{此处}\quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{W}(k_x; \overline{K}_r) \cap \boldsymbol{Q}(k_x; \overline{K}_r)\text{以及}\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{Q}^*(I_r)\} \qquad (23)$$

$q = r, r-1, \cdots, 2$以及$k_x$在$K_q'$中。

在计算中产生树的一个主要困难在于需要大的存贮器。上面所提出的矩阵法对此提供了一种有效的解决方法。它相当于重复地使一个矩阵范式化。因为割集矩阵的特点，它很容易实现范式化。实现这一点的一种简单方法如下：假设我们希望使$\boldsymbol{Q}$相对于$I_r$实现范式化。研究子矩阵$\boldsymbol{Q}(I_r)$。将$\boldsymbol{Q}(I_r)$的任意一行（其第1列有1的一行）移到第1行，然后如果存在其它1的话，利用行相加（模2）将其移到第1列。令所得的矩阵为$\boldsymbol{Q}_1(I_r)$。现在移动其它的在第2列中有1的任意一行，使其移到第二行，如果存在其它1的话，用行相加将其移到第2列。延续这一过程，最后我们得到一个$r$阶的单位矩阵。如果这一过程在任何一步失败，则$\boldsymbol{Q}(I_r)$是奇异的。如果我们用$\boldsymbol{Q}$代替$\boldsymbol{Q}(I_r)$，这也类似成立。

这种方法已被Mayeda等人(1968)推广到生成两种图的完备树上，Chen(1966$a$)将其推广到生成有向图的有向树上。我们将用下列例子来说明上述结果。

例6．研究如图1($a$)所示的图$G$。令$t_0 = e_1e_2e_3e_4$，它具有所希望的性质，即$e_1$，$e_1e_2$与$e_1e_2e_3$是$G$的连通子图。相对于$t_0$的$f$-割集矩阵$\boldsymbol{Q}$由下式给出：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是，有1列与$\boldsymbol{Q}(1234)$不同的主子矩阵的集合$S(K_3')$可得出如下：

$$S(123) = \{\boldsymbol{Q}(J_4); J_4 = \{1,2,3,4\} \oplus \{4, i\},\ \boldsymbol{F}(4; i) \neq 0\ \text{式中}\ \boldsymbol{F} = [1\ 0]\}$$
$$= \{\boldsymbol{Q}(1235)\},$$
$$S(124) = \{\boldsymbol{Q}(1245),\ \boldsymbol{Q}(1246)\},$$
$$S(134) = \{\boldsymbol{Q}(1346)\},$$
$$S(234) = \{\boldsymbol{Q}(2346)\}$$

有2列与$\boldsymbol{Q}(1234)$不同的主子矩阵的集合$S(K_2')$可从$S(K_3')$得出如下：

$$S(12) = \{\boldsymbol{Q}(J_4); J_4 = I_4 \oplus \{3, i\},\ \boldsymbol{Q}(I_4)\text{在}S(123)\text{中},\ \boldsymbol{F}(3; i) \neq 0,\ \text{此处}$$
$$\boldsymbol{F} = [0\ 1] \cap [1\ 1] = [0\ 1]\}$$
$$= \{\boldsymbol{Q}(1256)\},$$
$$S(13) = \{\boldsymbol{Q}(1356)\},$$
$$S(23) = \{\boldsymbol{Q}(2356)\},$$
$$S(14) = \{\boldsymbol{Q}(1456)\},$$
$$S(24) = \{\boldsymbol{Q}(2456)\},$$
$$S(34) = \{\ \}$$

* 为避免用附加的下标，我们将$\boldsymbol{Q}_f$表示成$\boldsymbol{Q}$。

因为$\boldsymbol{Q}(56)$的秩是2，由此得到$S(K_1')=\{\ \}$。于是，$G$的树集合$T$由下式给出：

$$T=\{e_1e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_3e_6, e_1e_2e_4e_5, e_1e_2e_4e_6, e_1e_3e_4e_6, e_2e_3e_4e_6, e_1e_2e_5e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_2e_3e_5e_5,\ e_1e_4e_5e_6, e_2e_4e_5e_6\}。$$

## 8. 2-树的生成

现在，前一节所讨论的方法可很容易地推广到无重复地生成图$G$的2-树上。为方便起见，令$\boldsymbol{A}_{ij}$是从$G$的完备关联矩阵删去第$i$行与第$j$列而得到的矩阵。还令$t_{ij,k}$是$G$的一个2-树，其节点$i$与$j$在一个连通片中而节点$k$在另一个连通片中，那么我们有：

**定理6.** 对于一个给定的图$G$，令$\boldsymbol{Z}$与$\boldsymbol{W}$分别是范式矩阵$\boldsymbol{A}_{ik}$与$\boldsymbol{A}_{jk}$中相对于$K_{r-1}$中的整数之单位矩阵，在$G$中离开基准2-树$t^0_{ij,k}=e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_{r-1}}$的距离为$q$的2-树$t_{ij,k}$的集合$T^q_{ij,k}$由下式给出：

$$T^q_{ij,k}=\{t_{ij,k};t_{ij,k}=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_{r-1}}\text{与}(x_1x_2\cdots x_{r-1})=(K_{r-1}J_q/I_q)\} \quad (24)$$

$q=1,2,\cdots,h$,此处$h=\min(h_1,h_2)$；$h_1$与$h_2$分别是$\boldsymbol{Z}_d$与$\boldsymbol{W}_d$的秩，$\boldsymbol{Z}(I_q;J_q)$与$\boldsymbol{W}(I_q;J_q)$分别是$\boldsymbol{Z}_d$与$\boldsymbol{W}_d$的非奇异子矩阵。

证明：因为$G$的2-树$t_{ij,k}$和对应的$\boldsymbol{A}_{ik}$与$\boldsymbol{A}_{jk}$之转置的主行列式的非零值的乘积相一一对应，本定理即从下列事实而得到——一个矩阵的行列式与其转置的行列式相等。

**推论15.** 令$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}\cap\boldsymbol{W}$ 那么

$$T^1_{ij,k}=\{t_{ij,k};t_{ij,k}=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_{r-1}}\text{与}(x_1x_2\cdots x_{r-1})=(K_{r-1}\{v\}/\{u\})\}, \quad (25)$$

此处$y_{uv}$是$\boldsymbol{Y}(K_{r-1})$的非零元素。

例7.研究图2所示的图$G$。假设我们希望产生$G$的2-树$t_{23,4}$的集合$T_{23,4}$：

$$\boldsymbol{A}_{24}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{34}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&1\\1&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

因为$\boldsymbol{A}_{24}$与$\boldsymbol{A}_{34}$已是范式，我们可令$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}_{24}$与$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}_{34}$,此处$K_2=\{2,3\}$与$t^0_{23,4}=e_2e_3$。则

$$\boldsymbol{Y}=\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

式中，$\boldsymbol{Y}(K_2)=\boldsymbol{Y}(14567)$，利用推论15，我们有：

$$T^1_{23,4}=\{e_1e_7\}$$

对于离开基准2-树$t^0_{23,4}$距离为2的2-树来说，把$\boldsymbol{Z}(14567)$和$\boldsymbol{W}(14567)$作为给定矩阵。再次重复全过程，我们得到：

$$T^2_{23,4}=\{e_1e_3,\ e_3e_7\}$$

$G$的2-树$t_{23,4}$集合简单地是$T^i_{23,4}$之并$(i=0,1,2)$，此处$T^0_{23,4}=\{e_2e_3\}$

上述结果推广到$k$-树与补$k$-树是很容易的，无需作更进一步的说明。

## 结　　论

在本文中，我们已经指出，在文献中现有许多关于产生一个图之树的方法可用矩阵代数来列出公式。因此，人们能提供一种推导它们的统一理论且可系统地总结许多结果。

这些结果的统一化使人们能选取一种特殊的方法或采用一些方法的组合，从而使现有问

题获得最简单的解决办法并取得最满意的结果。

## 参 考 文 献


〔1〕 AARDENNE-EHRENFEST, T., and BRUIJN, N. G., 1951, *Simon Stevin*, 28, 203.

〔2〕 AITKEN, A. C, 1962, *Determinants and Matrices*(New York: Interscience).

〔3〕 BROOKS, R. L., SMITH, C. A. B., STONE, A. H., and TUTTE, W. T., 1940, *Duke math. J.*, 7, 312.

〔4〕 BOTT, R., and MAYBERRY, J. P., 1954, *Economic Activity Analgsis*(New York: Wiley), p. 391.

〔5〕 CHANG, W. T., and CHAN, S. G., 1968, *Proc. Eleventh Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, p. 457.

〔6〕 CHEN, W. K., 1965, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 12, 85; 1966 a *Proc. Fourth Allerton Conference on Circuit and System Theory*, University of Illinois, Urbana, p. 207; 1966 b, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 13, 449; 1968 a, *SIAM J. appl. Math.*, 16, 603; 1968 b, Tech. Rept. EER-10-17, Ohiouniversity, Athens, Ohio; 1968c, *Electronics Lett.*, 4, 516; 1969 a, *Proc. Twelfth Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Texas, Austin, VI. 2.1—2.8; 1969 b, *proc. I. E. E. E.*, 57, 1292; 1969, *Int. J. Electron.* 27, 191.

〔7〕 COATES, C. L., 1958, *I. R. E. Trans. Circuit Theory*, 5, 30.

〔8〕 FUJISAWA, T., 1959, *I. R. E. Trans. Circuit Theory*, 6, 261.

〔9〕 HAKIMI, S. L., 1961, *J. Franklin Inst.*, 272, 347.

〔10〕 HAKIMI, S. L., and DEO, N., 1966. *Proc. Fourth Allerton Conference on Circuit and system Theory*, *University of Illinois*, *Urabana*, *p.*, 197.

〔11〕 HARARY, F., 1967, *SIAM Rev.*, 9, 83.

〔12〕 HIRAYAMA, H., and OHTSUKI, T., 1965, *Electronics Communs Japan*, 48, 52.

〔13〕 KASAI, T., KUSAKA, H., YONEDA, S., and TAKI, I., 1966, *Electronics Communs Japan*, 49, 130.

〔14〕 KIRCHHOFF, G., 1847, *Annln phys.*, 72, 497.

〔15〕 MAXWELL, J. C., 1892, *Electricity and Magnetism* (Oxford: Clarendon Press), Chap. VI and Appendix.

〔16〕 MAYEDA, W., 1958, *Proc. natn. Electron. Conf.*, 14, 631.

〔17〕 MAYEDA, W., HAKIMI, S. L., CHEN, W. K., and DEO, N., 1968, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 15, 101.

〔18〕 MAYEDA, W., and SESHU, S., 1965, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 12, 181.

〔19〕 MYERS, B. R., 1967, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 14, 284.

〔20〕 NAKAGAWA, N., 1958, *I. R. E. Trans. Circuit Theory*, 5, 122.

〔21〕 OKADA, S., 1955, *Proc. Int. Radio Engrs.* 43, 1527.

〔22〕 OKADA, S., and ONODERA, R., 1952, *Bull. Yamagata Univ.*, 2, 89, 191; 1954, *Ibid.*, 3, 77.

〔23〕 O'NEIL, P. V., and SLEPIAN, P., 1966, *I. E. E. E. Tran s. Circuit Theory*, 13, 271.

〔24〕 SESHU, S., and REED, M. B., 1961, *Linear Graphs and Electrical Networks* (Reading, Mass.: Addison-Wesley).

〔25〕 SYLVESTER, J. J., 1855, *Q. Jl pure appl. Math.*, 1, 42.

〔26〕 TRENT, H. M., 1954, *Proc. natn. Acad. Sci. U. S. A.*, 40, 1004.

〔27〕 TUTTE, W. T., 1948, *Proc. Camb. phil. Soc. math. phys. sci.*, 44, 463.

〔28〕 WING, O., 1963, *I. E. E. E. Trans Circuit Theory*, 10, 127.

# 九、关于产生一个图的树的统一理论（III）

## 第三部分　分解法与初等变换法

本文是三篇连续论文（论述有效地产生一个图的树的问题）的最后一篇。在这篇论文中我们总结了现有大多数基于分解法与初等变换法而产生树的方法，并且提供了推导它们的统一理论。

### 1.引言

在第一部分与第二部分中（Chen 1969 $d$, $e$）我们已经指出，在文献中许多有关产生一个图的树的现有方法，初看起来它们的表现形式是不同的，但可以用下列两种方法来列写公式：王氏代数法与矩阵代数法。在第三部分中我们将指出：基于分解法与初等树变换和初等补树变换来产生树的方法可以从王氏代数公式导出。

在本文中，符号$n$、$b$与$c$分别用来表示图$G$的节点数、边数与连通片数。我们分别用$r$与$m$表示$G$的秩与零度。除非另有相反的规定，我们假设$G$是连通的。其它一些没有特别说明的定义可在第一部分中查到。

### 2.利用分解法产生树和补树

对于一个用数字计算机来计算的非常复杂的图来说，减少其计算困难的一种方法是把原始图分为几个部分，接着确定每个部分中的适当子图，然后把这些子图合并从而得到所要求的结果。事实上，在第一部分中，我们已说明了两种方法（推论5和推论11）。在本节中我们详细地研究这一问题。

令$G$沿节点$i_1, i_2, \cdots, i_k$分解为两个子图$G'$和$G''$。令$T'(V_k)$与$T''(V_k)$分别是$G'$与$G''$中$k$-树$t(V_k)$的集合。此处$V_k=\{i_1;i_2;\cdots;i_k\}$，还令$\bar T'(V_k)$与$\bar T''(V_k)$分别是$G'$与$G''$的补$k$-树$\bar t(V_k)$的集合。注意$G'$与$G''$无需是连通的。那么从第一部分的推论11，我们得到简单的分解定理。

**定理1**（Chen 1969 $b$）。

$$T=\oplus T'(I\cup\{i_k\})\times T''(\bar I\cup\{i_k\}) \tag{1a}$$

$$=\oplus T'(\bar I\cup\{i_k\})\times T''(I\cup\{i_k\}), \tag{1b}$$

$$\bar T=\oplus \bar T'(I\cup\{i_k\})\times T''(\bar I\cup\{i_k\}) \tag{2a}$$

$$=\oplus \bar T'(\bar I\cup\{i_k\})\times \bar T''(I\cup\{i_k\}), \tag{2b}$$

式中，$I$和$\bar I$是集合$V_{k-1}$中的互补子集，环和是对$V_{k-1}$中的全部$I$求取。

令$T'$与$T''$分别是$G'$与$G''$的树的集合。对于$k=2$，上述定理可简化为：

**推论1**（Percival 1953）：

$$T=T'\times T''(i_1;i_2)\cup T'(i_1;i_2)\times T'', \tag{3a}$$

$$\bar T=\bar T'\times \bar T''(i_1;i_2)\cup \bar T'(i_1;i_2)\times \bar T'' \tag{3b}$$

**定理2**．令$G_{k+1}$是$G$的一个子图，移去它将使$G$分成为$k$个连通片$G_x, x=1,2,\cdots,k>1$。如果$N$与$N_x$分别表示$G$与$G_x$的节点集合，则$G$的树集合$T$与补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$$T=\oplus T_1(J_1)\times T_2(J_2)\times\cdots\times T_{k+1}(J_{k+1}), \quad (4a)$$

$$\bar{T}=\oplus \bar{T}_1(J_1)\times T_2(J_2)\times\cdots\times \bar{T}_{k+1}(J_{k+1}), \quad (4b)$$

式中$J_y$是$N_y\cap N_{k+1}$的非空子集，$y=1,2,\cdots,k-1$；$J_k$是$N_k\cap N_{k+1}$的子集，使$N_k\cap N_{k+1}$的任意一个被标识的节点$i$总包含在$J_k$中，$J_{k+1}$是在$(N_1\cup N_2\cup\cdots\cup N_k)\cap N_{k+1}$)中的集合$(J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_k)-\{i\}$的补；$T_z(J_z)$，$z=1,2,\cdots,k+1$表示$G_z$的$k$-树$t(J_z)$的集合；环和是对所有可能的这种子集$J_z$求取。

证明：本定理可直接从定理1、同时令$G'=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k$，$G''=G_{k+1}$，以及$i=i_r$而得到。

Watanabe (1961) 导出了一种适用于$G_{k+1}$是一个割集或为边不相接割集之并的特殊公式。但是，其结果是不正确的，原因在于他用并的运算代替了环和运算，并且定义了$J_{k+1}$为$(J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_k)$的补代替了我们上面所定义的$J_{k+1}$。因为他在推导该公式时首先利用加了边的$G$的关联矩阵，然后用通常的方法即应用比耐——柯西定理，因此，不难找到他的错误原因。其第一个错误是由于在主行列式的拉普拉斯展开中，并不是所有项均为正。第二个错误是因为在加边关联矩阵去掉一行后，$G_{k+1}$的关联矩阵的非奇异子矩阵所对应的子图是$T_{k+1}(J_{k+1})$，这正如我们在本定理中所定义。Roe (1961) 也指出过他的第一个错误。上述定理的一个研究过的完整例子可在 Chen (1969 b) 的文献中找到，此处从略。

值得指出的是，在取环和运算之前，在(1)式、(2)式与(4)式中所产生的所有项并不全都相异。对于复杂的图来说，人们立即认识到消去重复项的过程是费时的。除了延缓产生树与补树的过程之外，用计算机来分析图形的规模也受到限制，因为人们必须在计算机的存贮器中保留所有树或所有补树的集合，并且需要对照检查每一个新树或新补树，看其是否为重复项。因此寻求避免重复项的条件是非常有意义的，并且其结果也非常有用。我们将在下一节中较详细地进行研究。

**2.1 一个集合的基本互补划分**

在这一节中我们将首先定义一个集合的"基本互补划分"，然后给出试验其是否为基本互补划分的简单而有效的算法。把这种划分方法应用于无重复地产生树与补树，将在下一节中讨论。

**定义1**．一个集合$V_k$的划分，记作$P(V_k)$，它是$V_k$的非空子集$I_x$的集合，$x=1,2,\cdots,w$，使得

$$V_k=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_w, \quad (5a)$$

$$I_u\cap I_v=H_0，\text{即为空集}, \quad (5b)$$

$1\leqq u<v\leqq w$，如果对于所有$x$，$\alpha(I\cap I_x)=1$，此处$\alpha(I\cap I_x)$如以前那样，表示$I\cap I_x$之元素的个数。则$V_k$中$w$个相异的元素集合$I$称为$P(V_k)$的相异代表集，或简称为 SDR。

显然，对于一个给定的划分，可以有不止一个 SDR。

**定义2**．一对划分$P'(V_k)$与$P''(V_k)$，记作$C_j[P'(V_k), P''(V_k)]$，若存在$V_k$的一个子集$I$，使得$I$与$\overline{I-\{j\}}$分别是$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的SDR，则称其为相对于$j$的互补划分。此处$\overline{I-\{j\}}$是$V_k$中$I-\{j\}$的补，并且假设$j$在$I$中。

显见，$\alpha(P'(V_k))+\alpha(P''(V_k))=k+1$。注意一般说来在$i\neq j$时，$C_i[P'(V_k),P''(V_k)]$不等于$C_j[P'(V_k), P''(V_k)]$。

**定义3**．如果不存在$C_j[P'(I),P''(I)]$时，此处$I$是$V_k$的非空子集，$P'(I)$与$P''(I)$分别是

$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的非空真子集，则称 $C_j[P'(V_k),P''(V_k)]$为基本互补划分。

下面我们定义两种类型的算子$D'$与$D''$。它们用来试验$C_j[P'(V_k),P''(V_k)]$是否为基本互补划分。

在 $C_j[P'(V_k),\ P''(V_k)]$中，令 $I$与$\overline{I-\{j\}}$ 分别是$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的SDR。若$R'$与$R''$分别是$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的子集，则算子$D'$与$D''$如下地定义：

$D'(R')=\{p'';p''$ 在$P''(V_k)$中，在$R'$中存在一个$r'$，使$p''$ 与$r'-(r'\cap I)$之交为非空集$\}$，

$D''(R'')=\{p';\ p'$ 在 $P'(V_k)$中，在$R''$中存在一个$r''$，使$p'$与 $r''-r''\cap\overline{(I-\{j\})}$ 之交为非空集$\}$。

有时，上述类型的运算需重复多次。为方便起见，令 $D_3(R')=D'(D''(D'(R')))$，$D_4(R')=D''(D_3(R'))$，$D_3(R'')=D''(D'(D''(R'')))$，以及 $D_4(R'')=D'(D_3(R''))$。推广到一般情况是自然的，无需作进一步的说明。

在$P'(V_k)$与$P''(V_k)$中，令$p'$与$p''$是它们的元素，使得$p'\cap p''\supseteq\{j\}$。令$u_m$与$v_m$分别是在$D_u(p')$与$D_v(p'')$中使 $D_{u_m}(p')\neq H_0$与 $D_{v_m}(p'')\neq H_0$的 $u$与 $v$的最大整数，利用这些定义，我们现在给出一个重要定理，可以用来作为试验$C_j[P'(V_k),P''(V_k)]$是否为基本互补划分的简单与有效的算法。

**定理3**．(Chen 1969 c)。令$B'$是$p'$，$D_{2x}(p')$以及$D_{2y-1}(p'')$的并，$x=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}u_m\right]$与$y=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}\left(v_m+1\right)\right]$，并令$B''$是集合$p''$，$D_{2x-1}(p')$与$D_{2y}(p'')$之并，$x=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}\left(u_m+1\right)\right]$与$y=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}v_m\right]$，此处$[z]$表示小于实数$z$的最大整数，以及$D_1(R')=D'(R')$ 与 $D_1(R'')=D''(R'')$。当且仅当 $B'=P'(V_k)$或$B''=P''(V_k)$时，$C_j[P'(V_k),\ P''(V_k)]$ 是基本互补划分。

作为一个示例，令$P'(V_{12})=\{1;2,8;3,6,7;4,5;9,10,\ 11,12\}$，$P''(V_{12})=\{5;6;7;8;9;\ 4,10;\ 3,11;\ 1,2,12\}$，此处分号用来分开各子集，而一个子集中的各元素用逗号来隔开。这一对划分相对于元素12成补，因为存在着一个 $V_{12}$ 的子集 $I=\{1,\ 2,\ 3,4,\ 12\}$，使得 $I$与$\overline{I-\{12\}}$分别是$P'(V_{12})$与$P''(V_{12})$的SDR。利用前面的算子且令 $p'=\{9,10,\ 11,12\}$与 $p''=\{1,2,12\}$，我们得到下列非空集。

$$D'(p')=\{9;4,10;3,11\},$$

$$D''(D'(p'))=D''(9;\ 4,10;\ 3,11)=\{3,6,7;4,5\},$$

$$D'(D''(D'(p')))=D'(3,6,7;\ 4,5)=\{5;\ 6;\ 7\},$$

$$D''(p'')=\{1;\ 2,8\},$$

$$D'(D''(p''))=D'(1;2,8)=\{(8)\}$$

因此 $u_m=3$与$v_m=2$。因为根据定理3

$$B'=D_2(p')\cup D_1(p'')\cup p'=P'(V_{12}),$$

所以$C_{12}[P'(V_{12}),P''(V_{12})]$是基本互补划分。不难校验这对划分对应于 $V_{12}$ 中的任何一个元素，都将成为基本互补划分。正如我们在下列定理中见到的那样，一般说来这也是正确的。

**定理4**．如果$C_j[P'(V_k),P''(V_k)]$是基本互补划分，则

$$C_i[P'(V_k),\ P''(V_k)]\approx C_j[P'(V_k),P''(V_k)] \qquad (6)$$

所有的$i$与$j$在$V_k$中。

于是，一对基本互补划分 $C_i[P'(V_k),P''(V_k)]$与参考元素$i$的选取无关。为简单起见，我们把它记作$C[P'(V_k),\ P''(V_k)]$。

**推论2.** 当且仅当$C[P''(V_k),P'(V_k)]$是基本互补划分时，则$C[P'(V_k),P''(V_k)]$也是基本互补划分。

换句话说，只需列出一些足够大的$k$值的$V_k$的基本互补划分即可。无需全部地列写它们，列出一半已足够，另一半基本互补划分可利用交换$P'(V_k)$与$P''(V_k)$的位置即简单地得到。基于上述结果，Goyal (1971) 已经写出了一个计算机程序。他还列出了$k=6$时的全部基本互补划分。这对于大多数实际网络已足够了。

### 2.2 无重复地产生树

现在，我们将应用基本互补划分来产生树与补树，且没有重复引起的多余项。为了可以将这些结果用到定理1上，我们把定理1写成不同而较为方便的形式是必要的。

**推论3.**

$$T=\oplus T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k)), \tag{7a}$$

$$\overline{T}=\oplus \overline{T}'(P'(V_k))\times \overline{T}''(P''(V_k)), \tag{7b}$$

此处$P'(V_k)$与$P''(V_k)$是$V_k$中相对于 $i_k$ 的互补划分，环和是对所有可能的 $C_{i_k}[P'(V_k),\ P''(V_k)]$求取。

显然，在取环和之前，7($a$)中的每一项或者是一个树，或者是至少包含有一个回路的子图。如果它是一个具有回路的子图，则这种子图必定出现偶数次。这一点对于(7$b$)式也类似适用。因此如何利用定理1来无重复地产生树和补树的问题便简化为表征一类互补划分的特性的问题，这种互补划分不会产生至少包含有一个回路或一个割集的子图。这一类划分实际上是集合$V_k$的一类基本互补划分。

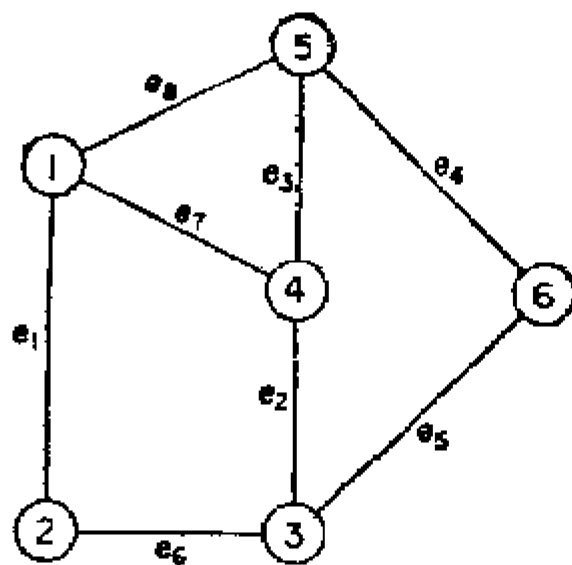


图1 例1中所研究的给定图

**定理5** (Chen 1969 e)*

$$T=\bigcup T'(P'(V_k))\times T''(P''(V_k)), \tag{8a}$$

$$\overline{T}=\bigcup \overline{T}'(P'(V_k))\times \overline{T}''(P''(V_k)), \tag{8b}$$

式中$C[P'(V_k),P''(V_k)]$是基本互补划分，取并是对所有可能的$C[P'(V_k),P''(V_k)]$求取。

本定理的证明与几个研究过的例子可在 Chen (1971)的文中查到。

一个类似于(8$a$)的结果曾由 Mayeda (1959)得出。但是，他的结果仅当$k\leqq 7$时是必要而充分的。对于$k>7$的情况，他提出的条件是不充分的，构成$V_k$的一个非基本互补划分的反例是不难找到的。

例1. 研究图1中所示的图。该图$G$可沿节点3、4与5分解为两个子图$G'=e_1e_6e_7e_8$与$G''=e_2e_3e_4e_5$。从定理5，我们有

$$\begin{aligned}T=&T'(3;4;5)\times T''\cup T'\times T''(3;4;5)\cup T'(3;4,5)\times T''(3,5;4)\\&\cup T'(3,5;4)\times T''(3;4,5)\cup T'(3;4,5)\times T''(3,4;5)\cup T'(3,4;5)\\&\times T''(3;4,5)\cup T'(3,4;5)\times T''(3,5;4)\cup T'(3,5;4)\times T''(3,4;5)\\=&\{e_1e_6,e_1e_7,e_1e_8,e_6e_7,e_6e_8\}\times\{e_2e_3e_4,e_2e_3e_5,e_2e_4e_5,e_3e_4e_5\}\\&\cup\{e_1e_4e_6e_7e_8,e_1e_5e_6e_7e_8\}\cup\{e_4e_5\}\times\{e_1e_7e_8,e_6e_7e_8,e_1e_6e_7\}\\&\cup\{e_1e_3e_4e_6e_8,e_1e_3e_5e_6e_8\}\cup\{e_2e_4,e_2e_5\}\times\{e_1e_7e_8,e_6e_7e_8,e_1e_6e_8\}\end{aligned}$$

$\cup\{e_1e_3e_4e_6e_7, e_1e_2e_5e_6e_7\}$

在此例中，所有的树以各类子图的笛卡儿乘积的并出现。从网络图论的观点来看，这是最希望的形式，同时无需进行笛卡儿乘积的运算。因此，划分的优点是很清楚的，这样不仅项数大大减少了，而且各项都是一些“较少”的项，计算每项所需的计算量也较小。

用于特殊类型图的生成公式也已经作过研究。利用一个总双口网络的网络参数与局部双口网络的网络参数之间的标准关系，当这些网络呈级联、并联或串联时，Kim(1959)导出了原始网络与局部网络之间的拓扑关系，并且表示成简单的形式。Myers (1967) 研究了局部双口网络是级联的情况。他用相应的连通片的子图（无重复而引起的多余项）提出了无互感的无源双口网络级联的树的生成公式。当然局部双口网络是格形网络时是其一种特殊情况。适用于格形网络级联的生成公式是由 Layton 与Frisch (1964)得出的。更近一些，Chen(1968)推广了 Myers 的工作，他提出了一个生成公式，在该式中任意无耦合的多端网络级联中的树表示为相应的连通片子图集的笛卡儿乘积。当所有多端局部连通片网络是并联的特殊情况，由 Arango 等人 (1970)得出过一个生成公式。但是，与 Chen 的方法不同，他的工作是基于格论。

**2.3 一个重要的特殊情况**

把一个图$G$分解为$G'$与$G''$，使得$G'$或$G''$仅含一条边，是一种很简单的方法。如果我们把这一过程重复应用到$G'$与$G''$上，从推论1我们将无重复地产生$G$的全部树。换句话说，如果$G$的一个条边$e$要区分的，则树可以分为包含有边$e$的树$T^e$与不包含边$e$的树$T^{\bar{e}}$。如果$G(g_1; g_2)$是从$G$中利用短接所有包含在$g_1$中的边（移去由此而产生的所有自环），然后移去包含在$g_2$中的所有边而得到的图，此处$g_1$与$g_2$是$G$的两个边不相接的子图，则$T^e$的各元素与$G(e;\phi)$中的树有一一对应的关系，$T^{\bar{e}}$是$G(\phi;e)$中树的集合。如果重复地把这一过程应用在$G(e;\phi)$与$G(\phi; e)$上，我们将无重复地产生全部树。

上述算法最初是由 Feussner (1902,1904) 提出的，同时由 Percival (1953) 明显地使用过。这一算法还由Seacat (1963 a,b)，Zobrist 和 Lago (1965)，Minty (1965)，O'Neil和Slepian (1966)，LaPatra 和 Willis (1967)，Holt和 Fiedler(1968)，Chan 和 Chang(1968)，Ardon 和 Malik (1969)，Amoia 和 Cottafava (1969) 叙述成各种形式。事实上在第二部分中讨论过的 Foldant 算法也是这种形式的变型。最近，Hattori 和 Sasaki (1970) 成功地应用这一原理来计算一个给定图的具有规定数目的独立回路与连通片的子图。

这一算法也由McILroy (1969)，Fernández (1969)，以及 Catts 与 Malik (1970)在数字计算机上执行过。下面，我们将证明$T^{\bar{e}}$可以从$T^e$无重复地产生。这一结果使数字计算机上实现这种算法得以简化。

令$Q_t(e)$是从$G$中树$t$的一条树支$e$而定义的$f$-割集，令$Q_i$是$G$的节点$i$的关联割集。

**定理6** (Chen 1969 d)。如果边$e$与$G$的节点$i$相关联，则

$$T^{\bar{e}}=\{t;\ t=(t'\oplus e)\cup e_x,\ t'在T^e中,\ e_x在Q_{t'}(e)\cap Q_i中,\ e_x\neq e\} \tag{9}$$

证明：假设在$T^{\bar{e}}$中存在一个不能由此过程而产生的树$t$，考察子图$t\cup e$，它必定包含有唯一的回路$C$。那么运算$(t\cup e)\oplus e'=t'$将产生一个树，它是$T^e$的一个元素，此处$e'\neq e$是$C$的一条边，它与节点$i$相关联。因为$e'$在$Q_{t'}(e)\cap Q_i$中，这意味着$t$可从$t'$利用上述过程而得到，于是出现了矛盾。因此，$T^{\bar{e}}$的每一个树可以由此过程而产生。

很明显上述过程所产生的每一项是$T^{\bar{e}}$的一个树。但是，我们必须证明它不会产生重复项。假设$t$是$T^{\bar{e}}$的一个树，并且由上述过程它出现不止一次，则至少存在两个不同的边$e_1$与$e_2$(以

节点$i$作为其一个端点)，使得$(t\ominus e_1)\cup e\neq(t\oplus e_2)\cup e$，此处$(t\ominus e_1)\cup e$与$(t\oplus e_2)\cup e$是$T^*$的不同元素，这将意味着$e_1$与$e_2$二者都包含在唯一的回路$t\cup e$中，这显然是不可能的。于是，定理得证。该定理的几个示例可在Chen(1969 d)中查到。

**3.利用初等变换来产生树和补树**

在本节中，我们将指出如何使用初等变换来产生一个图$G$的树及补树集合。

令$t$是$G$的一个树，$e_1$是$G$的一条边，但不在$t$中，那么下列运算

$$e_1\cup t-e_2=t' \tag{10}$$

称为初等树变换，其中$t'$是$G$的一个树，$e_2$是$t$中的一条边。在$e_1\cup t$中，我们可以求得唯一确定的$f$-回路。如果$e_2$包含在$f$-回路中，则$t'$除了一条边以外其余的边都与$t$是公共的。因此$t'$是离开$t$距离为1的树。

类似地，令$\bar{t}$是$G$的一个补树，$e_1$是$G$的一条边但不在$\bar{t}$中，那么下列运算

$$e_1\cup\bar{t}-e_2=\bar{t}' \tag{11}$$

称为初等补树变换，$\bar{t}'$是$G$的一个补树，$e_2$是$\bar{t}$的一条边。如果$e_1$与$e_2$包含在相对于$t$的相同的$f$-割集中，则$\bar{t}'$是离开$\bar{t}$距离为1的$G$之补树。

**定理7.** 在一个连通图中，其任意两个树(补树)可通过有限次的初等树(补树)变换而互相得到。

该定理的证明是很容易的，此处从略。

很清楚，定理7可以用来产生一个图的全部树与补树。但是这种方法所产生的树与补树不全然是相异的。根据这一原理，Bercovici等人(1968)用ALGOL 60写了一个产生树的计算机子程序，并且用枚举法消除了重复项。

早先，Watanabe(1960)提出一种称为扩展变换(*spread transformation*)的计算方法以求得$G$的树的集合。事实上，这种扩展变换是初等树变换的一个子类别。对于一个给定的树$t_0$，众所周知至少有两个度数为1的节点。令$i$是$t$中的一个此种节点。如果$e_j$是$t$的一条边，$i$是其的一个端点，所谓相对于$i$的扩展变换，意味着进行$(t-e_j)\cup e_k$的运算，此处$e_k$是$G$中节点$i$的关联割集$Q_i$的一条边，且$e_j\neq e_k$。显然利用这种方法所产生的树不全部是相异的，而且这种方法不会产生$G$的全部树。

令$t_0$与$\bar{t}_0$分别是$G$的一个树与补树，使得$G=t_0\cup\bar{t}_0$。还令$E_q$与$E'_q$分别是在$t_0$与$\bar{t}_0$中包含有$q$条边的子图。正如第二部分§6中所定义。令$t(E'_q)$与$\bar{t}(E_q)$是$G$的一个树与一个补树，使得

$$t(E'_q)\cap\bar{t}_0=E'_q, \tag{12a}$$

$$\bar{t}(E_q)\cap t_0=E_q \tag{12b}$$

特殊地，我们定义$t(E'_0)=t_0$与$\bar{t}(E_0)=\bar{t}_0$。我们还用$T(E'_q)$与$\bar{T}(E_q)$分别表示$G$的树$t(E'_q)$与补树$\bar{t}(E_q)$集合，特殊地，还有$T(E'_0)=\{t_0\}$与$\bar{T}(E_0)=\{\bar{t}_0\}$。最后，$\bar{E}_q$与$\bar{E}'_q$分别表示在$t_0$与$\bar{t}_0$中的$E_q$与$E'_q$的补。很清楚，$t(E'_q)$是一个离开$t_0$距离为$q$的树，$T(E'_q)$是离开$t_0$距离为$q$的树的集合。这对于$\bar{t}(E_q)$与$\bar{T}(E_q)$也类似成立。注意我们在此处所定义的某类树与补树的符号与前面定义过的$G$之$k$-树符号之间的差别。

因为$T(E'_a)\cap T(E'_b)=\varnothing$的充要条件是$E'_a$与$E'_b$是$\bar{t}_0$的两个不同的子图时，$G$的树集合可以如下地递归产生。这对于补树集合也类似成立。

**定理8.**

$$T=\bigcup_{q=0}^{n}\bigcup_{(E'_q)}T(E'_q), \tag{13a}$$

此处$E_0'=\phi$，且当$q\geq 1$时，有

$$T(E_q')=\{e_{ij}\}\times\partial T(E_q'-e_{ij})/\partial P_{ij}, \tag{13b}$$

式中$e_{ij}$是$E_q'$具有端点为$i$与$j$的一条边，$P_{ij}$是在$t_0$中连接节点$i$与$j$的唯一通路。

证明：(13a) 式的正确性是显然的。(13b)式是直接从第一部分的推论4与下列事实而得出，即在$T(E_q')$中的各元素与$G(E_q', \bar{E}_q')$的树之间存在着一一对应的关系。

类似地，可叙述初等补树变换的对偶结论。这种变换已被Fujisawa (1959) 成功地应用于有源网络的分析上。

**定理9.**

$$\bar{T}=\bigcup_{q=0}^{r}\bigcup_{(E_q)}\bar{T}(E_q), \tag{14a}$$

式中$E_0=\phi$，且当$q\geq 1$以及$Q_{t_0}(e)-e\neq\phi$时，

$$\bar{T}(E_q)=\{e\}\times\partial\bar{T}(E_q-e)/\partial(Q_{t_0}(e)-e), \tag{14b}$$

式中$e$是$E_q$的一条边，$Q_{t_0}(e)$是在$G$中相对于$t_0$、且由$t_0$的$e$所定义的$f$-割集。

注意(13)式或(14)式与第二部分的(16)式或(18)式的相似性。

上述方法的主要缺点在于可能出现重复项，尽管这种重复在一类$T(E_q')$或$\bar{T}(E_q)$之中出现。如果用上面的方法用来产生一个图的树与补树，必须考虑两类重复：(1)从$t_0$与$\bar{t}_0$距离为$q$的树集合与补树集合分别为$T(E_q')$与$\bar{T}(E_q)$，它们可以从离开$t_0$与$\bar{t}_0$距离为$q-1$的几种不同的树与补树的集合而得到。(2)、(13b)与(14b)式中可能出现重复。第一类重复可以利用适当的编排$E_q'$或$E_q$的边的次序来避免。例如，$E_q'=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}, q=1,2,\cdots,m$，我们要求所有的整数以自然数的次序出现，正如我们将在(16)式中所见。第二类重复可利用Mayeda 与Seshu (1965) 所提出的方法加以避免。在下一节中，我们将基于$G$的$f$-割集，对他们的结果给出一个简单的证明与解释。

**3.1 无重复地产生树**

在本节中，我们将提出一种从离开一个基准树之距离为$q-1$的树产生离开其距离为$q$的树的有效算法，且没有重复而引起的多余项。因为补树的情况完全可用类似的方法加以处理，所以我们仅研究产生树的情况。

令$t_0=e_1e_2\cdots e_r$是$G$的一个基准树。令$E_q=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$是$t_0$的一个子图。记$t(E_q)$为$G$的一个树，使得

$$t(E_q)\cap t_0=E_q \tag{15}$$

注意(12)与(15)式之间的差别。因此，$t(E_q)$是离开$t_0$距离为$r-q$的一个树。还令$T(E_q)$是$G$中形如$t(E_q)$的树之集合，它曾在第二部分中的(16a)式中用过。如果$t$是$G$的一个树，正如以前那样，所谓$Q_t(e)$，意指是相对于树$t$、且由$t$之树支$e$而定义的$f$-割集。

**引理1** 令$T_q$是$G(E_q;\bar{E}_q)$的树的集合。那么$T(E_q)$的各元素与$T_q$的各元素成一一对应的关系。

**定理10** (Mayeda与Seshu 1965)。如果$t_0=e_1e_2\cdots e_r$的树支作如此标号，使得$t_0$的每一个子图$e_1e_2\cdots e_x (x=1,2,\cdots,r)$是连通的，并且若$E_q=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$，$i_1<i_2<\cdots<i_q$，则

$$T(\bar{E}_q)=\{t;\ t=(t'\oplus e_{i_q})\cup e, t'\text{在}T(\bar{E}_{q-1})\text{中}, e\text{在}Q_{i'}(e_{i_q})\cap Q_{i_q}(e_{i_q})\text{中且}$$

$$e\neq e_{i_q}\},\ \text{和}T(\bar{E}_q)\cap T(\bar{E}_p)\text{是空集。} \tag{16}$$

当且仅当$E_q\neq E_p$，$q,p=1,2,\cdots,r$

证明：不失一般性地我们假设给定图$G$的每条边均包含在某个回路中。如果不是如此，我们可研究从$G$中把所有非回路的边进行短接而得到的图$G^*$。因为非回路的边必定属于$G$的每一个树，显然(16)式也适用于$G^*$。为了保证$G(\bar{E}_q;\ E_{q-1})$的连通性，这一假设是必要的，因为我必须涉及到有关$f$-割集。(否则，我们必须应用林的概念，然后再定义$f$-割集)。为方便起见，令$G(\bar{E}_q,\ E_{q-1})$的树分为包含边$e_a$的树$T^{e_a}$，$a=i_q$，以及不包含边$e_a$的$T^{\bar{e}_a}$，还令$Q_i^*$是$G(E_q,\ E_{q-1})$中节点$i$的关联割集。为了避免使用多重下标，我们使用符号$Q_{t''}^*(e)$表示$G(\bar{E}_q,\ E_{q-1})$中相对于树$t''$、且由$t''$的树支$e$所定义的$f$-割集。

现在，令$G_1$与$G_2$是从$G$移去了$Q_{i_0}(e_a)$的边而得到的子图。很清楚$E_{q-1}$必定全部地包含在$G_1$或$G_2$中，因为$e_1e_2\cdots e_{q-1}$是G的一个连通子图。令$E_{q-1}$在$G_2$中，还令$i$是$e_a$的端点，$e_a$在$G_1$中。那么利用定理6，我们有：

$$T^{\bar{e}_a}=\{t^*;t^*=(t''\oplus e_a)\cup e_x, t''\text{在}T^{e_a}\text{中}, e_x\text{在}Q_{t''}^*(e_a)\cap Q_i^*\text{中}, e_x\neq e_a\}$$

如果$i$的度数为1，由此立即得到：

$$Q_{i_0}(e_a)\cap Q_{t'}(e_a)=Q_i^*\cap Q_{t''}^*(e_a); \tag{17}$$

如果$i$的度数大于1，则$G_1$中$t_0$的各条树支必属于$\bar{E}_q$，且(17)式还成立，此处$t'=t^*\cup\bar{E}_q$是$G$中的一个树，$t^*$是$G$中$t''$所对应的图。因为在$T(\bar{E}_{q-1})$或$(T(\bar{E}_q))$中的元素$t'(t)$与在$T^{e_a}(T^{\bar{e}_a})$中中的元素$t''$存在着一一对应的关系，使得相应的元素$t'(t)$与$t''$的差别仅仅在于包含了$\bar{E}_q$中的元素，在进行一些简单的代换之后，便得出本定理。

在第二部分(定理5)中，我们已用矩阵形式列写了这一定理。(16)式的递归公式在应用数字计算机产生树中是非常有用的。因为它提供了一种迭代地产生树的理论基础。且不会产生由于重复而引起的多余项。基于这一算法已由Seshu与Waxman(1966)以及Stehman等人(1969)写出了一个计算机的子程序，它作为大型网络故障诊断程序的一部分。最初是用IBM7094型机的FAP语言写成，而现在用的第二种形式还是用IBM 7094机，但采用的是FORTRAN IV语言。Mayeda与Seshu的程序已由Paul(1967)推广到产生有向树的情况。

这种方法初看起来人们似乎必须检查$2^r$个替换的集合。但是，如果任何一次替换得到一个空集，那么以后的替换可不必再检查。因此一般地说要检查的替换数目并不是$2^r$，但这不是所需的绝对最小值。当一个网络是有源网络时，利用初等树变换产生树的附加优点表现在相对于前面的树来确定每一个树的符号比较容易(例如Talbot 1965)。这对于补树也类似成立。最后，我们指出这种方法需要产生一个基准树，这在机器上是容易做到的；需要人们根据该定理来标记该基准树，这些也总是可能与容易做到的，并且需要人们对一个给定的树计算$f$-割集，这还是容易做到的。由一个树所定义的$f$-割集矩阵可以简单地从一个任意割集矩阵(利用相应于该树的树支)加上一个单位矩阵而得到。为此目的，在第二部分的§7中曾提出过一种算法。

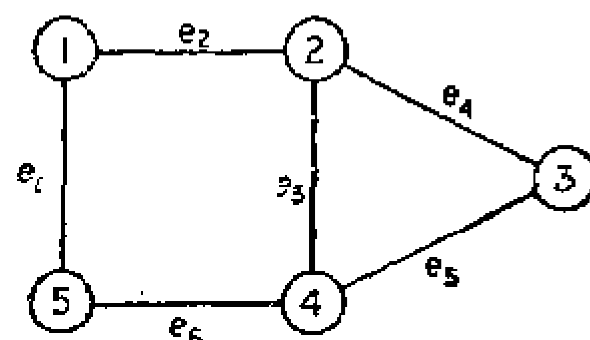


图2　例2中所研究的给定图

例2　研究图2所示的图$G$。令$t_0=e_1e_2e_3e_4$。

$$Q_{t_0}(e_1)=e_1e_6,\quad Q_{t_0}(e_2)=e_2e_6,$$
$$Q_{t_0}(e_3)=e_3e_5e_6,\quad Q_{t_0}(e_4)=e_4e_5$$

从定理10，对于$q=1$，我们有：

$$T(e_2e_3e_4)=\{t;\ t=(t'\oplus e_1)\cup e,\ t'=t_0,\ e\text{在}e_1e_6\text{中},\ e\neq e_1\}$$
$$=\{e_2e_3e_4e_6\},$$
$$T(e_1e_3e_4)=\{e_1e_3e_4e_6\},$$
$$T(e_1e_2e_4)=\{e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_4e_5\},$$
$$T(e_1e_2e_3)=\{e_1e_2e_3e_5\}$$

因此$G$中离开$t_0$距离为1的树集合$T_1$为：

$$T_1=\{e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_6,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_5\},$$

对于$q=2$，我们有：

$$T(e_3e_4)=\{t;\ t=(t'\oplus e_2)\cup e,\ t'=e_2e_3e_4e_6,\ e\text{在}e_1e_2\cap e_2e_6\text{中},\ e\neq e_2\}$$
$$=H_0,$$
$$T(e_2e_4)=\{e_2e_4e_5e_6\},$$
$$T(e_2e_3)=\{e_2e_3e_5e_6\},$$
$$T(e_1e_4)=\{e_1e_4e_5e_6\},$$
$$T(e_1e_3)=\{e_1e_3e_5e_6\},$$
$$T(e_1e_2)=\{e_1e_2e_5e_6\}$$

因此，离开$t_0$距离为2的树集合$T_2$为：

$$T_2=\{e_2e_4e_5e_6,\ e_2e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_2e_5e_6\}$$

对于$q=3$，我们有：

$$T(e_1)=\{t;\ t=(t'\oplus e_4)\cup e,\ t'=e_1e_4e_5e_6,\ e\text{在}e_2e_3e_4\cap e_4e_5\text{中},\ e\neq e_4\}$$
$$=H_0,$$
$$T(e_2)=T(e_3)=T(e_4)=H_0$$

然而，没有离开$t_0$距离为3的树。因此，$G$的树集合可得到如下：

$$T=\{t_0\}\cup T_1\cup T_2\cup T_3=\{t_0\}\cup T_1\cup T_2$$

### 3.2 树图

一个图$G$的树集合用$b$维矢量空间来表示的思想最初是由Watanabe(1960)提出的。在该空间用点(节点)来表示树，同时各边表示所有的初等变换；当且仅当$t_1$与$t_2$用一个初等变换来建立联系时，则在相应于$t_1$与$t_2$的节点之间连接一条边。Cummins(1966)把这种图称为$G$的树图。关于树图的一个重要结论叙述如下：

**定理11**(Cummins1966)。对于一个至少包含3个树的图而形成的树图，其树图的任意一条边，均存在着含有该边的一个哈密尔顿回路。

这条定理可对$G$的边、利用归纳法容易证明。并且Chen(1967)已将其推广到有向树的情况。他指出对于一个至少含有3个有向树的有向图，在包含有任选一条边的有向图中存在一个哈密尔顿回路。注意有向树图是一个无向图。最近，Kamae(1967 b)把此工作向前推进了一步，并证明了一个给定矩阵的主子矩阵集合也具有这种性质。

Watanabe(1960)还指出，如果人们能求得一种产生一个树图的树的算法，那么也就得到了产生该图之树集合的一个极为方便的方法。Kamae(1967a)、Kishi 与 Kajitani(1968)向着这一目标进一步地工作，并指出在一个树图的完备子图中产生一个哈密尔顿回路，然后向这

些局部哈密尔顿回路组合起来以得到树图的一个哈密尔顿回路，因此产生了原始图的全部树。

**4.在完备图或近乎完备图中树的产生**

在完备图或近乎完备图中列出所有可能的树的问题已由几位作者进行过研究。虽然至今为止所讨论过的方法都可用于这一目的，但是有时为了改进此类图的计算有效性，一些特殊的方法还是有用的，有时是必需的。

令$G_n$是一个$n$个节点($n\geq 2$)的完备图。显然，$G_{n-1}$是$G_n$的一个完备子图。当且仅当$G_n$的一个子图是$G_{n-1}$中的一个$k$-树与一个包含有$G_n-G_{n-1}$中的$k$条边的子图为边不相接之并，在$k$条边中的每一条都与$k$-树的一个连通片相连接时，则该子图称为$G_n$的一个树。因此，$G_n$的所有树可用这种方法递归地产生，基于这一点，为了产生$G_n$的树，Hirayama 等人（1963）为NEAC1103计算机编写了一个程序。在非完备图的情况下，我们总可以加上适当的边使之成为完备图，然后我们最后地删去含有这些添加边的树。当然，如果一个图接近完备图，这是一种令人满意的方法。

另有几种方法可供使用。正如§2.3中所提到，Zobrist和Lago的方法本质上是短接——移去一条边法，无需再作进一步的说明。Char(1968)提出了一种简单而有效的构成方法——本质上是检验$G_n$的$n-1$条边的所有可能的组合。他的方法比较容易编成程序，但是需要占用过多的存贮空间。下面，我们将叙述产生$G_n$的树与$k$-树的简单编码法。这种编码法的特点是迭代的，同时没有重复而产生的多余项。

**4.1 编码**

连接$G_n$的节点$i$与$j$之间的一条边用$ij$或$ji$来表示。如果存在$G_n$的并列边的话，可通过采用适当的下标来区分。如果$i$、$j$与$k$是$G_n$的节点，所谓$i(j+k)$，意指

$$i(j+k)=(j+k)i=ij+ik \tag{18}$$

如果$a$、$b$、$c$与$d$是$G_n$的节点，我们有：

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

换言之，这种运算与实数系统所定义的运算相同，只是不将它们的数值合并。

如果$g_1$，$g_2$，与$g_3$是$G$的子图，所谓$g_1(g_2+g_3)$意指

$$g_1(g_2+g_3)=(g_2+g_3)g_1=g_1g_2+g_1g_3 \tag{19}$$

令$I_k=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$是整数集合$S_n=\{1,2,\cdots,n\}$的子集，且令$Z_u=\{z_1,z_2,\cdots,z_u\}$是$I_k$的子集，此处$1\leqq u\leqq k\leqq n$。

令

$$\left(I_1;\ \sum_x j_x\right)=\sum_x i_1 j_x, \tag{20a}$$

并且如下地定义$\left(I_k;\ \sum_x j_x\right)$：

$$\left(I_k;\ \sum_x j_x\right)=\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_x i_j j_x\right)+\sum_{u=1}^{k-1}\sum_{(Z_u)}\left(\left[\prod_{v=1}^{u}\left(\sum_x z_v j_x\right)\right]\left(\bar{Z}_u;\ \sum_v z_v\right)\right) \tag{20b}$$

$k\geqq 2$。此处$\bar{Z}_u$表示$I_k$中的$Z_u$的补，且

$$\sum_v z_v=z_1+z_2+\cdots+z_u, \tag{20c}$$

和式$\sum_{(Z_u)}$是对$I_k$中所有可能的$Z_u$求取。

在下一节中我们给出$G_n$的树与$k$-树之间的关系之后，我们将给出上述编码展开式的几个说明性的例子。

**4.2 在完备图中的树及k-树**

在这一节中，我们将指出前节中所叙述的编码法可有效地用来产生$G_n$中的树与多树。

**定理12**(Chen1970)　对于一个$n$个节点的完备图$G_n$，在$(S_{n-1};\ n)$的最后展开式中的每一项都唯一地对应了$G_n$的一个树，此处$n\geqq 2$。

这条定理可对$G_n$的节点数用归纳法来加以证明。

因为在$S_{n-1}$中的一个整数$i$与$(S_{n-1};\ n)$中整数$n$的交换等效于$G_n$中节点$i$与节点$n$之标号的互换，这一过程并不改变$G_n$的树之集合，因此，我们有：

**推论4**　对于所有$ij=ji$、$i\neq j$，我们有：

$$(S_{n-1};\ n)=(\bar{I}_1;\ i_1), \tag{21}$$

式中$\bar{I}_1$表示在$S_n$中$I_1$的补。

**定理13**(Chen1970)　对于一个$n$个节点的完备图$G_n$，

$$(\bar{I}_k;\ i_1+i_2+\cdots+i_k) \tag{22}$$

的最后展开式中的每一项都唯一地对应了$G_n$的一个$k$-树$t(I_k)$，此处$\bar{I}_k$表示$S_n$中$I_k$的补。

**例3**　列出4个节点的完备图$G_4$的全部树，从定理12，它等效于下列编码的运算：

$$\begin{aligned}
(\ _3;\ 4)&=\prod_{y=1}^{3}(y4)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{(Z_k)}\left(\left[\prod_{v=1}^{k}(z_v4)\right]\left(\bar{Z}_k;\ \sum_v z_v\right)\right)\\
&=(14)(24)(34)+(14)(\{2,3\};\ 1)+(24)(\{1,3\};\ 2)+(34)(\{1,2\};3)\\
&\quad+(14)(24)(\{3\};\ 1+2)+(14)(34)(\{2\};\ 1+3)\\
&\quad+(24)(34)(\{1\};\ 2+3)\\
&=(14)(24)(34)+(14)[(21)(31)+(21)(\{3\};\ 2)+(31)(\{2\};\ 3)]\\
&\quad+(24)[(12)(32)+(12)(\{3\};\ 1)+(32)(\{1\};\ 3)]+(34)[(13)(23)\\
&\quad+(13)(\{2\};\ 1)+(23)(\{1\};\ 2)]+(14)(24)(31+32)\\
&\quad+(14)(34)(21+23)+(24)(34)(12+13)\\
&=(14)(24)(34)+(14)(21)(31)+(14)(21)(32)+(14)(31)(23)\\
&\quad+(24)(12)(32)+(24)(12)(31)+(24)(32)(13)+(34)(13)(23)\\
&\quad+(34)(13)(21)+(34)(23)(12)+(14)(24)(31)+(14)(24)(32)\\
&\quad+(14)(34)(21)+(14)(34)(23)+(24)(34)(12)+(24)(34)(13)
\end{aligned}$$

在上述展开式中有16项，每一项都对应于4个节点的完备图$G_4$的一个树。

**例4**　列出5个节点完备图$G_5$的全部2-树$t(1;\ 3)$与3-树$t(1;\ 3;\ 5)$，这相当于计算下列编码：

$$\begin{aligned}
(\{2,4,5\};\ 1+3)&=(21+23)(41+43)(51+53)+(21+23)[(42)(52)\\
&\quad+(42)(54)+(52)(45)]+(41+43)[(24)(54)+(24)(52)\\
&\quad+(54)(25)]+(51+53)[(25)(45)+(25)(42)+(45)(24)]\\
&\quad+(21+23)(41+43)(52+54)\\
&\quad+(21+23)(51+53)(42+45)\\
&\quad+(41+43)(51+53)(24+25)
\end{aligned}$$

在最后展开式中有50项，其中每一项都对应于一个$G_5$的2-树$t(1;\ 3)$。

类似地，我们有：

$$(\{2,4\};\ 1+3+5)=(21+23+25)(41+43+45)+(21-23+25)(42)$$
$$+(41+43+45)(24)。$$

在最后展开式中有15项，其中每一项都对应了一个$G_5$的3-树$t(1;\ 3;\ 5)$。

#### 4.3 在近乎完备图中的树与k-树

不失一般性地我们假设给定的图$G$具有$n$个节点且未包含并列边。显然，$G$是$n$个节点的完备图$G_n$的一个子图。如果我们在$(S_{n-1};\ n)$编码展开式的每一步，把$G_n$中未包含在$G$中的边代作零，则我们将产生$G$的所有树，此处

$$0(ij+uv)=(ij+uv)0=0(ij)+0(uv), \tag{23a}$$

$$0(ij)=(ij)0=0, \tag{23b}$$

$$0+ij=ij+0=ij \tag{23c}$$

值得注意，不像Hirayama等人(1963)以及Zobrist和 Lago(1965)所提出的方法——删去添加边的树只是在最后一步进行，而在我们的方法中，对于不存在边的代零工作可在任何一步进行。因此，如果在展开过程中包含有零的各项均可略去，因此这一过程不会导致任何多余项的产生。这一点对于$G$的$k$-树的产生也同样成立。显然，这种方法可以应用到任意图形上。但它仅对于近乎完备图是比较有效的。

### 5.其它方法

在§2.3中我们已经指出，如果$G$的一条边是要区分的，则$G$的树可划分为含有这条边的树与不含这条边的树。这一点的简单推广是：如果$P_{ij}$是连接$G$中节点$i$与$j$的通路，$i\neq j$，则$G$的树集合$T$可表示为：

$$T=\cup\{P_{ij}\}\times T^*, \tag{24}$$

式中$T^*$是$G(P_{ij};\ \phi)$的树之集合，并是对$G$中所有可能的$P_{ij}$求取。

因此，这种方法可用来产生$G$的全部树而无重复项。显然它可以推广到在有向图中产生有向树上。这种方法已由Mason与Zimmerman(1960)广泛地应用于有向图与无向图中。基于这一原理，Brownell(1968)，Fernández(1969)，Seppänen(1970)，以及Fry and Aatre(1970)编写了计算机程序。

另一种类型的迭代法，可称为树生长法，它是基于下列原理：从$G$的任意一个节点开始，假设这一过程有$k$次重复，且得到一个无回路的连通子图$g_k$。在第$(k+1)$次迭代中，在$g_k$上加上$G-g_k$的一条边，使所得子图仍是无回路的连通图，延续这一方法，直到最后产生一个树为止。因此利用一些薄记的方法，它可用来产生$G$的所有树。利用这一思想，Kim等人(1960)编制了一个程序。这一程序可适用于带复数支路导纳、节点数达到14的网络。它也可以用来分析大型网络，但是需首先将网络分解为一些二端子的子网络。

事实上，由Hirayama等人(1963)，Berger(1967)，以及 Char(1968) 所提出的方法也有这种优点。

最后，我们要指出，Malik和Lee(1967)以及 Malik(1970)已经利用复合矩阵的方法来产生树；Myers和LaPatra(1965)利用度数的要求来产生不同形式的树；Myers与 Auth(1965)已给出用王氏代数法产生树的例子，以及Zobrist和Jong(1967)给出了产生$k$-树的例子。

### 6.其它的一些研究

除了至今所提到的一些计算机程序之外，现在还有几个程序可供利用。在第二部分§7中讨论的矩阵法已由Rao和Murti(1969, 1970)以及Li(1971)，由Chan和Chang(1970)以及

Fernández(1969)用折边行列式(T—三角形法)以及Fernández(1969)用第一部分的王氏代数法在计算机上执行过，Fernández对这些方法作了比较。

应用树与补树来计算网络函数是众所周知的，为此目的，Watanabe(1958，1969)以及Mayeda(1957,1958)写出了计算机程序。对特殊类型结构的图，产生其树的问题已由Burstall(1965,1969)，Dawson(1967)，Zobrist和Barbay(1968)，Ardon和Malik(1970)，Blazhkevich和Mikhailova(1969a,b)，Brown(1971)，以及Krishnan和Shenoi(1970)作过研究。

## 结　论

在这三篇连续论文中，我们已经指出文献中所叙述的关于树与补树产生的大多数现有结果，初看起来它们的表现形式是不同的，但是可用下列四种方法来列出公式：

(i) 王氏代数法，它包括了偏导数法、结构数法，分离多项式法与矢量法。

(ii)矩阵公式法，它包括了同号行列式法，折边行列式法以及主子矩阵的计算。

(iii)图形的分解。

(iv)初等树变换与补树变换，它包括了树图列写法。

因此，为了推导这些公式，人们可提供一种统一理论，系统地总结现存的大多数结论。

虽然没有一种"最好"的方法可加以推荐，但是可对上述四种方法作出一般结论。王氏代数法是精巧的，且它自然地导致了图形的分解。但是这种方法因为产生了重复项，通常为了消去重复项而极费时间，所以无实用价值。矩阵法是基于主子矩阵的计算以及基于Mayeda与Seshu的初等树变换是最有效的。但通常对于一个实际的大型拓扑图，其树的数目非常大，其数目可达百万个。因此无论一种算法多么有效，人们必须产生许多树。例如Stehman等人(1969)列出了一个13个节点29条边的实际网络(图)，它包含了187970个树，如果采用Mayeda与Seshu法(1965)，在一台IBM7094数字计算机上产生全部树所需的时间是1935秒。因此将一个很大的图进行分解的优点是明显的。这不仅大大地减少了项数，而且各项都是较小的量级，计算每项所需的计算量较小，因为这些树都写成为笛卡儿乘积的形式。事实上，我们通常对所有的树与补树集合是不感兴趣的，而树支导纳乘积与补树阻抗乘积之和则更有意义。

因为过去的许多研究工作是在不同时间、不同地点作的，看来把过去的重要贡献进行统一化是很有价值的，从作者的意见看来，这将对该领域的进步已经产生或定将产生巨大的影响。

## 参　考　文　献


〔1〕AMOIA, V., and COTTAFAVA, G., 1969, *Proc. 3rd Asilomar Conf. on Circuits and Systems*, Pacific Grove, Calif., p. 462.

〔2〕ARANGO, H., HOLZMANN, C. A., FERNANDEZ, E., and PADIN, S., 1970, *Proc. Kyoto Int. Conf. on Circuit and System Theory*, Kyoto, Japan, p. 49.

〔3〕ARDON, M. T., and MALIK, N. R., 1969, *Proc. Twelfth Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Texas, Austin, VII. 2.1—2.7; 1970, *Proc. Thirteenth Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Minnesota, Minneapolis, VII. 6.1—6.15;

〔4〕BERCOVICI, M., PETRCIANU, A., and DUMA, M., 1968, *Revue roum. Sci Tech. Electrotech. Energy*, 13, 553.

〔5〕BERGER, I., 1967; *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 14, 417.

〔6〕BLAZHKEVICH, B. I., and MIKHAILOVA, YE. D., 1969 a, *Otbor Peredacha Inform.*, 69; 28; 1969, b, *Ibid.*, 69, 32.

〔7〕BROWN, K., 1971, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 18, 179.

[8] Brownell, R. A., 1968, *Proc. I. E. E. E.*, 56, 1121.

[9] Burstall, R.M., 1965, Experimental Programming Rept.No. 10; University of Edinburgh; 1969; *Mach. Intell.*, 3, 65.

[10] Chan; S. G., and Chang, W.T.; 1968, *Proc. 2nd Asilomar Conf. on Circuits and Systems*; Pacific Grove, Calif., p. 608; 1970, *Electronics Lett.* 6, 271.

[11] Char, J. P., 1968, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 15, 228.

[12] Chen; W.K., 1967, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*; 14, 231; 1968; *Symposium Digest*; I. E. E. E. Int. Symposium on Circuit Theory, Miami Beach, Florida; p. 79; 1969 a, *Proc. I. E. E. E.*; 57, 1292; 1969 b, *Proc. Instn elect. Engrs*; 116; 1639; 1969 c, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, 16; 518; 1969 d, *Int. J. Electron.*; 27; 101; 1969 e; *Ibid.*; 27, 319; 1970; *Proc. Kyoto Int. Conf. on Circuit and System Theory*, Kyoto, Japan; p. 47; 1971; *Applied Graph Theory* (Amsterdam; The Netherlands:North-Holland Publishing Co.).

[13] Cummins; R. L.; 1966; *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*; 13; 82.

[14] Dawson, D. F., 1967, Ph. D. Dissertation, University of Arizona, Tucson;

[15] Fernandez, E. B.; 1969, *Proc. Twelfth Midwest Symposium on Circuit Theory*; University of Texas, Austin; VII. 4.1—4.7.

[16] Feussner, W., 1902, *Ann. Phys.*; 9, 1304; 1904, *Ibid.*, 15, 385.

[17] Fry; R. W.; and Aatre; V. K.; 1970, *Electronics Lett.*, 6, 652.

[18] Fujisawa; T.; 1959; *I. R. E. Trans. Circuit Theory*, 6, 281.

[19] Gatts, T. F.; Jr.; and Malik; N. R., 1970, *Proc. Thirteenth Midwest Symposium on Circuit Theory*; *University of Minnesota, Minneapolis*, II. 4.1—4.9.

[20] Goyal; I. C.; 1971, M. S. Thesis, Ohio University, Athens.

[21] Hattori; Y.; and Sasaki; T.; 1970; *Electronics Communs Japan*, 53A, 1.

[22] Hirayama; H.; Watanabe; H.; and Harada, K., 1963; *Electronics Communs Japan*, 46; 9

[23] Holt; A.G.; and Fiedler; J.K., 1968, *Electronics Lett.*, 4, 183.

[24] Kamae, T., 1967 a; *I.E.E.E. Trans.Circuit Theory*; 14; 279; 1967 b; *SIAM J.appl.Math.*; 15; 1390.

[25] Kim; W.H.; 1959, J. *Franklin Inst.*, 267, 283.

[26] Kim; W.H.; Younger, D.H., Freiman, C.V.; and Mayeda; W., 1960, *proc. Eastern Joint Computer Conf.*; New York, p.241.

[27] Kishi; G.; and Kajitani; Y., 1968, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*; 15, 42.

[28] Krishnen, K.R.; and Shenoi, B.A., 1970, *Proc. Thirteenth Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Minnesota, Minneapolis, VII. 5.1—5.9.

[29] LaPatra, J. W.; and Willis; K. D.; 1967; *Proc. 1st Asilomar Conf. on Circuits and Systems*; Pacific Grove, Calif.; p.689.

[30] Layton; D.M., and Frisch; I.T.; 1964; *Proc. Second Allerton Conference on Circuit and System Theory*, University of Illinois, Urbana, p.467.

[31] Li, H.C.; 1971, M.S. Thesis, Ohio University, Athens.

[32] Malik; N.R., 1970, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 17, 149.

[33] Malik, N.R., and Lee; Y.Y.; 1967; *Proc. Tenth Midwest Symposium on Circuit Theory*; Purdue University, Lafayette; Indiana, VI. 5.1—5.11.

[34] Mason; S.J., and Zimmerman; H.; J., 1960, *Electric Circuits, Signals and Systems* (New York: Wiley).

[35] Mayeda; W., 1957, Interim Tech. Rept. No.6; University of Illinois, Urbana; 1958, Tech. Rept.; Engineering Experiment Station, University of Illinois; 1959, *I.R.E. Trans. Circuit Theory*; 6, 136 and 394.

[36] Mayeda, W., and Seshu; S.; 1965; *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 12, 181.

[37] McIlroy, M.D.; 1969; *Communs. Ass. comput. Mach.*, 12, 511.

[38] Minty, G.J., 1965, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, 12, 120.

[39] Myers; B.R., 1967; *Proc.Instn elect. Engrs*, 114, 1641.

[40] Myers; B.R., and Auth; L.V.; Jr.; 1965, *Proc. Third Allerton Conference on Circuit and System Theory*, University of Illinois; Urbana; p. 906.

[41] Myers, B. R., and LaPatra, J. W.; 1965; *Proc. Eighth Midwest Symposium on Circuit*

*Theory*, Colorado State University, Fort Collins, 11.1—11.2.

[42] O'NEIL, P.V., and SLEPIAN, P., 1966, *I.E.E.E. Trans. Circuit Theory*, **13**, 336.

[43] PAUL, A. J., Jr., 1967, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, **14**, 354.

[44] PERCIVAL, W.S., 1953, *J. Instn elect. Engrs*, Pt. III, **100**, 143.

[45] RAO, V. V. B., and MURTI, V. G. K., 1969, *Electronics Lett.* **5**, 282; 1970, *Ibid.*, **6**, 103.

[46] ROE, P. H., 1961, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, **8**, 496.

[47] SEACAT, R. H., 1963 a, *Proc. Sixth Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Wisconsin, Madison, GI-G15; 1963 b, *Proc. First Allerton Conference on Circuit and System Theory*, University of Illinois, Urbana, p. 603.

[48] SEPPÄNEN, J. J., 1970, *Communs. Ass. comput. Mach.*, **13**, 621.

[49] SESHU, S., and WAXMAN, R., 1966, *I. E. E. E. Trans. Rel.*, **15**, 11.

[50] STEHMAN, C.J., MAENPAA, J. H., and STAHL, W. J., 1969, *I. E.E. E. Trans. Circuit Theory*, **16**, 548.

[51] TALBOT, A., 1965, *I. E. E. E. Trans. Circuit Theory*, **12**, 170.

[52] WATANABE, H., 1958, *Proc. Annual Meeting of Institute of Electrical Communication Engineers of Japan*, p. 16; 1959, Paper of the Technical Group on Circuit Theory, Institute of Electrical Communication Engineers of Japan, pp. 1—38; 1960, *I. R. E. Trans. Circuit Theory*, **7**, 296; 1961, *Ibid.*, **8**, 4.

[53] ZOBRIST, G. W., and BARBAY, J. E., 1968, *Proc. Eleventh Midwest Symposium on Circuit Theory*, University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, p. 463.

[54] ZOBRIST, G. W., and JONG, M. T., 1967, *Electronics Lett.*, **3**, 330.

[55] ZOBRIST, G. W., and LAGO, G. V., 1965, *Matrix Tensor Q.*, **15**, 94.

# 十、有源网络拓扑分析

摘　要

本文证明一般网络的行列式及其余子式可以借助于“有向树”及“有向2-树”来计算，这里没有符号问题。这种有向树和有向2-树的乘积将自动地给出正确的符号。此外，这种方法既可用于节点导纳矩阵，也可应用于回路阻抗矩阵。在给定的网络是无源的与不含磁耦合的情况下，与节点导纳矩阵对应的有向图即简化为原网络；有向树与有向2-树分别简化为原网络的树及2-树。

**1.引言**

电网络拓扑分析得到广泛应用的原因在于它不仅以非常直观的方式显示出系统中所研究的各个变量之间的因果关系，而且为计算网络行列式以及余子式提供了一条捷径，因为它避免了网络行列式的计算中所存在的对消项。近年来对拓朴公式之兴趣的增长主要是由于这一事实。

推导一般电网络拓扑公式的三种方法，众所周知是由Mason[1]，Coates [2] 和Mayeda [3]所提出的。Mason的方法完全不同于Coates和Mayeda的方法，他用混合线图(含有有向边和无向边）来模拟一般电网络，并且通过一组规则来求解。当应用到大多数实际网络时，Mayeda和Coates两种方法的计算方案是相同的。他们的方法是对图进行修改，使新图的元件导纳矩阵是对角线矩阵。然后利用求出新图所有的完备树和完备2-树的乘积，再进行计算行列式。剩下的问题便是确定每一项的符号。虽然他们已经提供了求取各项的算法，但仍然是相当复杂的。

这里所提出的一种方法是一种借助于“有向树”来计算一般行列式的方法。此处没有符号问题，有向树的乘积将自动地给出正确的符号。

**2.定义和记号**

一个有向线图$G$是由集合$V$和集合$E$所组成，$V$中的元素称为节点，$E$中的元素是形如$(i,j)$的有序节偶，此处$i$与$j\in V$；节点$i$称为起始节点，节点$j$称为终止节点。

对于任意一个$i\in V$，符号$\rho(i)$与$\rho^*(i)$分别表示图中以$i$作为起始节点和终止节点的边集合的度数。如果$A$是$V$的一个子集，则用$A$所定义的$G$之局部图（用$G(A)$表示）是一个子图，它的节点集合是$A$，它的边是$G$中连接$A$之两个节点的所有边。当两个子图无公共节点时，它们是互不相交的。一个有向回路（或有向通路）若其包含的边数是$m$，则其长度为$m$。长度为1的有向回路（或有向通路）称为有向自环（或简称自环），一个偶连通片是指一个含有偶数条边的连通片。

**3.一般网络行列式及其伴随有向图**

当然可以用流图的方法来计算网络行列式[4～7]，但是这是不希望的，因为它存在着大量的对消项。本文所提出的方法既可适用于节点导纳矩阵，也可适用于回路阻抗矩阵。所以

我们用符号$A_{n\times n}$来表示这两种情况，其中矩阵$A$形如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

进而它还能写成稍有不同的形式：

$$A=\begin{bmatrix} \sum_{x=1}^{n} b_{1x} & -b_{12} & -b_{13} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & \sum_{x=1}^{n} b_{2x} & -b_{23} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ -b_{n1} & -b_{n2} & -b_{n3} & \cdots & \sum_{x=1}^{n} b_{nx} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} \qquad\qquad, \text{ 在} i\neq j\text{时，} i,j=1,\cdots,n \\ &= a_{ij}-\sum_{\substack{x=1\\x\neq i}}^{n} a_{ix}, \text{ 在} i=j\text{时，} i,j=1,\cdots,n \end{aligned}$$

与(2)式相对应的一个特定的有向图$G$，可用下列步骤作出：

1）$G$有$n+1$个节点。每一个节点用一个1到$n$的整数进行标记，第$n+1$个节点$r$称为参考节点。这样，标为$k$的节点与$A$的第$k$行相对应。

2）如果$b_{ij}\neq 0$，$i\neq j$，则从节点$i$到节点$j$有一条权为$b_{ij}$的有向边。

3）如果$b_{ii}\neq 0$，则从节点$i$到节点$r$有一条权为$b_{ii}$的有向边。

为了证明和书写的方便，这一特定的伴随有向图（或简称有向图）将用一个三元组表示，即表示成$G(V,E,f)$，其中$V$是节点的集合；$E$是边的集合，$f$是$E$域与复数域间的映射函数，即

$$\begin{aligned} f((i,j)) &= b_{ij} \quad \text{在} i\neq j\neq r\text{时，} i,j,r\in V, \\ &= b_{ii} \quad \text{在} i\neq r\text{，} j=r\text{时，} i,j,r\in V, \\ &= 0 \quad \text{其它。} \end{aligned}$$

为方便起见，$f$的范围从$E$推广到$G(V,E,f)$的任一因子$S$，即

$$f(S)=\Pi f((i,j))$$

此处该乘积遍取全部$(i,j)\in S$。

**4.有向树和一般网络行列式**

对于任意一个有向图$G(V,E,f)$存在着一个用以下方法而得到的一个对应无向图$G_u(V_u, E_u, f_u)$：

$$V_u=V_0$$

当且仅当$(i,j)\in E$或$(j,i)\in E$，或二者均$\in E$时，$(i,j)$或$(j,i)\in E_u$（次序是无关紧要的），

如果$f((i,j))\neq f((j,i))$，则$f_u$无意义，

如果$f((i,j))=f((j,i))$，则$f_u((i,j))=f((i,j))$。

**定义1.**

当且仅当满足下列两个条件时，称$G(V,E,f)$的子图$T_r^i$为$G(V,E,f)$的一个有向树：

1）$T_r^i$对应的无向图是$G(V,E,f)$的伴随无向图的一个树。

2）对于所有的$i \in V-r$，$\rho(i)=1$，此处$r$是$G(V,E,f)$的参考点，$V-r$是一个节点集合（从节点$V$中删去$r$），对于参考点$r$，$\rho(r)=0$。

**定理1.**

网络行列式按下式计算：

$$\det A=\sum_{T_r^i} f(T_r^i),$$

这里我们沿用了本文已定义了的符号，此处$T_r^i$是$G(V,E,f)$中的一个有向树，和式是对所有$T_r^i \in G(V,E,f)$求取。

该定理的证明在附录I中给出。

应该注意这条定理的实用性在于这一事实，即$b_{ii}$通常具有非常简单的形式，因为用$\sum_{\substack{x=1\\x\neq i}}^{n} a_{ix}$所表示的大多数项包含在$a_{ii}$中，即使是与电网络中有源元件相对应的项，如阴极跟随器中的$g_m$，也不会在$b_{ii}$中出现。如果(2)式中的$b_{ij}$互不相同，$i,j=1,2,\cdots,n$，那么与通常的代数方法或流图方法不同，用这种方法进行计算不涉及冗余项。因为$f(T_r^i)$自动地给出正确的符号，所以不存在符号问题，现在来叙述下列定理。

**定理2.**

如果$A$是一个对称矩阵，那么在$G_u(V_u,E_u,f_u)$中的树与$G(V,E,f)$中的有向树存在着一一对应的关系。此外，各个树与各个有向树的映射是相等的。

**推论1.**

如果$A$是一个对称矩阵，则从$G(V,E,f)$中可能得到的有向树之最大数目是$(n+1)^{n-1}$。此处$n$是$A$的阶数。

**推论2.**

如果$A$是一个无源网络的节点导纳矩阵（或回路阻抗矩阵），那么

$$\det A=\sum_{T} f_u(T),$$

式中$T$是$G_u(V_u,E_u,f_u)$中的一个树，和式是对$G_u(V_u,E_u,f_u)$中全部$T$求取。

**推论3.**

如果$A$是一个不含磁耦合的无源网络的节点导纳矩阵，那么

$$\det A=\sum_{T} f_n(T),$$

此处$T$是$N(V_n,E_n,f_n)$中的一个树；$N(V_n,E_n,f_n)$是给定的电网络；和式是对$N(V_n,E_n,f_n)$中的所有$T$求取。

推论3曾由Mayeda和Seshu所证明[8]，[9]。值得注意如果$A$是一个不对称的矩阵，那么对于每一个$T_r^i \in G(V,E,f)$来说，仍然存在着一个唯一的树$T \in (V_u,E_u,f_u)$，但是反过来并不成立。因此一般说来，$G(V,E,f)$的有向树的数目要小于$G_u(V_u,E_u,f_u)$中之树的数目。这一结论是所希望的，因为它简化了求取全部有向树的过程。

因为$b_{ii}$是(1)式中第$i$行的诸元素之和，所以伴随有向图可以直接从电网络画出，而不必

预先写出相应的网络行列式。下面，我们通过一个普通的反馈网络的例子来说明这一点。

例1.

一个电压反馈放大器的网络如图1所示。在图2中画出了表示该网络的节点导纳矩阵的伴随有向图$G(V,E,f)$。

为了讨论的方便，我们在图3中画出了图2的有向树$T_i$。这个电压反馈放大器的节点导纳矩阵$A$之行列式值由下式给出：

$$\det A = Y_1Y_f(Y_p+Y_2+g_m)+Y_1Y_g(Y_p+Y_2+g_m)+Y_1(Y_f-g_m)Y_g$$
$$=Y_1[Y_f(Y_p+Y_2+g_m)+Y_g(Y_f+Y_p+Y_2)]$$

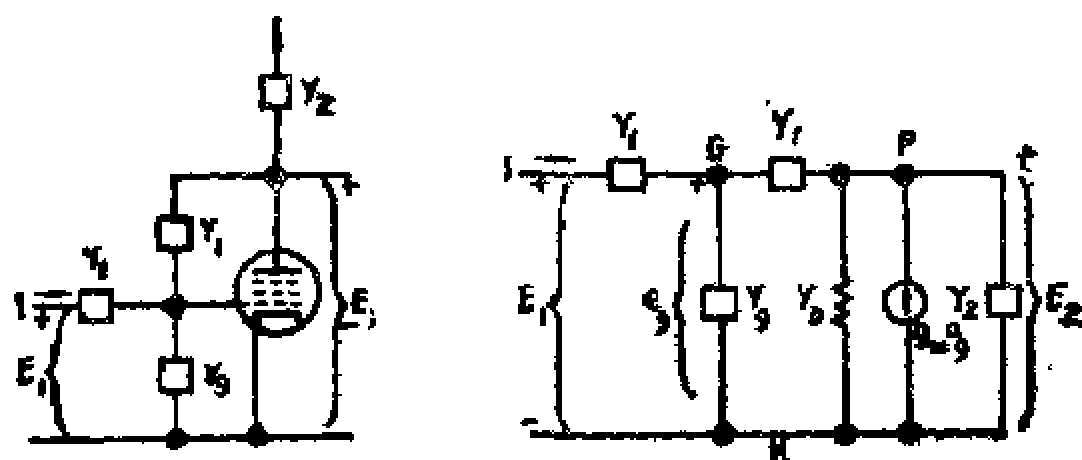



图1　电压反馈放大器及其等效电路

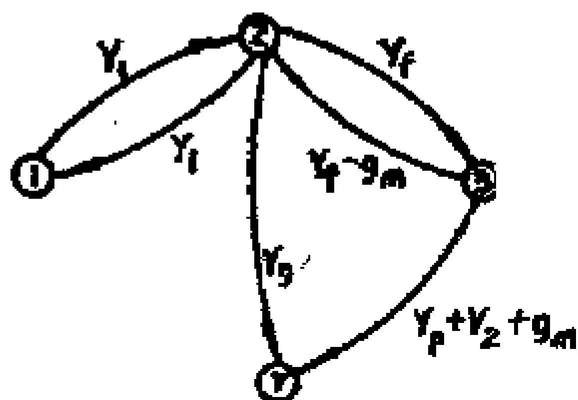



图2. 图1的伴随有向图$G(V,E,f)$

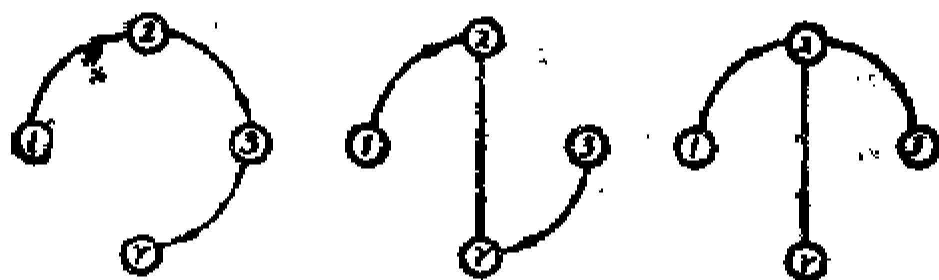


图3　图2的有向树

**5.一般网络行列式的余子式**

**定义2.**

有向图$G(V,E,f)$的一个子图，当且仅当满足下列两个条件时，称为一个有向2-树（用$T_{2}^{i,j}$表示），1）$T_{2}^{i,j}$所对应的无向图在$G(V,E,f)$中所对应的无向树是一个2-树；2）$T_{2}^{i,j}$的每一个连通片是$G(V,E,f)$中某个局部图的有向树。节点$i$是其中一个有向树的参考点。节点$j$是另一个有向树的参考点。$T_{2}^{i,j}$的两个连通片之一可能是一个孤立节点（在不重要的有向图中，或两个连通片都是孤立节点）。孤立节点的映射定义为1。

我们常常用到规定某些节点在不同的连通片的有向2-树中。可通过下标来表示这种有向2-树。例如$T_{2}^{iab,jc}$是一个有向2-树的符号，其中节点$i$，$a$和$b$在同一个连通片中，而节点$j$和$c$在另一个连通片中。研究有向2-树$T_{2}^{ia,ja}$，这里要求节点$a$存在于不同的连通片之中，按照定义，这样的有向2-树具有零映射。

**定理3**

现在，我们仍沿用上面的符号，余子式$\Delta_{ij}$的计算公式如下：

$$\Delta_{ij}=\sum_{T_{2d\,j,r}^{i,r}} f(T_{2d\,j,r}^{i,r})$$

式中$\Delta_{ij}$是行列式$A$的余子式；$T_{2d\,j,r}^{i,r}$是一个有向2-树$\in G(V,E,f)$；和式是对全部$T_{2d\,j,r}^{i,r}\in G(V,E,f)$求取。该定理的证明在附录II中给出。

利用类似于定理2的论证，可得到定理4。

**定理4.**

如果$A$是对称矩阵，那么$G_u(V_u,E_u,f_u)$的2-树和$G(V,E,f)$的有向2-树之间存在着一一对应的关系。此外，相应的2-树和有向2-树之间的映射是相同的。

**推论4.**

如果$A$是一个无源网络的节点导纳矩阵（或回路阻抗矩阵），那么

$$\Delta_{ij}=\sum_{T_{2ij,r}} f_u(T_{2ij,r}),$$

式中$T_{2ij,r}$是$G_u(V_u,E_u,f_u)$的一个2-树，和式是对全部$T_{2ij,r}\in G_u(V_u,E_u,f_u)$求取。

**推论5.**

如果$A$是一个不含藕耦合的无源网络的节点导纳矩阵，那么

$$\Delta_{ij}=\sum_{T_{2ij,r}} f_n(T_{2ij,r}),$$

式中$T_{2ij,r}$是$N(V_n,E_n,f_n)$中的一个2-树；$N(V_n,E_n,f_n)$是给定的电网络；和式是对$N(V_n,E_n,f_n)$中的全部$T_{2ij,r}$求取。

推论5通常在参考文献[8]，[9]中称为2-树导纳乘积之和，且首先由Mayeda给出[9]。

一般说来，$G(V,E,f)$中的有向2-树的数目要小于$G_u(V_u,E_u,f_u)$中的2-树的数目。

**例2.**

研究例1的反馈放大器的电压增益。电压增益函数$g$由下式给出：

$$g=\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}},$$

式中$\Delta_{13}$和$\Delta_{11}$是网络行列式$A$的余子式。

由定理3和图2的伴随有向图，可得到如图4和图5所示的有向2-树$T_{2d\,3,r}^{1r}$和$T_{2d}^{1r}$。现在

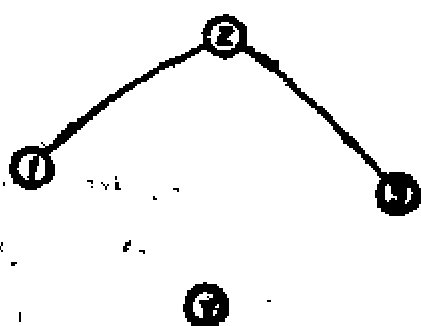


图4 $T_{2d\,3r}^{1r}$的有向2-树

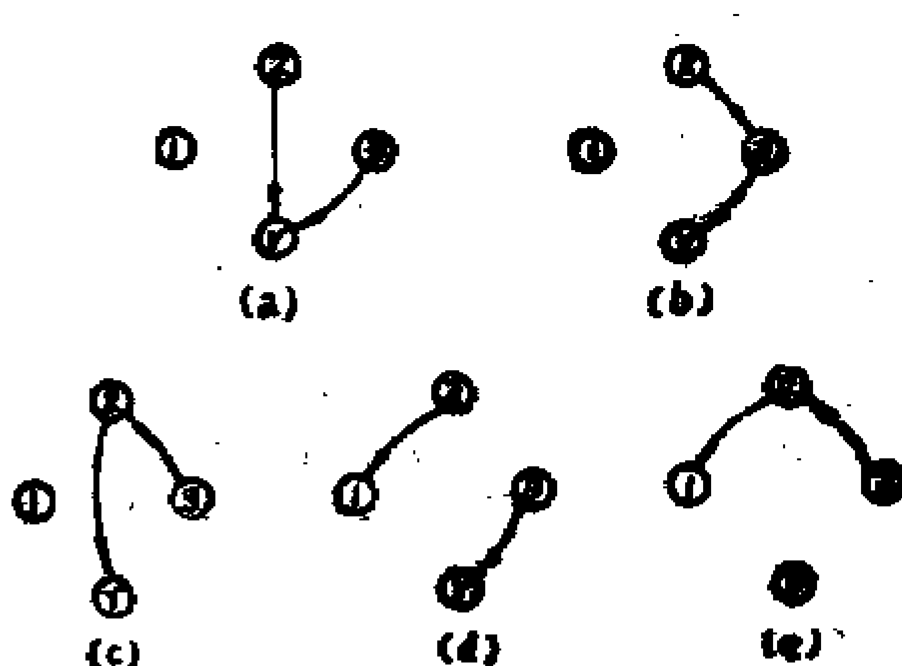


图5 有向2-树$T_{2d}^{1r}$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{13} &= Y_1(Y_f - g_m) \\
\Delta_{11} &= Y_g(Y_p + Y_2 + g_m) + Y_f(g_f + Y_2 + g_m) \\
&\quad - (Y_f - g_m)Y_p + Y_1(g_p + Y_2 + g_m) + Y_1(Y_f - g_m) \\
&= (Y_p + Y_f + Y_1)(Y_p + Y_2) + Y_f(g_m + Y_p + Y_1)
\end{aligned}
$$

## 结　　论

本文证明了可利用有向树和有向2-树来计算一般网络的行列式，这里没有符号问题。这种有向树和有向2-树的映射自动地给出正确的符号。这一新方法既可用于节点导纳矩阵，也可用于回路阻抗矩阵。在给定的网络是无源的且未包含磁耦合时，与节点导纳矩阵相应的有向图简化为原网络，有向树和有向2-树则分别简化为通常的树和2-树。已经证明含有$n+1$个节点的有向图，其有向树$T_i$的总数为$(n+1)^{n-1}$。因为一般网络行列式常具有第2节中(2)的形式，又由于主对角线元素乘积的最大元素是$n^n$，因此用传统的方法来展开这种行列式是费时的。例如，对于一个全部为非零元素的3阶行列式，利用通常的方法展开时，总项数为38项，其中有22项是相互抵消的，而最后展开式中只有16项，其中每一项都对应着伴随有向图中的一个有向树。

这种方法的重要性不仅在于减少了计算网络行列式的工作量，更重要的是上述分析可能为目前未解决的网络拓扑综合问题，提供了一种研究的工具。

把有向2-树推广到有向$k$-树是自然的。其结果与第5中的结果稍有不同，因此这里无需重复。

**附录1**

定理1证明概要

为了简化证明，由(2)式构成一个新有向图$G'(V',E',f')$，使得：

1）$V'$包含$n$个节点，节点的标记与第2节相同，只是这里没有参考点。

2）如果$b_{ij}\neq 0$，$i\neq j$，从节点$i$到节点$j$有一条有向边，且有

$$f'((i,j)) = -b_{ij} \qquad i,j=1,\cdots,n.$$

3）如果$b_{ik}\neq 0$，$k=1,\ \cdots,\ n$，则有一个自环$(i,\ i)_k$，且有

$$f'((i,\ i)_k) = b_{ik} \qquad i,\ k=1,\ \cdots,\ n.$$

定理1的证明包含在下列引理中。

**引理1.**

$$\det A = \sum_h (-1)^q f'(h)$$

此处$h$是$G(V',\ E',\ f')$的一个连接，$q$是$h$中的偶连通片的数目；和式是对$G'(V',\ E',\ f')$中的所有$h$求取。

**引理2.**

设$h_1$是$G'(V',\ E',\ f')$的一个连接，它至少包含有一个长度≥2的有向回路，那么存在一个连接$h_2\in G'(V',\ E',\ f')$，$h_2\neq h_1$，且$f'(h_1) = -f'(h_2)$。

证明：利用引理1，$h_1$总可写成

$$h_1 = (i_1,\ i_1)_{k_1}\cdots(i_r,\ i_r)_{k_r}\quad p_1^{(1)}p_2^{(2)}\cdots p_1^{(s)},$$

此处$p_1^{(u)}$是$G'(V',\ E',\ f')$中的有向回路，$u=1,\ \cdots,\ s$，使$p_1^{(1)}$具有下列形式：

$$p_1^{(1)} = (j_1,j_2)(j_2,j_3)\cdots(j_m,j_1)$$

此处$t$，$s$，$m$是适当的整数。总存在着一个连接$h_2 \in G'(V', E', f')$，且

$$h_2 = (i_1, i_1)_{k_1} \cdots (i_t, i_t)_{k_t}$$

$$\cdot [(j_1, j_1)_{j_1} (j_2, j_2)_{j_2} \cdots (j_m, j_m)_{j_m}] p_1^{(2)} \cdots p_1^{(s)}.$$

$h_1$和$h_2$的映射所对应的符号为：

$$f'(h_1) = (-1)^{q_1} (-1)^{m-1} b_{i_1 k_1} \cdots b_{i_t k_t}$$

$$\cdot [(-1)^m b_{j_1 j_2} b_{j_2 j_3} \cdots b_{j_m j_1}] f'(p_1^{(2)} \cdots p_1^{(s)})$$

以及

$$f'(h_2) = (-1)^{q_1} b_{i_1 k_1} \cdots b_{i_t k_t}$$

$$\cdot [b_{j_1 j_1} b_{j_2 j_2} \cdots b_{j_m j_m}] f'(p_1^{(2)} \cdots p_1^{(s)})$$

此处$q_1$是$p_1^{(2)} \cdots p_1^{(s)}$中的偶连通片的数目，显然该引理成立。

**引理3.**

令$A_1$是$G'(V', E', f')$的一种所有连接的集合，其中的每一个连接至少含有一个长度$\geqslant 2$的有向回路；令$A_2$是$G'(V', E', f')$另一种所有连接的集合，其每一个连接仅含有如下形式的自环：

$$(i_1, i_1)_{k_1} (i_2, i_2)_{k_2} \cdots (i_j, i_j)_{k_j}$$

若存在着一个下标$k$的集合$k_{t_1} k_{t_2} \cdots k_{t_r}$，$r \geqslant 2$，以及一个相应的下标$i$的集合$i_{t_1} i_{t_2} \cdots i_{t_r}$，且有$i_{t_{p+1}} = k_{t_p}$，$p = 1$，$\cdots$，$r-1$与$i_{t_1} = k_{t_r}$，此处$j$和$r$是适当的整数；那么

$$f'(A_1 \cup A_2) = 0.$$

证明：令

$$h_i^u = (j_1, j_1)_{k_1} \cdots (j_t, j_t)_{k_t} p_i^1 p_i^2 \cdots p_i^a,$$

此处$p_i^m$是长度$\geqslant 2$的有向回路，$m = 1$，$\cdots$，$a$；$t$，$a$，$i$，$u$是适当的整数，$h_i^u \in A_1 \cup A_2$，且使得不存在具有下列性质的$h_i^{u\prime} \in A_1 \cup A_2$，

$$h_i^{u\prime} = (i_1, j_1)_{k_1'} \cdots (j_{t'}, j_{t'})_{k_{t'}} p_i^1 p_i^2 \cdots p_i^{a+\beta}$$

$\beta \geqslant 1$，$t' \leqslant t-2$，此处$\beta$和$t'$是某个正整数。

对于每一条边$(i, j) \in G'(V', E', f')$，$i \neq j$，存在唯一的相应的自环$(i, i)_j \in G'(V', E', f')$。如果$\tilde{p}_i^m$定义为一个从$p_i^m$中用相应唯一的自环来代替$p_i^m$中的边而得到的图，那么我们可将$A_1 \cup A_2$的元素分别归入$S$的子集合$S_i$

$$S_i = \{h_i^k \mid h_i^k \in A_1 \cup A_2, \text{ 与 } h_i^k = (j_1, j_1)_{k_1} \cdots$$

$$\cdot (j_t, j_t)_{k_t} \tilde{p}_i^{i_1} \tilde{p}_i^{i_2} \cdots \tilde{p}_i^{i_s} p_i^{j_1} p_i^{j_2} \cdots p_i^{j_{a-s}},$$

此处$i_1 i_2 \cdots i_s$与$j_1 j_2 \cdots j_{a-s}$是$h_i^u$中整数$1\ 2 \cdots a$的补上标，所有其它的符号与$h_i^u$中的定义相同$\}$。

因为在$A_1 \cup A_2$中所有连接是各不相同的，因此在$i \neq j$时，$S_i \cap S_j = \varnothing$。

容易证明$S_i$中有$2^a$个连接。譬如说，它们中间的一半含有$p_i^1$，而另一半则未包含$p_i^1$。在前一半中间用$\tilde{p}_i^1$代替$p_i^1$则得到后一半。因此，总可能形成$2^{a-1}$个不相交的连接对$(h_i^{k_1}, h_i^{k_2})$，使得对于$S_i$中的所有连接有（见引理2）

$$f'(h_i^{k_1}) = -f'(h_i^{k_2})$$

或 $\quad f'(S_i) = 0.$

它意味着 $\quad f'(S) = f'(A_1 \cup A_2) = 0.$

**引理4.**

假设$B_1$是$G'(V', E', f')$中所有的连接的集合，$B_2$是$G(V, E, f)$中所有有向树的集合，因此在集合$B_1-A_1-A_2$的元素和集合$B_2$的元素之间存在着一一对应的关系。此外，在$B_1-A_1-A_2$和$B_2$中相应元素的映射是相同的。

证明：

如果对所有的$i \neq j$，把每一条边$(i, i)_j \in G'(V', E', f')$与一条边$(i, j) \in G(V, E, f)$相对应，在$i = j$时，把$(i, i)_j \in G'(V', E', f')$与$(i, r) \in G(V, E, f)$相对应，引理立即得证。

这样就完成了本定理的证明。

**附录2**

定理3的证明概要

证明：有两种情况要考虑：$i \neq j$，和$i = j$。证明是类似的，所以令$i \neq j$。

令

$$K = \frac{\det A}{\Delta_{ij}}$$

及

$$\Delta'' = \det A - K\Delta_{ij}$$

假设$G''(V'', E'', f'')$是一个$\Delta''$的伴随有向图（其对应过程已在第2节中说明过），边$(i, j)$和$(i, r)$分别用并列边$(i, j)_1$，$(i, j)_2$和$(i, r)_1$，$(i, r)_2$来表示，使得

$$f''((i,j)_1) = a_{ij} \qquad f''((i,j)_2) = K$$

$$f''((i,r)_1) = b_{it} \qquad f''((i,r)_2) = -K$$

从定理1得到

$$\Delta'' = \sum_{T_d''} f''(T_d''),$$

此处$T_d''$是$G''(V'', E'', f'')$中的一个有向树，和式是对所有的$T_d'' \in G''(V'', G'', f'')$求取。

假设$S$是$G''(V'', E'', f'')$中所有有向树的集合，那么可将它们分别归入3个子集$S_1$，$S_2$和$S_3$，且有

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$$

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S,$$

式中

$S_1 = \{T_d'' | T_d'' \in S$，不含有$(i,j)_2$和$(i,r)_2 \in T_d''\}$

$S_2 = \{T_d'' | T_d'' \in S$，含有$(i,j)_2$或$(i,r)_2 \in T_d''$，

且不存在$p_{ji} \in T_d''$，此处$p_{ji}$是初始节点$j$和终止节点$i$的有向通路$\}$

$S_3 = \{T_d'' | T_d'' \in S$，$(i,r)_2$和$p_{ji} \in T_d''$均存在$\}$。

该定理的证明所剩下的问题包含在下列引理中。

引理5.

$$\det A = f''(S_1)。$$

引理6.

$$f''(S_2) = 0$$

证明：对于任意一个$T_d'' \in S_2$

$$T_d^{i'} = (i,r)_2 \cup R,$$

此处$R$是从$T_d^{i'}$移去$(i,r)_2$而得到的子图，总存在一个唯一的$T_d^{j'} \in S_2$，使得

$$T_d^{j'} = (i,j)_2 \cup R$$

以及 $$-f''(T_d^{i'}) = f''(T_d^{j'})$$

反之亦然。因此 $f''(S_2) = 0$。

**引理7.**

在$S_3$的元素与$G(V,E,f)$的有向2-树之间存在着一一对应的关系，且有

$$T_d^{r'} = (i,r)_2 \cup T_{2\,d_{j,r}}^{i\,j},$$

以及

$$f''(T_d^{r'}) = -Kf(T_{2\,d_{j,r}}^{i\,j}),$$

此处$T_d^{r'}$和$T_{2\,d_{j,r}}^{i\,j}$分别是$G''(V'',E'',f'')$和$G(V, E, f)$相应的有向树及有向2-树。

因为$\Delta'' = 0$，因此立即得到

$$f''(S_1) + f''(S_2) + f''(S_3) = 0$$

或

$$\det A = \sum_{T_{2\,d_{j,r}}^{i\,j}} Kf(T_{2\,d_{j,r}}^{i\,j})。$$

所以定理成立。

**致谢(略)**

## 参 考 文 献


〔1〕S. J. Mason; "Topological analysis of linear non-reciprocal networks," PROC. IRE, vol. 45; pp. 829-838; June, 1957.

〔2〕C. L. Coates, "General topological formulas for linear network functions," IRE TRANS. ON CIRCUIT THEORY, CT-5, pp. 30-42; March, 1958.

〔3〕W. Mayeda; "Topological Formulas for Active Networks, "Int. Tech. Rept.; No. 8, U:S. Army Contract No. DA-11-022-ORD-1983, Univ.of Illinois, Urbana; Ill.; January, 1958.

〔4〕S.J.Mason, "Feedback theory-some properties of signal flow graphs," PROC. IRE; vol. 41, pp. 1144-1156; September, 1953.

〔5〕S.J. Mason; "Feedback theory-further properties of signal flow graphs, "PROC.IRE, vol.41 44, pp. 920-926; July; 1956.

〔6〕C.L. Coates, "Flow graph solutions of linear Algebraic equations", IRE TRANS.ON CIRCUIT THEORY. vol. CT-6, pp. 170-187; June, 1959.

〔7〕C.A. Desoer, "The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates'formula;" PROC. IRE, vol. 48, pp. 883-889; May, 1960.

〔8〕W.Mayeda, and S.Seshu; "Topological Formulas for Network Functions," Bull. No. 446; Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Ill.; 1957.

〔9〕S.Seshu; and M.B.Reed; "Linear Graphs and Electrical Networks; "Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass; 1961.

# 十一、有源网络的拓扑公式和复杂度——统一综述

## 1.引言

拓扑公式是通过观察网络图而直接写出网络函数的公式，而不必要展开各个行列式和余子式。因此，在网络分析中得到了广泛的应用。例如，它们已成功地用于研究网络的复杂度〔1〕-〔7〕。在频域分析中，通常要计算以文字形式表示而非用数字形式表示的符号网络函数，因而这种方法也提供了一种计算大型网络函数的有效和简捷的方法。

这些公式的基本概念并不是新的。它们可以追溯到基尔霍夫〔8〕与麦克斯韦〔9〕的工作。但是，应用到有源网络则是新近的事。要详细的了解这一方面的问题，读者可参阅论述RLC网络的 Mayeda 和 Seshu的文献〔10〕，以及论述有源网络的文献 Mason〔11〕，Coates〔12〕，Mayeda〔13〕，Chen〔14〕，Nathan〔15〕，Talbot〔16〕以及 Brown〔17〕的论著。在各种有源网络的公式中，最常用的是由 Mason〔18〕，Coates 和 Mayeda〔19〕以及 chen〔20〕所提出的公式。

当应用到大多数实际网络时，Coates与Mayeda公式的计算方案是相同的。Mason和Chen的方法在概念上则完全不同于Coates和Mayeda的公式。Talbot〔21〕曾指出Chen的方法非常类似于Mason的方法。但是Mason方法的手段、观点与解释则完全不同于Chen 的方法，然而他们的基本结论是相同的。要详细地了解这些关系，读者可参阅Chen的著作〔22〕。

换句话说，线性有源网络拓扑分析问题有两种基本的方法：Coates–Mayeda公式及Chen–Mason公式。Coates–Mayeda法的主要困难是确定与全部树有关的符号，这是一个冗长与费时的过程。另一方面，Chen–Mason法避免了符号问题，但是存在着相互抵消的冗余项。在最近的论文中，Chen〔23〕提出了避免冗余项的修改公式。

本文的主要目的是指出Coates–Mayeda公式与Chen–Mason公式相互之间的关系。这一点不足为奇，因为这两种方法都用于线性有源网络的拓扑分析。换句话说，我们将指出各种公式实际上是有向树法的变形。因此，可以用统一的和系统化的方法来推导出所有的结果。基于这些内在的关系，我们第二个目的是应用这些公式来研究一个网络的复杂度，它在列写网络的状态方程时是非常重要的。

## 2.不定导纳矩阵的建立

设$N$是一个由任意数量、按任意方式相连接的、由无源和有源元件所组成的$n$个节点的网络。$v_1, v_2, \cdots, v_n$分别是节点$1,2,\cdots,n$对任意一个参考点(是可任取选取的)的电位。如果$i_1, i_2, \cdots, i_n$是从网络外流进节点$1,2,\cdots,n$的源电流，那么节点电位和电流之间的关系，可用下列线性方程来表示：

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}, \qquad (1)$$

式中，$\boldsymbol{I}$表示源电流的$n$维矢量；$\boldsymbol{V}$表示节点电位的$n$维矢量；$\boldsymbol{Y}$是对应于$N$的$n$阶不定导纳矩阵。这里我们已隐含地假设网络$N$存在着不定导纳矩阵。

因为$N$的每一个节点可看成是一个可触及端，故可容易地证明：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}_0', \qquad (2)$$

式中$\boldsymbol{Y}_b$是$N$的支路导纳矩阵；$\boldsymbol{A}_0$是$N$的完全关联矩阵；一撇表示矩阵的转置。众所周知$\boldsymbol{Y}$是一个等余子式矩阵[24]，其每行和每列的诸元素之和为零。这一结果也可直接从（2）式以及$\boldsymbol{A}_0'\boldsymbol{E}=0$而得到，其中$\boldsymbol{E}$是元素全为1的$n$维矢量。换句话说，我们有：

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{E}'\boldsymbol{Y}=0。$$

这一事实表明$\boldsymbol{Y}$的所有元素的余子式(1阶)都是相等的。

令$G(N)$是一个有$n$个节点的有向图，它与给定$N$的不定导纳矩阵$\boldsymbol{Y}=[y_{ij}]$按如下规律相对应：当且仅当$y_{ij}\neq 0$，$i\neq j$时，在$G(N)$中从节点$i$到节点$j$有一条权为$-y_{ij}$的有向边。注意$\boldsymbol{Y}$的对角线元素与$G(N)$的结构没有直接关系。对$G(N)$的仔细研究可知，如果我们用一条无向边代替一对方向相反的有向边，使无向边的权和每一条有向边的权（导纳）都相等，那么$G(N)$就能大大地简化。显然，简化后的$G(N)$是一张组合图。*对于绝大多数实际上常用的由电阻器、电容器、自感和互感、晶体管、真空管和电压控制电流源（最后这种受控源的假设具有普遍意义，因为必要的话，所有其它类型的受控源都可利用Blakesley变换[26]变换成电压控制电流源所组成的网络）构成的网络，$G(N)$可直接由$N$的等效网络而得到，这一等效网络是在由电阻器、电容器、以及自感所组成的子网络上迭加相应的有向图，即图1**的电压控制电流源的有向图、图2的回转器的有向图，或图3中的变压器或铁心互感线圈的有向图而成。我们称混合图$G(N)$中的有向边为有源边，而无向边为无源边。

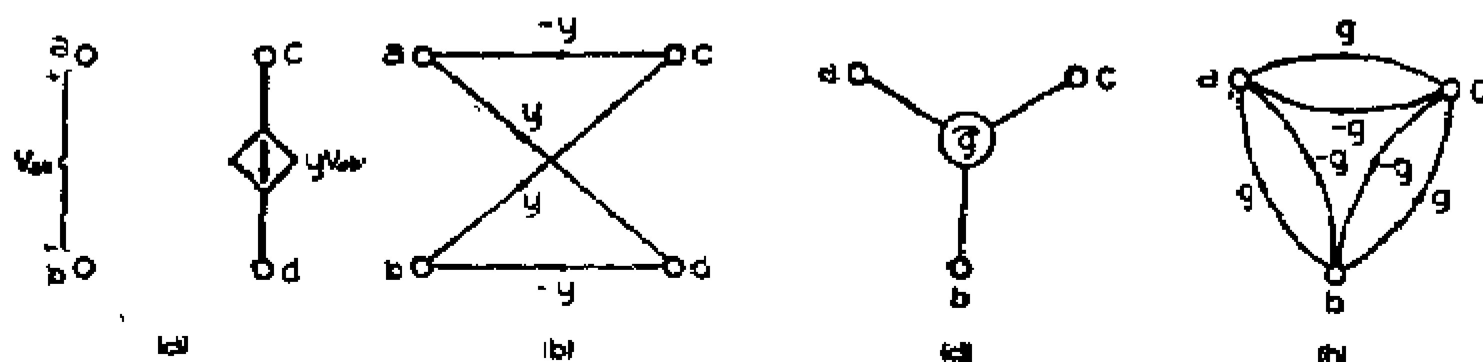
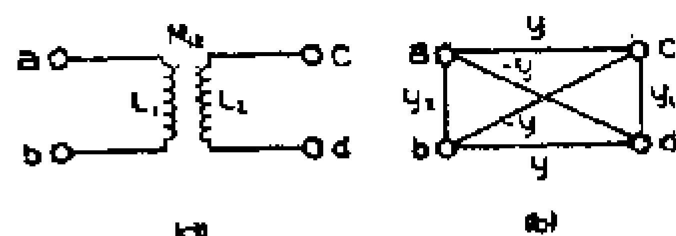



图1 (a) 电压控制电流源
(b) 及其伴随有向图

图2 (a) 回转器
(b) 及其伴随有向图




$$y_1=L_1/s(L_1L_2-M_{12}^2),\quad y_2=L_2/s(L_1L_2-M_{12}^2),\quad y=M/s(L_1L_2-M_{12}^2)$$

图3 (a) 变压器 (b) 及其伴随图

图$G(N)$的以$r$为参考点的有向树$t_r$是一个有向树，若其中存在有源边，则每一条有源边以其唯一的通路方向指向参考点$r$。特别地，仅由无源边所组成的树也是有向树。$G(N)$以$i$和$k$为参考点的有向2-树$t_{i,k}$是节点$i$和$k$分别处在两个连通片中的2-树，它的每一个连通片在$G(N)$的子图中分别是以$i$与$k$为参考点的有向树。也可以用$t_{ij,km}$来表示有向2-树$t_{i,k}$，其中节

* 它也可称为混合图。

** 在a=c，b=d时，单向元件对应于一个二端无源网络元件

点$i$和$j$在一个连通片中，$k$和$m$在另一个连通片中，第一个下标$i$和$k$表示参考点。这一概念推广到有向$k$-树的情况是自然的，无需进一步地作说明。

我们用$f(g)$表示$G(N)$的子图$g$的边权之乘积。特别是，若$g=\phi$，即为零图，那么按定义$f(\phi)=1$。若$\mathbf{Y}_{ab,cd}$是从$N$的不定导纳矩阵中删去第$a$行和第$c$行以及第$b$列和第$d$列而得的子矩阵。那么$\mathbf{Y}$的1阶余子式或2阶余子式定义为：

$$Y_{ij}=(-1)^{i+j}\det\mathbf{Y}_{ij} \tag{3a}$$

$$Y_{ab,cd}=\operatorname{sgn}(a-c)\operatorname{sgn}(b-d)(-1)^{a+b+c+d}\det\mathbf{Y}_{ab,cd} \tag{3b}$$

其中$a\neq c$，$b\neq d$及$\mathbf{Y}_{ij}=\mathbf{Y}_{ij,ij}$。若$x>0$，$\operatorname{sgn}x=1$以及若$x<0$，$\operatorname{sgn}x=-1$。很清楚，$\mathbf{Y}_{kk}$也是$N$的以节点$k$作为参考点的节点导纳矩阵，$y_{ij;kk}(i,j\neq k)$是$\mathbf{Y}_{kk}$的元素$(i,j)$的余子式。因为$\mathbf{Y}$是一个等余子式矩阵，故有下列定理，它是我们早先工作〔14〕，〔25〕，〔27〕的总结。

**定理1**

$$Y_{ij}=\sum_{t_k}f(t_k), \tag{4a}$$

$$Y_{pq,rs}=\sum_{t_{pq,rs}}f(t_{pq,rs})-\sum_{t_{ps,rq}}f(t_{ps,rq}) \tag{4b}$$

$p\neq r$和$q\neq s$，其中$t_k$和$t_{pq,rs}$分别是$G(N)$的有向树和有向2-树。

因为$Y_{ij}$是$N$的节点行列式，(4$a$)的右边与$i$和$j$无关，所以在计算节点行列式时，我们可自由选取$G(N)$中的参考点。这种参考点选取的随意性是由于$N$的不定导纳矩阵是一个等余子式矩阵的缘故。这说明了在解电网络问题时选取哪一点作为参考节点是无关紧要的，因而选取不同的参考节点后其解答总是相同的。这些叙述实际上是用三种不同的方法来谈论同一件事情。

在下列例题中我们将说明在$G(N)$中适当地选取参考点可以减少(4$a$)中的冗余项的数目。

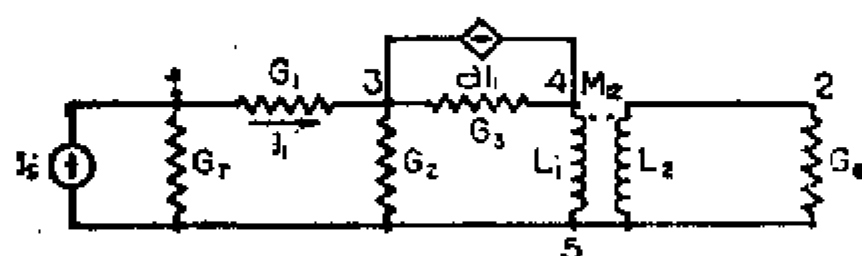



图4　变压器耦合的晶体管放大器

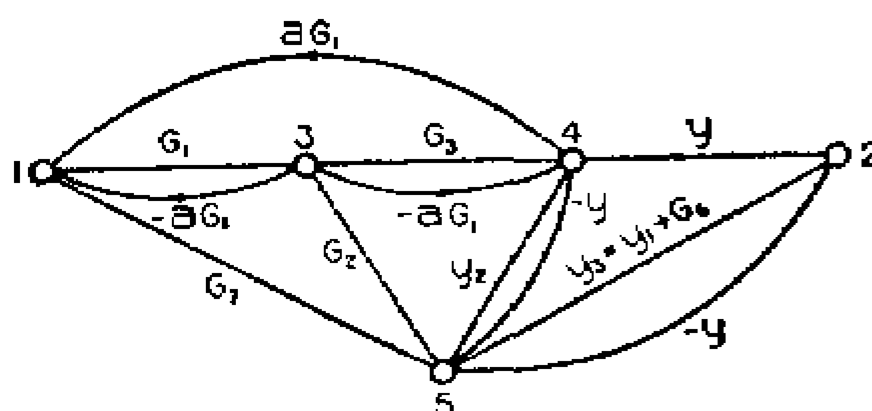



图5　图4放大器的伴随混合图

**例1.**

研究如图4所示的变压器耦合的晶体管放大器$N$。利用前面所提到的方法，可得到图5所示的该放大器的伴随混合图*$G(N)$。假设我们要计算放大器的转移阻抗函数$V_{25}/I_s$，它可表示为〔22〕：

$$\frac{V_{25}}{I_s}=\frac{Y_{12,55}}{Y_{ij}},$$

因此，我们必须计算$Y_{ij}$和$Y_{12,55}$。在计算$Y_{ij}$时，我们先选取节点5作为有向树的参考点。由(4$a$)我们有

* $y$，$y_1$和$y_2$在图3中定义过。

$$Y_{4j}$$

$$= \sum_{t_5} f(t_5) = G_2(G_1+G_7)[(aG_1)(y+c)+(b+G_3-aG_1)(y+c)+yc]$$
$$+(G_1-aG_1)G_7[(y+c)(aG_1+b+G_3-aG_1)+yc]$$
$$+G_3(aG_1)G_7(y+c)+G_3b(y+c)(G_1+G_7)+G_2yc(G_1+G_7)$$
$$=(1-a)G_1G_7(bc+by+cy)+(G_1+G_7)[(y+c)(G_2b+G_2G_3-bG_3)$$
$$+cy(G_2+G_3)]+(y+c)G_1G_3G_7 \tag{5}$$

式中$b=y_2-y$和$c=y_1-y+G_8$。上述展开式在相消前有44项，每一项对应于$G(N)$的一个有向树$t_5$。有20项有向树导纳乘积彼此相消，因此在最后表达式中不出现。它们是：

$yG_1G_2(\pm aG_1)$，$yG_2G_7(\pm aG_1)$，$yG_3G_7(\pm aG_1)$，$cG_3G_7(\pm aG_1)$，

$(\pm aG_1)(-aG_1)G_7y$，$(\pm aG_1)(-aG_1)G_7c$，$(\pm aG_1)G_1G_7y$

$(\pm aG_1)G_1G_7c$，$(\pm aG_1)G_1G_2c$，$(\pm aG_1)G_2G_7c$

现在，我们假设选取节点 4 作为参考点。那么

$$Y_{4j}$$

$$= \sum_{t_4} f(t_4) = G_1G_7bc+G_1G_7by+G_1G_7cy+(-aG_1)G_7bc+(-aG_1)G_7by$$
$$+(-aG_1)G_7cy-G_1G_2by+G_1G_2bc+G_2G_7by+G_2G_7bc+G_1G_2cy$$
$$+G_2G_7cy+G_1G_2G_3y+G_1G_2G_3c+G_2G_3G_7y+G_2G_3G_7c+G_1G_3by$$
$$+G_1G_3bc+G_3G_7by+G_3G_7bc+G_1G_3G_7y+G_1G_3G_7c+G_1G_3yc$$
$$+G_3G_7yc \tag{6}$$

上述展开式中有24项，每一项对应了$G(N)$的一个有向树$t_4$。值得注意的是适当地选取$G(N)$中的参考点，不仅大大地减少了有向树的数目(从44减到24)，而且大大地减少了相消项的数目(从20减到0)。但是如果网络中含有2个以上的单向元件，参考点只选取一个，则不可能消去冗余项；其它的特性描述是必需的。在下一节中将给出完整的解答。

为了计算$Y_{12,55}$，我们利用(4b)

$$Y_{12,55}$$

$$= \sum_{t_{12,5}} f(t_{12,5}) = G_1G_3y+(aG_1)y(G_1+G_2+G_3-aG_1)$$
$$+(-aG_1)G_3y+(-aG_1)(-aG_1)y+G_1(-aG_1)y$$
$$=y(G_1G_3+aG_1G_2) \tag{7}$$

上述展开式中在相消前有8项，每一项对应于$G(N)$中的一个有向2-树$t_{12,5}$，类似于有向树的情况，在展开式中有6项有向2-树的导纳乘积彼此相消，它们是：

$(\pm aG_1)G_3y$，$(\pm aG_1)(-aG_1)y$，$(\pm aG_1)G_1y$

现在便能计算所需的转移函数。

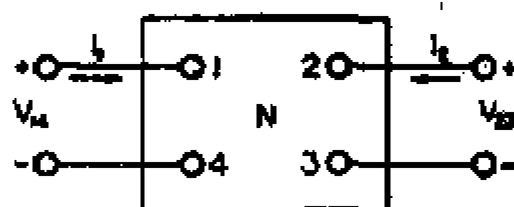



图6 标号的有源双口网络

### 3. 有源双口网络

现在我们可把前一节所导出的公式应用于双口网络。特别地，我们将给出有源双口网络的短路导纳函数与开路阻抗函数的公式。

令$N$是一个图6所示的有源双口网络。在$G(N)$中令

$$W_{ab,cd}=\sum_{t_{ab,cd}} f(t_{ab,cd}) \tag{8a}$$

$$V_k=\sum_{t_k} f(t_k) \tag{8b}$$

那么$N$的短路导纳矩阵$\boldsymbol{Y}_{sc}$和开路阻抗矩阵$\boldsymbol{Z}_{oc}$分别由参考文献[28]，[29]给出：

$$\boldsymbol{Y}_{sc}=\frac{1}{V_k''}\begin{bmatrix} W_{2,3} & W_{24,31}-W_{21,34} \\ W_{12,42}-W_{12,43} & W_{1,4} \end{bmatrix} \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{Z}_{oc}=\frac{1}{V_k}\begin{bmatrix} W_{1,4} & W_{21,34}-W_{24,31} \\ W_{12,43}-W_{13,42} & W_{2,3} \end{bmatrix} \tag{9b}$$

此处 $V_k''$分别表示将$G(N)$中的节点1和4，节点2和3短接后所得到的有向图之有向树（以$k$为参考节点）导纳乘积之和。

设$N$表示$m$个双口网络$N_i$的级联，$N_i$端点的标记方法与$N$的端点标记相同。如果 $W_{ab,cd}^i$表示$N_i$中的有向2-树的导纳乘积，那么

$$W_{12,43}-W_{13,42}=\prod_{i=1}^{m}(W_{12,43}^i-W_{13,42}^i) \tag{10a}$$

$$W_{21,34}-W_{24,31}=\prod_{i=1}^{m}(W_{21,34}^i-W_{24,31}^i) \tag{10b}$$

换句话说，在双口网络级联时，总的双口网络矩阵(9) 的非对角线元素简单地等于各个双口网络相应元素的乘积。这些等式的证明是直截了当的，故从略。

很清楚，对无互感的无源双口网络，(9)式给出的公式简化为Mayeda和 Seshu 导出的公式[10]，因为此时$G(N)$和$N$相同，$W_{ab,cd}$下标的次序是无关紧要的。

**4.无冗余项的有向树公式**

在本节中，我们将讨论避免出现冗余项的条件，并说明这些条件怎样与 Coates–Mayeda 公式建立联系。

我们用$(i, j)$表示$G(N)$的一条边。如果$(i, j)$是有源边，那么它的方向是从节点$i$指向节点$j$。如果它是无源边，那么$(i,j)=(j,i)$，是一条连接节点$i$和节点$j$的无向边。

若$G(N)$对应于图1的电压控制电流源，它们的有源边集合

$$S=\{(c,a),\ (c,b),\ (d,a),\ (d,b)\} \tag{11}$$

称为有源集合。类似地，对应于图3的变压器以及四条无源边的集合（如(11)式所示）称为无源集合。注意图3中的边$(a,b)$和$(c,d)$不包括在无源集合$S$中；在处理时将它们看作电阻器电容器或自感那样的单口网络元件。

令$G_v$和$G_i$是Coates–Mayeda公式中$N$的伴随电压图和伴随电流图[12]，[13]。对于(11)式的每一个有源集合，令$(a,b)_v$和$(c,d)_i$分别是$G_v$和$G_i$的电压边和电流边，它们构成了一个边对，称为$S$的伴随电压边和伴随电流边。对于(11)式中的每一个无源集合$S$，令$(a,b)_v$和$(c,d)_i$及$(c,d)_v$和$(a,b)_i$分别是$G_v$和$G_i$的相应电压边和相应电流边，$(a,b)_v$ 和 $(c,d)_i$ 是一个边对，$(c,d)_v$和$(a,b)_i$是另一个边对，它们也叫做$S$的伴随电压边和伴随电流边。Mayeda[13]认为边对中的边是相同的边，而出现在不同的位置，而Coates[12]则认为这些边是不同的，在计算时交换它们的位置。我们将遵照Coates的约定。

$G(N)$的一个有向树$t_k$，如果在 $t_k$ 中每一个有源集合或无源集合的各支路用其伴随电流

(电压)边代替后，得到 $G_i(G_v)$ 的完备树时[12]，[13]，则称该有向树为完备有向树。类似地，$G(N)$中的有向2-树 $t_{ij,k}$，如果在 $t_{ij,k}$ 中将有源或无源集合的各支路用其伴随电流边或伴随电压边代替后，$G_i$中的2-树 $t_{i,k}$ 和 $G_v$ 中的2-树 $t_{j,k}$ 分别为完备2-树，则称为完备有向2-树。利用这些术语，现在我们来叙述本节的主要结论[23]。

**定理2**

$$Y_{ij}=\sum_{t_k} f(t_k), \tag{12a}$$

$$Y_{ij,kk}=\sum_{t_{ij,k}} f(t_{ij,k}), \tag{12b}$$

式中 $t_k$ 和 $t_{ij,k}$ 是 $G(N)$ 的完备有向树和完备有向2-树。

值得注意(12a)仍与参考节点 $k$ 的选取无关。因为每一个完备有向树(完备有向2-树)都唯一地对应了一个完备树(完备2-树)，我们可以利用已知的生成树和2-树的方法[31]来计算有向树及有向2-树。需要强调的是这里并未涉及到繁琐的符号问题。

例2。

再次研究图4的晶体管放大器及图5的混合图 $G(N)$，我们希望计算它的节点行列式 $Y_{ij}$ 及2阶余子式 $Y_{11,55}$ 和 $Y_{12,55}$。

在(12a)中，我们可自由地选取完备有向树 $t_k$ 的参考点 $k$，现在令 $k=5$。仅仅由无源单口网络元件构成的有向树 $t_5$ 总是完备的，它们对节点行列式的贡献为：

$$y_3[(G_1+G_7)(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2)+G_1G_7(G_3+y_2)], \tag{13a}$$

式中

$$y_1=L_1/\triangle,\ y_2=L_2/\triangle,\ \triangle=s(L_1L_2-M_{12}^2)\neq 0,\ 以及 y_3=G_6+y_1$$

完备有向树 $t_5$ 至少包含有源集合和/或无源集合的下列各项所对应的边：

$$(-aG_1)G_7y_2y_3,\ (-y)yG_1G_2,\ (-y)yG_2G_7,\ (-y)yG_1G_3, \tag{13b}$$
$$(-y)yG_3G_7,\ (-y)yG_1G_7,\ (-y)y(-aG_1)G_7,$$

式中 $y=M_{12}/\triangle$。因此，由(12a)可得到网络的节点行列式为：

$$\begin{aligned}Y_{ij}&\\=&y_3[(G_1+G_7)(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2)+G_1G_7(G_3+y_2)]-aG_1G_7y_2y_3\\&-y^2(G_1+G_7)(G_2+G_3)-y^2G_1G_7+y^2aG_1G_7\end{aligned} \tag{14}$$

很容易校验，(14)式的每一项都对应于 $G(N)$ 的完备有向树 $t_k$，其中 $k=1,2,3,4,5$。注意到有源边(4,1)在 $G(N)$ 的任何完备树中从不出现。

计算 $Y_{11,55}$ 是非常容易的，因为它对应于含有 $G_7$ 的完备有向树，且将 $G_7$ 从其中删去。因此从(12b)式我们有：

$$\begin{aligned}Y_{11,55}=&y_3(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2+G_1G_3+G_1y_2)-aG_1y_2y_3\\&-y^2(G_2+G_3+G_1-aG_1).\end{aligned} \tag{15}$$

最后，为了计算 $Y_{12,55}$ 我们必须生成有向2-树 $t_{12,5}$，它们对应于 $yG_1G_3$ 和 $(aG_1)G_2y$ 项。于是，利用(12b)我们有：

$$Y_{12,55}=y(G_1G_3+aG_1G_2) \tag{16}$$

**5.展开公式**

在前面，我们已经介绍了计算Y的1阶和2阶余子式的公式。在本节中我们将说明如何利用这些公式进行迭代计算。

在$G(N)$中令(11)式的$S$是一个相应于图1中电压控制电流源的有源集合。因为由(12a)式仅有$G(N)$的一个完备有向树$t_i$出现在$Y_{ij}$的最后展开式中，因而在任一$t_i$中最多只包含$S$中的一个元素；如果移去$t_i$中的这一元素，将得到一个有向2-树$t_x^i$，其节点$a$与$c$在一个连通片中，$b$与$d$在另一个连通片中或者$a$与$d$在一个连通片中，以及$b$与$c$在另一个连通片中。因为我们还自由地选取了参考点$k$，令$k=d$。$G(N)$的有向树集合按以下原则分类：一类是不包含$S$的任何元素，另一类含有$(c,a)$，最后一类含有$(c,b)$，利用(8)式，(4a)可表示为：

$$Y_{ij}=V_*=V_d=V_d^0-yW_{cb,da}^0+yW_{ca,db}^0,\tag{17}$$

此处上标"0"表示是从$G(N)$中令$y=0$而得到的子图所计算的各导纳乘积。很明显，$V_d^0$是从$N$中移去电压控制电流源时的网络节点行列式。因此在直接利用$y=0$计算$G(N)$的$V_d^0$时，我们可任选一个参考点，即对所有的节点$k$，$V_d^0=V_k^0$。我们断定$Y_{ij}$可用这种方法迭代地得到。值得注意，如果$N$为只有一个这种有源集合的$RLC$网络，(17)式不会出现任何相互相抵消的冗余项。尤其是，对于诸如晶体管或电子管，$b=d$，(17)式简化为：

$$Y_{ij}=V_d^0+yW_{ca,d}^0=V_k^0+yW_{ca,d}^0\tag{18}$$

现在我们研究回转器导纳如何影响节点行列式。回转器及其伴随有向图示于图2。回转器是由两个方向相反的有向三角形的6条有源边所组成。$G(N)$的全部有向树可以分为三种不同类型：即不含回转器的任何边，含有其中的一条边的以及含有二条边。容易证明仅含有回转器的一条边的有向树将成对地出现，且它们的有向树导纳乘积相等而符号相反。因此，在节点行列式之最后的展开式中它们不会出现。然而，含有回转器的两条边的有向树将出现3次，它们的导纳乘积除符号外是相等的。无论哪一点选作为参考点，容易证明回转器导纳$g$的平方，在两个导纳的乘积项中为正，而在三个导纳的乘积项中为负。因此，由(4a)我们可得到含有$g^2$的$Y_{ij}$之展开式：

$$Y_{ij}=V_k^0+g^2W_{a,b,c}\tag{19}$$

式中$k=a,b$或$c$；$V_k^0$是在移去回转器时$N$的节点行列式，且

$$W_{a,b,c}=\sum_{t_{a,b,c}}f(t_{a,b,c}),\tag{20}$$

式中$t_{a,b,c}$是$G(N)$的有向3-树。即$W_{a,b,c}$是将节点$a,b,c$短接所得到图之有向3-树$f(t_x)$导纳乘积之和，此处$x$为任意值。因此，如果$N$包含了两个以上的回转器，则(19)式的各项可用一些回转器的相应项来展开，一直到所有回转器导纳平方分解完为止。

对于2阶余子式来说，它们可以利用短接有向2-树的集合而得到，而不是导出展开它们的各种公式，使得一个生成有向树的程序既可以用来计算节点行列式，也可用来计算其各元素的余子式。例如，我们把一个单位导纳的边$(i,k)$加到$G(N)$上，那么$Y_{ii,kk}$是包含有$(i,k)$边的有向树导纳乘积之和。类似地，对于$Y_{ij,kk}$来说，相应的有向树$t_{ij,k}$是节点$i,j$在一个连通片的有向树$t_{i,j}$中。

作为一个示例，研究图5所示的混合图。其中$a=1$，$c=4$，$b=d=3$，转移电导是$-aG_1$。注意在(18)式中$y$是$-aG_1$，它与图5的$y$不同。我们需要利用(18)式计算$V_k^0$与$W_{41,3}^0$。令$G^0(N)$是一个从$G(N)$移去所有的有源边而得到的子图。在$G^0(N)$中，$V_k^0$可利用节点对的展开式[22]，譬如说利用节点2和1，所得的结果为：

$$\begin{aligned}V_k^0=&G_1G_5y(G_7-G_2+y_2+y_5-2y)+G_7G_2G_3y\\&+G_7(y_2-y)y(G_1+G_3+G_2)+y(y_2-y)G_2G_1\\&+(y_5-y)(y_2-y)G_3G_1+(y_3-y)G_2G_1(G_3+y_2)\end{aligned}$$

$$+(y_3-y)G_7[(G_1+G_2)(G_3+y_2)+G_3y_2]$$
$$=y_3[(G_1+G_7)(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2)+G_1G_7(G_3+y_2)]$$
$$-y^2(G_1+G_7)(G_2+G_3)-y^2G_1G_7 \tag{21a}$$

对于$G^0(N)$中的$W^0_{41,3}$来说，我们有：

$$W^0_{41,3}=(y_2-y)G_7y_3+y(y_3-y)G_7=G_7y_2y_3-y^2G_7 \tag{21b}$$

然后所需的行列式可利用(18)式而得到，并且给出为：

$$Y_{ij}=V^0_4-aG_1W^0_{41,3} \tag{21c}$$

**6.复杂度**

当用支路电压与支路电流构成一组线性微分方程时，一个网络$N$的固有频率定义为网络算子矩阵的特征多项式之根。如果我们计及每个频率的重根次数[2]，那么这些固有频率的数目，称为$N$的复杂度。这也是网络$N$中可确定的独立初始条件的数目。在列写网络的状态变量方程中，它是动态独立的支路电压和支路电流的最小数目，它们的瞬时值足以完全地确定该网络的瞬时状态，因此，它也是状态空间的维数。在数学上讲，它是网络方程的一般解中出现的任意常数的数目。这些是按不同的方式来说明同一件事情。在本节中，我们将证明这一数目如何与网络拓扑有关。

网络的复杂度不同于固有频率的数目，它们的差别在零点处及无穷远点处。固有频率通常指回路阻抗矩阵或节点导纳矩阵行列式的零点。

一般说来，节点行列式的零点不同于回路行列式的零点，所以上面的定义在原点处及无穷远处是不明确的。但是，可以证明[22]，[32]，回路行列式或节点行列式的非零有限值的零点与非零有限值的固有频率相同。在物理概念上讲，原点的固有频率相应于围绕仅由电感器构成的回路(或仅由电容器所组成的割集)中的恒定电流(或电压)；无穷远处的固有频率对应于加在仅由电感器而组成的割集(或沿仅由电容器而组成的回路)中的冲激电压(或电流)。因此，实际上我们并不对固有频率的总数而对其具有有限值的非零固有频率的数目感兴趣(有时，它也定义为网络的复杂度[3]，[19])。注意在第一段中所规定的与这里采用的固有频率的定义并不包括在无穷远处的频率。

$G(N)$的一个割定义为一个割集或几个边不相接的割集之并。在$G(N)$中，C-割（L-割）是一个仅由$N$的电容(电感)边而组成的割；C-回路(L-回路)是一个仅由$N$的电容(电感)边所组成的回路。现在我们利用这些概念来叙述$N$的复杂度。

众所周知[1]~[3]，一个$RLC$网络的复杂度等于电抗元件数减去独立的C-回路数及独立的L-割数，非零值的固有频率数等于复杂度减去独立的L-回路数及独立的C-割数。因此一个$RLC$网络的复杂度仅由其拓扑结构所确定。但是，对于一般的有源网络，单有拓扑结构是不充分的；还必须包括网络参数。至今，这个一般特性描述尚未解决，而只有部分解答。下面，我们将介绍一些已知的解。

为了更确切和不失一般性起见，我们假设$N$是由电阻器、电容器、自感和互感以及一些受控电流源所组成，每一个受控电流源各有一个不同的无源支路的电压或电流来控制，没有任何独立电源来激励$N$。第二个条件并非是一个严重的局限性，因为正如前面所提到，其它类型的受控源，若有必要的话，可利用Blakesley变换[26]将其转换成上述受控源。同时还应包括$N$含有回转器及正、负阻抗转换器的情况。我们还假设每个网络元件看成是一个分立元件且$N$的电感矩阵是正定矩阵。

可见，$G(N)$中有3种类型的边，

(i)电感边：其导纳为$1/Ls$($L$是实常数)的边。

(ii)电容边：其导纳为$Cs$($C$是实常数)的边。

(iii)电阻边：其导纳是实常数的边。

利用$N$的算子矩阵$\boldsymbol{M}(s)$的拉普拉斯展开式，Mark[7]已经证明 $\det\boldsymbol{M}(s)$和$Y_{ij}$有下列关系：

$$\det\boldsymbol{M}(s)=\text{常数}\cdot s^{b_L}\cdot Y_{ij}, \tag{22}$$

此处$b_L$表示$N$中的电感器的数目。这一关系是Bryant[2]，Purslow与Spence[4]所得结果的普遍化形式。因此，从(22)式得出，$N$的复杂度等于电感器的数目加上节点行列式中 $s$ 的最高次幂。这也就证明了 $\det\boldsymbol{M}(s)$与 $Y_{ij}$(因而也就和回路行列式(22))之非零有限值的零点是相同的。因为$Y_{ij}$的每一项都对应$G(N)$的一个树，$Y_{ij}$中$s$的最高次幂对应了所含的电容支路数和电感支路数的差值为最大的一个树 $t_k$，这种拥有$s$最高次幂的 $t_k$ 称为正规有向树 (normal direceted tree)。这一定义不同于 Bryant[2] 所采用的、适用于$RLC$ 网络的树，在后者之中的树不可能总使电容支路数最大与电感支路数最小。因此并非所有完备的正规有向树乘积均具有相同的符号，故在应用定理 2 时可以出现对消项。

令

$$W=\sum_{t_k}f(t_k), \tag{23}$$

此处$t_k$是$G(N)$的一个完备正规有向树。因此上述结论可以叙述为：

**定理3**

$N$的复杂度的上限$\sigma$由下式给出：

$$\sigma\leqq b_L+b_{tC}-b_{tL}, \tag{24}$$

此处$b_L$是$N$中之电感的数目，$b_{tC}$和$b_{tL}$分别是 $G(N)$ 的一个完备正规有向树中的电容器数和电感器数，当且仅当$W\neq0$时，采用等号。

例如在图5中，$G_1G_2G_3y_3$是$G(N)$的一个完备正规有向树。因此，我们有$b_L=2$，$b_{tC}=0$及$b_{tL}=0$。则复杂度的上限为2。因为$W\neq0$，则$\sigma=2$。

下面，我们将研究限于某类网络的复杂度。令$N$是一个含有电压(和/或电流) 控制电流源的 $RLC$ 网络。一个仅由无源元件($R$,$L$或$C$)组成的$N$之树，若将树中受控电流源的控制元件(即电压控制受控电流或电流控制的受控电流源的无源支路)用相应的受控电流源代替时会得到$N$的一个树，则称为完备树*。特别地，一个树如果不含任何控制元件的话，则认为是完备的。这一定义在本质上与Coates-Mayeda 公式中的完备树是相同的。差别仅仅在于这里是用网络的支路来叙述，而不是用相应的电压图及电流图的边来叙述。

在着手叙述我们的结果之前，应该注意到在$G(N)$中，电感边是由于自感(和/或电感/电流控制电流源)所引起，电容边是由于电容(和/或电容控制电流源)所引起，电阻边是由于电阻(和/或电压控制电流源)所引起**。

**定理4**

一个含有受控电流源的$RLC$网络$N$,令$t$是一个$N$的选定的完备树,它使得电容器的数目与电感器的数目之差为最大。那么$N$的复杂度的上限是由$t$中所含的电容器数$b_{tC}$加上其补树$\bar{t}$($N$中$t$之补图)所含的电感器数目$\bar{b}_{tL}$来给出，即

* 注意，网络$N$有一个完备树。在Coates-Mayeda公式中电压图和电流图的完备树不一定是$N$的完备树。

** 我们假设电压控制电流源具有恒定的控制参数。

$$\sigma \leq \sigma_{max} = b_{tC} + \bar{b}_{tL} \tag{25}$$

证明：令$N^*$是一个将所有的电流控制电流源转换为电压控制电流源而得到的网络。这一点总是可能的，因为$N$中的一条无源支路的电流和电压是通过一个有限的导纳来建立联系。在$G(N^*)$中，令$t_s^*$是一个完备的正规有向树。令$b_L^*$，$b_{tC}^*$和$b_{tL}^*$是$t_s^*$所定义的(24)式右边各项相应的数目。我们的目的是要证明：

$$b_L^* + b_{tC}^* - b_{tL}^* = b_{tC} + \bar{b}_{tL} \tag{26}$$

为达此目的，我们首先将证明，我们能够构成一个与$t_s^*$有相同$s$指数的$N$的完备树$t$。令图1(b)的$(c,b)$是包含在$G(N^*)$之$t_s^*$中的一个电容(电感)边。因为$t_s^*$是完备的，故必然有$t_s^* - (c,b) = t^*_{c_0,bb_d}$[23]，即为$G(N^*)$的一个有向2-树，且在$G(N^*)$中有一个无源电容(电感)边$(a,b)$对应于$N$中的节点$a$连到$b$的电容(电感)边。因此$t_s^* \cup (a,b) - (c,b)$是一个$G(N^*)$中与$t_s^*$有相同$s$指数的有向树。类似地我们能够证明，当图1(b)剩下三个有源边中的任意一边的话，即存在着一个这种的有向树。注意，图1(b)中4个有源边中的一条(至多有任意一条)在$t_s^*$中出现，而$t_s^*$是完备的。

现在，我们对$t_s^*$中的每一个电容边或电感边重复这一过程，即得到$N$的一个完备树，它拥有该定理所阐述的特性。因此，$b_L^* = b_L$，即为$N$中的电感器数，$b_{tC}^* = b_{tC}$和$b_{tL}^* = b_{tL}$，即为$t$中的电感器数。因为$b_L - b_{tL} = \bar{b}_{tL}$，故立即得到(26)式。定理得证。

一个非常类似于(25)式的结果是由Purslow及 Spence[4]所导出，他们定义了一个$N$的完备树，或者作为仅包含有无源元件的一个树，或者作为包含某些受控电流源的一个树，在该树中用它们相应的控制支路来代替这些受控源，从而得到了一个仅含无源元件的树。为了避免混淆，称他们所定义的树为共同树 (common tree)。因为完备树的集合是共同树集合的子集。所以利用(25)式所获得的边界要比从定理4(即用共同树代替完备树)得到的边界更准确。作为一个示例，研究图7中的网络$N$。容易看出支路$R$、$C$和$L$仅构成了一个完备树。根据定理4，我们有$\sigma_{max} = 1 + 0 = 1$。另一方面，支路$R$，$C$和$a_1 i_L$形成$N$的一个共同树，由 Purslow 和 Spence定理将得到$\sigma_{max} = 1 + 1 = 2$。因此，如果$N$拥有唯一解的话，$a_1 \neq 1, a_2 \neq -1$，且$\sigma = 1$。这个例子也证明了即使受控源的参数与其它网络参数没有特定关系的话，Purslow 和 Spence 的定理[4]也不能给出网络$N$的复杂度，而仅仅给出其上界。

利用共同树的概念，公式(25)可以叙述成不同的形式。

**推论1**

在一个含有受控电流源$N$的$RLC$网络中，令$t$是使得$(b_{tc} + \bar{b}_{tL} + b_{tc_s} - b_{ti_s})$为最大值的一个共同树，此处$b_{tc}$、$b_{tc_s}$和$b_{ti_s}$分别表示$t$中的电容器数、电容器-电流控制电流源数和电感器-电流控制电流源数，$\bar{b}_{tL}$表示$N$中树$t$的补树$\bar{t}$的电感器数，那么$N$的复杂度的上界$\sigma_{max}$由下式给出：

$$\sigma \leq \sigma_{max} = b_{tC} + \bar{b}_{tL} + b_{tc_s} - b_{ti_s} \tag{27}$$

公式(27)是 Tow[5] 导出的更一般公式的特殊情况，它也包括了$N$可含受控电压源的情况。但是，在后一种情况中共同树不能在$N$中单独定义；它们可以用其伴随电压图和伴随电流图来定义。为简单起见这里未考虑一般情况。在图7中，支路$R$，$C$和$a_1 i_1$构成一个共同树，它使(27)式右边之值为最大。于是，我们有

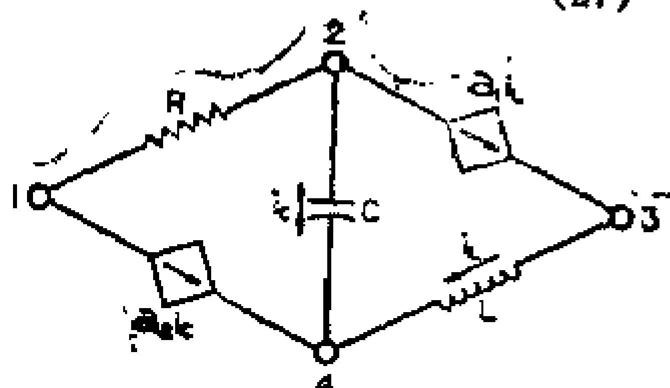



图7　含有受控电流源的有源网络

$\sigma \leqq \sigma_{max} = 1 + 1 + 0 - 1 = 1$

等价地我们能用支路$R$，$C$和$L$形成共同树，而它得到 $\sigma \leqq \sigma_{max} = 1 + 0 + 0 - 0 = 1$

最后，我们提到一种非常特殊的情况，正如Su〔6〕所讨论的，即$N$中包含有一个诸如回转器、晶体管或真空管的非互易网络。

**推论2.**

一个含回转器（晶体管或真空管）的网络的复杂度不小于移去回转器（受控电流源）时的网络（等效网络）的复杂度。

证明：

在有真空管或回转器的情况下，该推论直接从(18)式和(19)式而得到，并且事实上$y$和$g^2$是实数和正数，$V_k^i$是具有受控电源或移去回转器的网络的节点行列式。在一个晶体管的情况下，$y = -\alpha g_e$，此处$\alpha$是电流放大系数，$g_e$是发射极电导，从(18)式我们看出对于$W^t_{ca,d}$中的每一个$f(t_{ca,d})$，在$V_k^i$中存在一个$f(t_c)$使得$t_c = (a,d) \cup t_{ca,d}$。于是我们得到

$$f(t_c) + yf(t_{ca,d}) = g_e f(t_{ca,d}) - \alpha g_e f(t_{ca,d}) = (1-\alpha) g_e f(t_{ca,d})$$

因为$\alpha \leqslant 1$，我们断定在(18)式中的所有系数是非负的。所以得到本推论。

## 结 论

在本文中，我们介绍了有源网络拓扑分析的统一综述。我们已经指出如何把无重复的有向树与有向2-树和Coates-Mason公式中的完备树及完备2-树建立起联系。这就使我们能从Chen氏公式来给出Coates-Mayeda公式，反之亦然。同时地把这两种方法的优点均包括了进去，且避免了叙述新公式时的缺点。

文中还阐明了有源双口网络的拓扑公式，且用双口短路导纳参数和开路阻抗参数来给出。

已经证明一个含受控电流源的$RLC$网络的复杂度的上限与网络的完备树有关，这种完备树使电容器的数目与电感器的数目之差值为最大。一般说来，网络可能达到这一边界。但是确定复杂度的一般特性的问题尚未解决。

最后，我们还提到了将节点行列式展开式用网络有源元件来表示的迭代公式。

**致谢（略）**

## 参 考 文 献

〔1〕Reza, F. M., "Order of Complexity and Minimal Structures in Network Analysis," *Proc. of the Symposium on Circuit Analysis, University of Illinois, pp. 7.1—7.33, 1955.*

〔2〕Bryant, P.R., "The Order of Complexity of Electrical Networks," *Proc. IEE* (London), Vol. 106C, pp. 174-188, 1959.

〔3〕Bers, A., "The Degrees of Freedom in RLC Networks," *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-6, pp. 91-95, 1959.

〔4〕Purslow, , E. J. and Spence, R., "Order of Complexity of Active Networks," *Proc. IEE (London), Vol. 114, Pt. 2, pp.* 195-198, 1967.

〔5〕Tow, J., "Order of Complexity of Linear Active Networks," *Proc. IEE* (London), Vol. 115, Pt. 2, pp. 1259-1262, 1968.

〔6〕Su, Y. H., "Topological Formulas and the Order of Complexity for Networks With a Nonreciprocal Element," *J. Franklin Inst.*, Vol. 286, pp. 204-224, 1968.

〔7〕Mark, S. K., "On the Order of Complexity of Active Electrical Networks," Ph. D. Dissertation, Ohio University, Athens, June 1971.

〔8〕Kirchhoff, G., "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuch-

ungen der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird," *Poggendorf Ann. Phys.*; Vol. 72, pp. 497-508, 1847.

[9] Maxwell, J. C., *Electricity and Magnetism*; Oxford, England; Clarendon Press, 1892, Ch. 6 and Appendix.

[10] Mayeda; W. and Seshu; S., "Topological Formulas for Network Functions," Engrg. Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Bulletin No. 446, 1957.

[11] Mason, S. J.. "Topological Analysis of Linear Nonreciprocal Networks; "*Proc. IRE*, Vol. 45, pp. 829-838, 1957.

[12] Coates, C. L.; "General Topological Formulas for Linear Network Functions," *IRE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-5; pp. 30-42; 1958.

[13] Mayeda; W.; "Topological Formulas for Nonreciprocal Networks and Networks With Transformers; " *Proc. Natl. Electronics Conf.*; Vol. 14, pp. 631-643; 1958.

[14] Chen, W. K.; "Topological Analysis for Active Networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 85-91, 1965.

[15] Nathan, A., "Topological Rules for Linear Networks; " *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 344-358, 1965.

[16] Talbot, A., "Topological Analysis of General Linear Networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-12, pp. 170-180, 1965.

[17] Brown; D. P.; "New Topological Formulas for Linear Networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-12, pp. 358-365; 1965.

[18] Mason, S. J. and Zimmermann, H. J.; *Electronic Circuits; Signals; and Systems*; New York, N. Y.; Wiley, 1964.

[19] Seshu, S. and Reed, M. B., *Linear Graphs and Electrical Networks*, Reading; Mass., Addison-Wesley, 1961.

[20] Chan, S. P.; *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks*; New York, N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[21] Talbot, A.; "Topological Analysis for Active Networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-13, pp. 111-112, 1966.

[22] Chen; W. K., *Applied Graph Theory*; Amsterdam; The Netherlands; North-Holland; 1971.

[23] Chen; W. K.; "Characterizations of Complete Directed Trees and Two-Trees; " *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-19; No. 3, May 1972.

[24] Sharpe, G. E. and Spain; B.; "On the Solution of Networks by Means of the Equicofactor Matrix; " *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-7; pp. 230-239; 1960.

[25] Chen, W. K.; "Unified Theory on Topological Analysis of Linear Systems; " *Proc. IEE (London)*, Vol. 114; pp. 1630-1636, 1967.

[26] Seshu, S. and Balabanian; N.; *Linear Network Analysis*, New York, N. Y.; Wiley, 1959.

[27] Chen, W. K., "A Generalization of the Equicofactor Matrix; *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, pp. 440-442; 1966.

[28] Chen, W. K., "Note on Topological Analysis for Active Networks; " *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-13; pp. 438-439, 1966.

[29] Chen; W. K., "Modification of Topological Formulas for Active Two-Port Networks," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 2166-2167, 1969.

[30] Chen, W. K.; "On Unisignants and Their Evaluation; " *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 16, pp. 603-619, 1968.

[31] Mayeda; W.; Hakimi, S. L.; Chen; W. K., and Deo, N.; "Generation of Complete Trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-15, pp. 101-105, 1968.

[32] Chen; W. K., "Graph-Theoretic Considerations on the Invariance and Mutual Relations of the Determinants of the Generalized Network Matrices and Their Generalized Cofactors," *Quart. J. Math.*, Oxford (2), Vol. 21, pp. 459-479, 1970.

[33] Bryant, P. R., "The Degrees of Freedom in RLC Networks," *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-7, pp. 173-174 and p. 357; 1960.

# 十二、完备有向树和完备有向2-树的特性


## 摘　　要

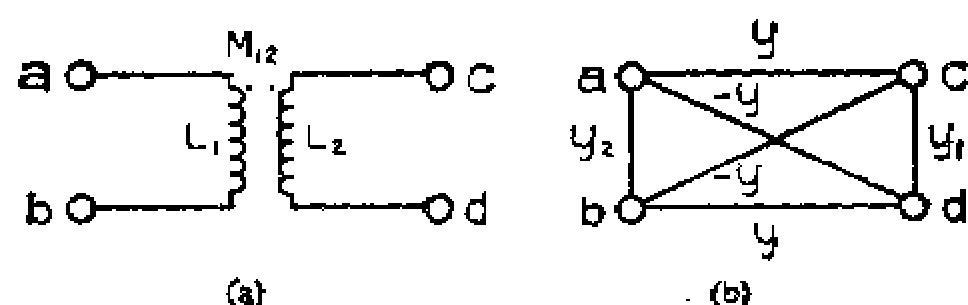
本文给出在一般网络的伴随有向图中，一个有向树是非冗余的充分与必要的条件。基于这些特性，给出了适用于一般网络的不含相消的重复项的新的拓扑公式。也讨论了完备有向树和完备有向2-树与Coates-Mayeda法的电压图与电流图的完备树与完备2-树之间的关系。还给出了说明性的例子。


**1.引言**

众所周知，在确定有源网络函数的有向图法中[1]，节点行列式的值等于其伴随有向图的有向树导纳的乘积之和。但是，在这个和式中，并非所有项均不相同。换句话说，两个有向树可以具有相同的乘积而符号相反。这一情况的许多例子可以在Chan[2]和 Chen[3] 的新书中找到，此处暂略。要了解这一方面的详细情况，读者可参阅Chen[3] 的著作。

**2.非冗余有向树和非冗余有向2-树的特性**

本文将研究存在支路导纳矩阵$\mathbf{Y}_b$的线性有源网络$N$(因此，它也就存在着不定导纳矩阵)，它仅由电阻器、电容器、自感、如图1所示的非全耦合变压器以及如图2($a$)所示的电压控制




$y_1 = L_1/w$, $y_2 = L_2/w$, $w = s(L_1L_2 - M_{12}^2) \neq 0$

图1　($a$)非全耦合变压器 ($b$)其伴随图

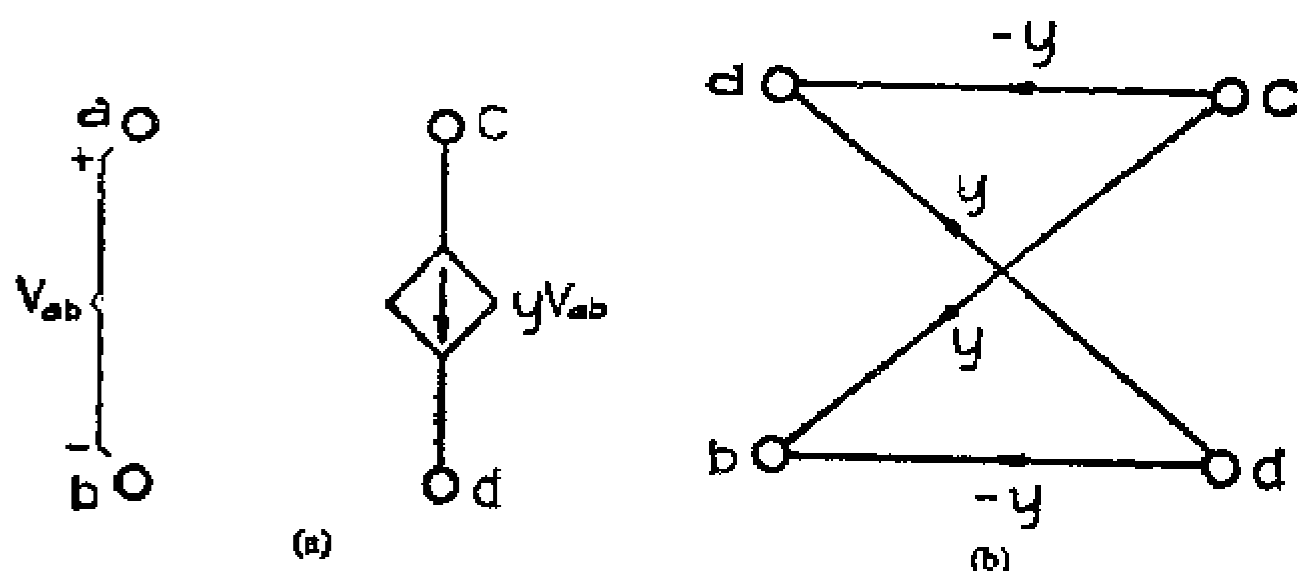



图2　($a$)电压控制电流源 ($b$)其伴随有向图

电流源所构成。我们假设$\mathbf{Y}_b=[y_{ij}]$，对所有的$i$和$j$，有$y_{ij}=y_{ji}$，或者当$i\neq j$时，$y_{ij}\neq y_{ji}$，$y_{ij}$或$y_{ji}$为零。除了回转器之外，这一假设在所有的实际网络中均满足，关于回转器的情况将在4中研究。这也意味着在伴随有向图$G(N)$中，即$N$的$G$中不含有如图3所示的子图。Mayeda[4]隐含地作了这一假设。为简单起见，在本节中我们省略了对一般情况的讨论。

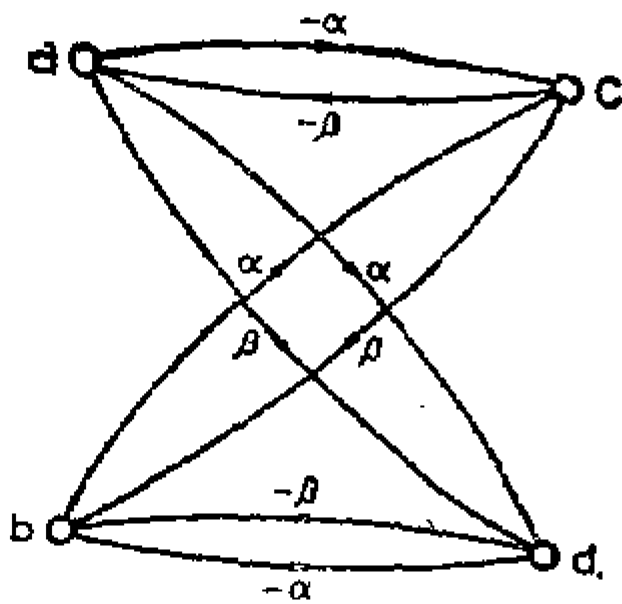



图3 在研究中所排除的子图

在[6]中，我们已经指出过如何从$N$直接得到$G$。通过对这些规则的仔细研究，我们发现若用一条无向边来代替一对方向相反的有向边，且使无向边的权与有向边的权（导纳）相等，则$G$可进一步简化。显然，简化后的$G$是一个混合图①[10]、[11]，它可以直接从网络的等效电路，通过把单向网络元件②的有向图（如图2所示），或变压器的伴随有向图（如图1所示）迭加在$N$（仅由电阻器、电容器和自感所组成）的子网络上而得到。

我们把混合图$G$中的有向边称为有源边，无向边称为无源边[10]，[11]。以$k$为节点的有向树$t_k$是一个树，它的每一条有源边在该树中以唯一的通路（由有源边所确定）指向参考节点。仅由无源边组成的树也是有向树，这一点也适用于有向$k$-树的情况。我们用$t_{ij,km}$来表示$G$的有向2-树，其中节点$i$和节点$j$处在同一个连通片之中，节点$k$和节点$m$处在另一个连通片之中，节点$i$和节点$k$（第一个下标）分别是两个连通片的参考点。这种标记法可自然地推广到有向$k$-树的情形。

设$\mathbf{Y}_n$是以$n$作为参考点的节点导纳矩阵③。令$\Delta=\det\mathbf{Y}_n$，$\Delta_{ij}$是$\mathbf{Y}_n$的第$(i,\ j)$元素的余子式。设$g$是$G$的一个子图，$f(g)$表示$g$的各条边所对应的权（导纳或传递率）的乘积，对于一个空集，由定义$f(\varnothing)=1$。按照这些定义，可将我们早先的工作[1]，[6]，[7]总结如下。

**定理1.**

$$\Delta=\sum_{t_k} f(t_k) \tag{1}$$

$$\Delta_{ij}=\sum_{t_{ij,n}} f(t_{ij,n}) \tag{2}$$

虽然$\mathbf{Y}_n$以$n$作为参考点，然而(1)式右边式子与参考点的选取无关。所以在计算$\Delta$时，我们可以选取任意一个节点$k$作为$G$的有向树的参考点。

我们用$(i,\ j)$表示$G$的一条边④。如果$(i,\ j)$是有源边，则其方向从节点$i$指向节点$j$。如果$(i,\ j)$是无源边，那么$(i,\ j)=(j,\ i)$。

在$G$中，对应于图2所示的电压控制电流源的有源边集合

$$S=\{(c,a),\ (c,b),\ (d,a),\ (d,b)\} \tag{3}$$

称为有源集合。类似地，若(3)式对应于图1的变压器的四条无源边集合，则称为无源集合。注意图1(b)中的$(a,b)$边和$(c,d)$边不包含在这一无源集合$S$中，可以将它们作为无源二端网

① 英文为Composite graph 或 mixed graph。
② 对于$a=c$和$b=d$，无向元件的特性与具有导纳$y$的二端网络元件相像。
③ $\mathbf{Y}_n$中的下标$n$并不表示参考点。
④ 如果$i$与$j$之间有并列边，$(i,\ j)$表示$i$和$j$之间的边集合中的任意一条而确定的边。

络元件处理。

我们进一步假设$G$的各个有源集合及无源集合的边的权以及各二端无源元件的边之权均不相同，并以文字形式给出。

$G$的一个树有向$t_k$（或有向2-树$t_{ij,k}$），如果在$G$中存在着另一个有向树$t'_k$（或有向2-树$t'_{ij,k}$）$t_k \doteq t'_k (t_{ij,k} \doteq t'_{ij,k})$，且有$f(t_k) = -f(t'_k)$，$[f(t_{ij,k}) = -f(t'_{ij,k})]$，则称其为是冗余的。如果不存在这种$t'_k$（或$t'_{ij,k}$），则称$t_k$（或$t_{ij,k}$）是非冗余的。

令$T_k$是$G$之全部有向树$t_k$的集合。很清楚如果$(i, j)$是$t_k$中的一条边，则$t_k-(i, j)$是一个有向2-树$t_{i,kj}$。于是我们可写作$t_k-(i, j) = t_{i,kj}$。这种方法也适用于有向3-树的情况。

**A. 非冗余有向树**

假设$G$含有一个有源或无源集合$S$。将集合$T_k$分解为如下不同类型的子集$T_{kx}$（$x = 0,1,2,3,4$）：

$T_{k0} = \{t_k$：$t_k$中没有$S$中的任何一条边$\}$

$T_{k1} = \{t_k$：$t_k$含有$S$的一条边，且

若$(c, a)$在$t_k$中，则$t_k-(c, a) \doteq t_{cb,kad}$；

若$(d, b)$在$t_k$中，则$t_k-(d, b) \doteq t_{dc,kbc}$；

若$(c, b)$在$t_k$中，则$t_k-(c, b) \doteq t_{ca,kbd}$；

最后，若$(d, a)$在$t_k$中，则$t_k-(d, a) \doteq t_{db,kca}\}$，

$T_{k2} = \{t_k$：$t_k$中含有$S$的两条边$\}$，

$T_{k3} = \{t_k$：$t_k$中含有$S$的三条边$\}$，

$T_{k4} = T_k - T_{k0} - T_{k1} - T_{k2} - T_{k3}$。

**引理1.**

$$\sum_{t_k \in T_{k3}} f(t_k) = 0。\tag{4}$$

证明：如果$S$是有源集合，因$T_{k3}$是空集，(4)式自然成立。令$S$是由(3)式所定义的一个无源集合。如果$T_{k3}$中的$t_k$包含了$S$的$(c, a)$，$(d, a)$以及$(d, b)$边，则在$T_{k3}$中存在一个$(c, a)$，$(d, a)$以及$(c, b)$的唯一$t'_k$，$t'_k \doteq t_k$此处$t'_k = t_k \cup (c, b) - (d, b)$和$f(t_k) = -f(t'_k)$，反之亦然。同样，如果$t_k$含有$(c, a)$，$(c, b)$和$(d, b)$，则在$T_{k3}$中存在唯一的含有$(c, b)$，$(d, a)$以及$(d, b)$的$t'_k$，$t'_k = t_k \cup (d, a) - (c, a)$，且$f(t_k) = -f(t'_k)$，反之亦然。所以引理得证。

**引理2.**

如果$S$是有源集合，那么

$$\sum_{t_k \in T_{k2}} f(t_k) = 0 \tag{5}$$

证明：因为在(1)中的$k$是任意的，因而当且仅当对于任意$m$，$m \leqslant n$都满足时，(5)式对任意$k$成立。因此，不失一般性地我们令$k = c$或$d$。在这两种情况下，$T_{k2} = \{\ \}$。所以引理得证。

**引理3.**

令$S$是一个无源集合。设$T'_{k2}$是$T_{k2}$的子集，$T'_{k2}$的每一个$t'_k$含有$(c, a)$和$(c, b)$或者$(d, a)$和$(d, b)$，在$t'_k$中移去这几条边时不会得到节点$c$和$d$处在同一个连通片之中的3-树。因此$T_{k2}$的每一个$t_k$是冗余的，并有

$$\sum_{t_k \in T_{k2}} f(t_k) = \sum_{t'_k \in T'_{k2}} f(t'_k) \tag{6}$$

且(6)式右边式子中不存在相消项。

**引理4**

$$\sum_{t_k \in T_{k1}} f(t_k) = 0 \tag{7}$$

引理 3 和 4 的证明在附录I和II中给出。

于是，在计算节点行列式时，只需考虑$T_{k0}$，$T'_{k2}$和$T_{k4}$。因此，如果在$G$中含有其它的有源和无源集合的话，这一论证仍然适用。这就导致了第3节中将要给的主要结论。

为简单起见，将由(3)式所定义的$S$中的$(c, a)$和$(d, b)$边作为一个边对，$(c, b)$和$(d, a)$作为另一个边对。考虑到上述讨论，我们得到如下结论。

**定理2.**

$G$的一个有向树$t_k$是无冗余的充要条件是由(3)式所定义的每一个有源或无源集合$S$中的各边中至多有一条边处在$t_k$中，且如果$t_k$中有这样的边，若用其边对中对应的一条边来代替它时，将得到$G$的一个树(不一定是有向树)，若另一个边对中的一条边代替它而不构成一个树(如果$t_k$不包含$S_k$的一条件，则这些条件是自动满足的)，则该有向树是非冗余的。

值得指出的是在引理3中$T_{k2}$的每个有向树(因此,也对于$T'_{k2}$中的每个有向树)是冗余的，虽然并非其中的所有项都互相抵消；未相消项对应于$T'_{k2}$的有向树。这一事实连同定理2的结果可用来确定在(1)式的最后展开式中所出现的那些有向树。这一点将在第3节中予以介绍。

在图 2 中，如果节点$b$和$d$相重合(相当于一个晶体管或电子管的情况)，则得到该定理的一个有用的结果。

**推论1**　在由(3) 式所定义的有源或无源集合$S$中，令$b=d$，那么任何$G$的非冗余有向树均不可能含有$(c, a)$边。

**B.非冗余的有向2-树**

现在我们按同样的研究思路研究非冗余的有向2-树的特性。为了避免符号以及叙述的复杂化，将它们用非冗余的有向树表示，这一点是非常希望的，因为一个用来产生所有非冗余有向树的计算机程序也可用来产生非冗余的有向2-树。

令$S_0=\{(i, j), (i, k), (k, j)\}$是一个有源集合，其中$f(i, j)=-1$，$f(i, k)=f(k, j)=1$。令$G^*$是一个将$S_0$的边加在$G$上而得到的混合图。从定理2得到以下结论。

**推论2.**

如果$t^*_k$是$G^*$的一个非冗余的有向树，它含有$S_0$的有源边$(i, k)$，那么，$t^*_k-(i, k)$是$G$的一个非冗余的有向2-树$t_{ij,k}$。

这一推论是必要但非充分的，因为由$G^*$的含有$(i, k)$的冗余有向树$t^*_k$也可得到$G$的一个非冗余的$t_{ij,k}$，下面将给出非冗余的$t_{ij,k}$的完全特性。

**定理3.**

令$P_{ji}$是$G$之$t_{ij,k}$中从节点$j$到节点$i$的唯一有向通路，除非$S$具有下列性质，即若$(x, y)$ $[x=c,\ d$和$y=a,\ b]$是$S$之$t_{ij,k}$中唯一所属的边，其中$y$在$P_{ji}$的$P_{xi}$中，从$t_{ij,k}$中移去$(x, y)$便得到一个3-树，其中节点$a$和$b$以及节点$c$和$d$分别出现在不同的连通片中，则$t_{ij,k}$是非冗余2-树的充要条件是对由(3)式所定义的每一个有源或无源集合$S$，有向树$t_k=t_{ij,k}\cup(i, k)$满足定理 2 的条件。

这条定理的证明和定理 2 相同，只要注意当$S$具有上述性质时，相应的有向树$t_{ij,k}\cup(i,k)$在$G^*$中是冗余的。

**推论3.**

$G$的一个有向2-树$t_{i,k}$为非冗余的充要条件是$t_{i,k}\cup(i,k)$是一个以$k$为参考点为$k$的非冗余有向树，且含有$G\cup(i,k)$的边$(i,k)$。

**3.完备有向树及完备有向2-树**

在本节中我们将说明，如何利用前一节所得到的结果来确定那些在(1)式和(2)式中不产生任何对消项的有向树和有向2-树。这里的主要困难在于并不是所有冗余有向树和有向2-树在(1)式和(2)式的最后表达式中都相抵消。因此，除了非冗余有向树及非冗余有向2-树之外，我们还必须确定那些将在(1)式与(2)式的最后展开式中出现的冗余有向树及冗余有向2-树。

**定义1.**

$G$的一个有向树$t_k$，若对由(3)式所定义的每一个有源或无源集合$S$，满足下列三个条件之一时，称为完备有向树。

1）最多有一条$S$的边包含在$t_k$中，若这条边存在，先用$(a,b)$，然后用$(c,d)$代替这条边后，每次都得到一个树①。

2）一个无源集合$S$的两条边$(c,a)$和$(c,b)$或$(d,a)$和$(d,b)$包含在$t_k$中，用$(a,b)$和$(c,d)$代替它们后将得一个树[5]。

3）对于满足条件(1)的某个$S_i$，令$P_{uk}$是$t_k$中从节点$u$指向节点$k$的唯一有向通路，其中$u$是$S_i$的边中的一个节点。那么如果$(x,y)[x=c,d$和$y=a,b]$是在$t_k$中$S$的唯一边，对于某一个$u$而言，其中$y$在$P_{uk}$的$P_{xk}$中，那么从$t_k$移去$S_i$和$S$的边后，将得到一个3-树，其中节点$a$和$b$以及节点$c$和$d$分别出现在不同的连通片中。

我们可以类似地定义$G$的完备有向2-树。它们可用某些完备有向树来表示，这样，一个计算机程序可同时用来计算节点行列式和各元素的余子式。

**定义2.**

$G$的一个有向2-树$t_{ij,k}$，如果有向树$t_k=t_{ij,k}\cup(i,k)$在$G^*$中是完备的，且$S_0$满足定义 1 中的1)，则它是一个完备有向树，其中$G^*$和$S_0$已在推论2中定义过。

在定义 1 中，第一个条件表征了$G$的那些非冗余的有向树，第二个条件表征了在$T'_{k2}$中的那些冗余有向树($T'_{k2}$由引理 3 所定义)，第三个条件表征了那些含有 $S$ 的一条边的冗余有向树。这也适用于定义2。对于$G$的有向2-树$t_{ij,k}$来说，所得的结果与引理3相似，此处从略。

**推论4.**

$G$的一个有向2-树$t_{i,k}$，当且仅当它对应于一个唯一的$G\cup(i,k)$的有向树（含有边$(i,k)$）时，它是完备的。

现在我们来叙述本文的主要定理；在附录 3 中给出了证明。

**定理4.**

$$\Delta=\sum_{t_k}f(t_k) \tag{8}$$

$$\Delta_{ij}=\sum_{t_{ij,n}}f(t_{ij;n}) \tag{9}$$

① 所得到的图是一个树；它不一定是$G$的一个树或有向树

式中$t_k$和$t_{ij,k}$是$G$的完备有向树和完备有向2-树。

我们再次注意到，(8)式与$t_k$的参考点$k$的选取无关。回忆一下在前面我们曾选取$n$作为$Y_n$的参考点。

最后，我们要提一下完备有向树和完备有向2-树与Coates-Mayeda方法[4]，[9]的电压图与电流图中的完备树和完备2-树之间的关系。

令$G_v$和$G_i$分别为$N$的伴随电压图和伴随电流图。对于$G$的由(3)式所定义的每一个有源集合$S$，设$(a, b)_v$和$(c, d)_i$分别是$G_v$和$G_i$相应的电压边和电流边；它们构成了一个边对。对于由(3)式所定义的每一个无源集合$S$，设$(a, b)_v$和$(c, d)_i$以及$(c, d)_v$和$(a, b)_i$分别是$G_v$和$G_i$的相应电压边和电流边，$(a, b)_v$和$(c, d)_i$是一个边对，$(c,d)_v$和$(a,b)_i$是另一个边对。Mayeda[4]把每一个边对中的两条边看成是在不同位置出现的相同边。Coates[9]则认为这些边是不同的，在计算时交换它们的位置。我们将遵照Coates的约定，于是从定理4我们得到下列结论。

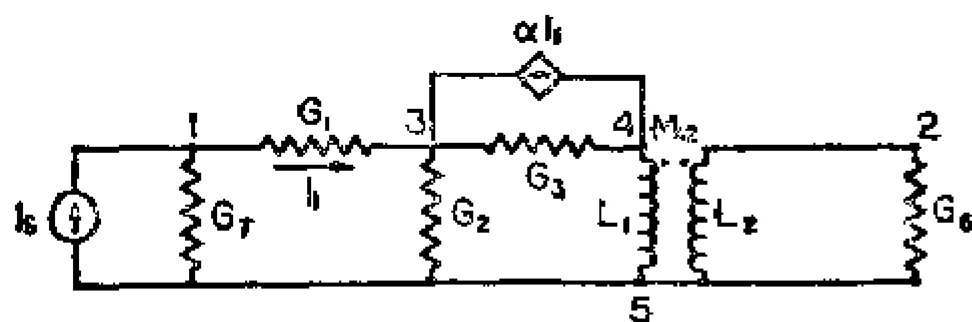



图4 变压器耦合的晶体管放大器

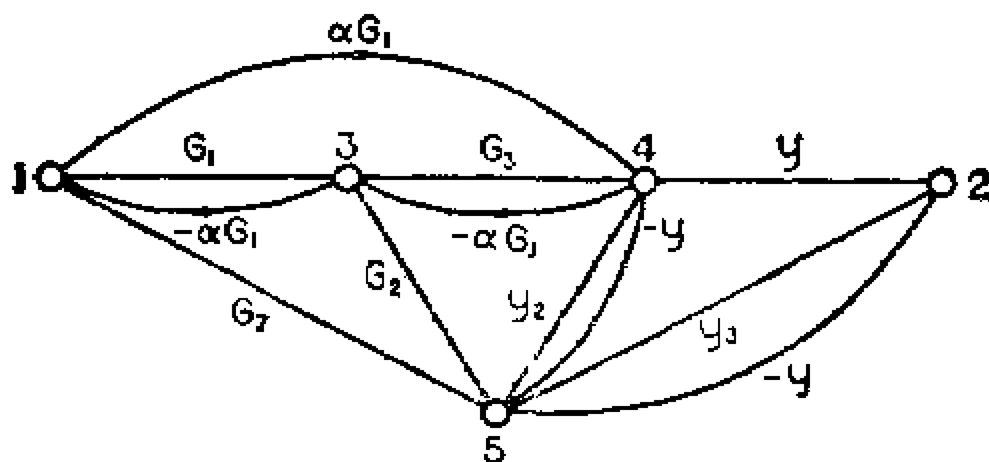



图5 图4的晶体管放大器的伴随混合图

**推论5.**

$G$的一个有向树(有向2-树)，当且仅当它相应于$G_v$和$G_i$的唯一的完备树（完备2-树)时，它是完备的。

于是我们可以应用已知产生完备树和完备2-树的方法[8]来计算完备有向树及有向2-树。有意义的是这里不涉及麻烦的符号问题。

**举例**

研究图4的放大器，其伴随有向图$G$ 如图5中所示。我们希望计算节点行列式和它的余子式$\Delta_{11}$和$\Delta_{12}$。

在$G$中，如果节点$i$和节点$j$之间有并列边，令$(i, j)_1$是二端网络元件的一条无源边，$(i, j)_2$是有源或无源集合中的一条有源边或无源边。

在(8)式中，图$G$的完备有向树$t_k$的参考节点$k$可以任意选取，令$k=5$。仅含有二端网络

元件的无源边[包括$(4,5)_1$和$(2,5)_1$]的$t_5$总是完备的。$t_5$对于节点行列式的贡献为：

$$y_3[(G_1+G_7)(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2)+G_1G_7(G_3+y_2)]$$

其中$y_1=L_1/w$，$y_2=L_2/w$，$w=s(L_1L_2-M_{12}^2)\neq 0$，以及$y_3=G_8+y_1$。该展开式的每一项对应着从$G$移去有源和无源集合而所得图中的一个树。至少包含着有源和/或无源集合中一条边的完备有向树$t_5$所对应的各项为：

$$(-\alpha G_1)G_7y_2y_3 \quad (-y)yG_1G_2 \quad (-y)yG_2G_7 \quad (-y)yG_1G_3$$
$$(-y)yG_3G_7 \quad (-y)yG_1G_7 \quad (-y)y(-\alpha G_1)G_7$$

式中$(-\alpha G_1)$对应于有源边$(3,1)_2$，$(-y)$对应于无源边$(2,5)_2$，$y=M_{12}/w$对应于无源边$(2,4)$。因此，利用(8)式得出网络的节点行列式如下：

$$\begin{aligned}\triangle=&y_3[(G_1+G_7)(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2)+G_1G_7(G_3+y_2)]\\&-\alpha G_1G_7y_2y_3-y^2(G_1+G_7)(G_2+G_3)\\&-y^2G_1G_7+y^2\alpha G_1G_7\end{aligned} \tag{10}$$

很容易验证(10)式的每一项对应着$G$的一个完备有向树$t_k$，$k=1, 2, 3, 4, 5$，式中$(-\alpha G)$项对应于$k=1,2,4$和5时的$(3,1)_2$；以及$k=3$时的$(4,3)_2$。注意有源边$(4,1)$和无源边$(2,4)$不能单独地出现在完备有向树$t_k$中[除非$(2,5)_2$也在该树中]。

计算$\triangle_{11}$是非常容易的，因为利用(9)式和推论4，它对应于含有$G_7$和移去$G_7$的完备有向树$t_6$。由(10)式，我们有：

$$\begin{aligned}\triangle_{11}=&y_3(G_2G_3+G_2y_2+G_3y_2+G_1G_3+G_1y_2)\\&-\alpha G_1y_2y_3-y^2(G_2+G_3+G_1-\alpha G_1)\end{aligned} \tag{11}$$

最后，为了计算$\triangle_{12}$，我们生成$G$的完备有向2-树$t_{12,6}$。它们所对应的各项为：

$$yG_1G_3 \quad 和 \quad (\alpha G_1)G_2y。$$

于是，利用(9)式，我们有

$$\triangle_{12}=y(G_1G_3+\alpha G_1G_2)。 \tag{12}$$

值得注意的是在应用定理4时我们不应该把$G$的并列边合并；只有当这些并列边对应于二端网络元件[包括图1($b$)中的($a$, $b$)和($c$, $d$)边]时，才能预先进行合并。

**4.推广到回转器的情况**

至今，我们的讨论仅限于这种线性网络$N$，即它的图不含有如图3所示的那类子图。对于所有的实际网络来说，除了$b=d$的情况之外，此类子图从来不会在$G$中出现。因此，为了避免不必要的复杂化，在本节中我们仅研究由图6($b$)所给出的那类子图，其中$\alpha\neq\beta$。特别是$\alpha=g$和$\beta=-g$的情况，图6($b$)是图6($a$)所示的回转器的伴随有向图。

$G$之对应于图6($b$)的6个有源边的集合为：

$$S_g=\{(a,c),\ (c,a),\ (a,b),\ (b,a),\ (c,b),\ (b,c)\} \tag{13}$$

称为回转器集合。假若我们推广有源集合的概念使之包括回转器集合，同时把下面的规则加到定义1和2上，那么前一节所导出的全部公式仍然有效。

对完备有向树$t_k$所加的规则是：

1) $S_g$有两条边在$t_k$中，移去它们将得到一个有向3-树$t_{a,b,kc}$或$t_{a,kb,c}$或$t_{ka,b,c}$。如果是$t_{a,b,kc}$，则$(b, a)$和$(a, c)$在$t_k$中；如果是$t_{a,kb,c}$则$(a, c)$和$(c, b)$在$t_k$中；如果是$t_{ka,b,c}$，则$(b,c)$和$(c,a)$在$t_k$中。

对完备有向2-树$t_{ij,k}$所加的规则是：

2) $S_g$有两条边在$t_{ij,k}$中，那么对于有向树$t_{ij,k}\cup(i,k)$遵照原先规则($B$)。

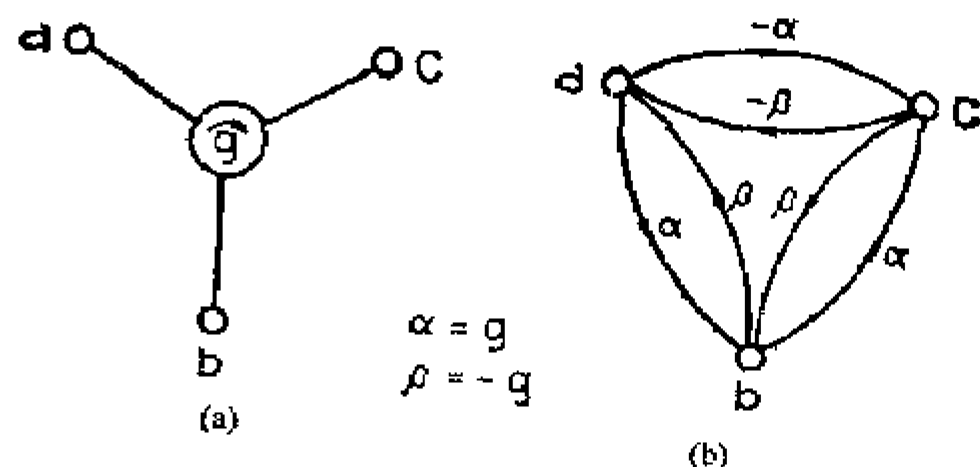



图6 (a) 回转器 (b) 回转器的伴随有向图

## 结 论

在本文中，我们描述了这样的有向树和有向2-树，它们在实际的含有非互易元件及变压器的网络的节点行列式和余子式的展开式中，没有任何对消项；它们被称为完备有向树及完备有向2-树。我们还指出了它们与Coates-Mayeda法中的完备树和完备2-树的关系。利用所建立的关系，我们可以应用已知的计算有向树和有向2-树的方法来得到待求项。但是，请注意，本文没有讨论有关确定完备树的符号问题，而是提出一种不同于Coates-Mayeda或Chen方法的新拓扑公式。这里不涉及到任何符号问题以及相互抵消的冗余项。

本文的结论也用于说明目前未解决的关于线性有源网络的复杂度问题〔11〕。

## 附 录 1

引理3的证明概要

因为(6)式的右边不存在相消项，因此对于$T_{k2}-T'_{k2}$的每一个$t_k$，在$T_{k2}-T'_{k2}$中有唯一的$t''_k$，$t''_k \neq t_k$，且$f(t_k)=-f(t''_k)$。于是为了证明这一引理。将$T_{k2}-T'_{k2}$的各元素*分为8类，每一类作为一种情况来考虑。令$p_{ij}$是$t_k$中节点$i$和节点$j$之间的唯一通路（不一定是有向通路）。

**情况1：**$(c,a)$和$(d,b)$或$(c,a)$和$(d,a)$在$t_k$中，且在$t_k-(c,a)\cup(d,b)$或$t_k-(c,a)\cup(d,a)$中有一个$P_{bc}$。如果$(c,a)$和$(d,b)$在$t_k$中，令$t''_k=t_k\cup(d,a)-(d,b)$；如果$(c,a)$和$(d,a)$在$t_k$中，令$t''_k=t_k\cup(d,b)-(d,a)$。显然，$t_k$和$t''_k$的这种对应是唯一的，且有$f(t_k)=-f(t''_k)$，此外，$t_k$和$t''_k$均属于相同的类型。

我们能类似地证明其它七种情况。下面略去了细节。

**情况2：**$(c,a)$和$(d,b)$或$(c,b)$和$(d,b)$在$t_k$中，在$t_k-(c,a)\cup(d,b)$或$t_k-(c,b)\cup(d,b)$有一个$P_{ab}$。

**情况3：**$(c,a)$和$(d,b)$或$(c,b)$和$(d,b)$在$t_k$中，在$t_k-(c,a)\cup(d,b)$或$t_k-(c,b)\cup(d,b)$中有一个$P_{ad}$。

**情况4：**$(c,a)$和$(d,b)$或$(d,a)$和$(d,b)$在$t_k$中，在$t_k-(c,a)\cup(d,b)$或$t_k-(d,a)\cup(d,b)$中有一个$P_{cd}$。

**情况5：**$(c,b)$和$(d,a)$或$(c,b)$和$(d,b)$在$t_k$中，在$t_k-(c,b)\cup(d,a)$或$t_k-(c,b)\cup(d,b)$中有一个$P_{ac}$。

*校注：$T_{k2}-T'_{k2}$是一个有向树集合，这里的元素指它的有向树，下同。

**情况6**：$(c,b)$和$(d,a)$或$(c,a)$和$(d,a)$在$t_k$中，在$t_k-(c,b)\cup(d,a)$或$t_k-(c,a)\cup(d,a)$中有一个$P_{ab}$。

**情况7**：$(c,b)$和$(d,a)$或$(c,a)$和$(c,b)$在$t_k$中，在$t_k-(c,b)\cup(d,a)$或$t_k-(c,a)\cup(c,b)$中有一个$P_{cd}$。

**情况8**：$(c,b)$和$(d,a)$或$(c,a)$和$(d,a)$在$t_k$中，在$t_k-(c,b)\cup(d,a)$或$t_k-(c,a)\cup(d,a)$中有一个$P_{bd}$。

因为$T_{k3}-T'_{k2}$的每一个$t_k$都属于上述情况之一，所以引理得证。

## 附　录　2

**引理4的证明概要**

证明类似于引理3的方法。将$T_{k1}$中的元素$t_k$分为下列6种不同类型，每一种类型作为一种情况考虑。

**情况1**：$(c,a)$或$(c,b)$在$t_k$中，移去它们将得到一个有向2-树$t_{cd,kab}$。如果$(c,a)$在$t_k$中，令$t'_k=t_k\cup(c,b)-(c,a)$；如果$(c,b)$在$t_k$中，令$t'_k=t_k\cup(c,a)-(c,b)$。显然，$t_k$与$t'_k$的这种对应是唯一的，且有$f(t_k)=-f(t'_k)$，此处$t_k$与$t'_k$属于同一类型。

类似地，我们能证明情况2、3和4如下：

**情况2**：$(c,a)$或$(c,b)$在$t_k$中，移去它们将得到一个$t_{c,kabd}$。

**情况3**：$(d,b)$或$(d,a)$在$t_k$中，移去它们将得到一个$t_{dc,kab}$。

**情况4**：$(d,b)$或$(d,a)$在$t_k$中，移去它们将得到$t_{d,kabc}$。

情况5和情况6的证明是相似的。但是它们与上面所给出的几种情况完全不同，并且更为复杂。

**情况5**：$(c,a)$或$(d,a)$在$t_k$中，将它们从$t_k$中移去后得到$t_{cbd,ka}$或$t_{dbc,ka}$。不失一般性地我们假设$(c,a)$在$t_k$中。在$t_{cbd,ka}$中，如果从$d$到$c$之唯一的有向通路$P_{dc}$仅由无源边构成，令$t'_k=t_k\cup(d,a)-(c,a)$。显然$t'_k$也是一个与$t_k$相同类型的有向树，且使得$f(t_k)=-f(t'_k)$。如果在$P_{dc}$中有一条有源边，譬如说$(x,y)$，令$S_1=\{(x,y),\ (x,v),\ (u,y),\ (u,v)\}$是一个包含$(x,y)$的有源集合。需要考虑三种不同的子情况。

**子情况1**：$t_k-(x,y)$是一个属于上述情况1—4中的有向2-树。那么利用类似的论证可以作出证明。

**子情况2**：$t_k-(x,y)=(t_{kx,xuv})$。如果在$t_{kx,xuv}$中之唯一的有向通路$P_{ux}$仅由无源边所组成，令$t'_k=t_k\cup(u,y)-(x,y)$。否则，或者属于子情况3或者在$P_{ux}$中存在一条有源边。在后一种情况，可以重复运用相同的论据。因为$t_k$是有限的，或者作为这种子情况已证明过或者应用子情况3而证明。

**子情况3**：$t_k-(x,y)=t_{ux,kyv}$，我们首先假设在$P_{dc}$中仅有一条有源边$(x,y)$，如果在$t_{xv,kyu}$中之唯一的有向通路$P_{ux}$和$P_{uy}$仅由无源边所组成，则令

$$t'_k=t_k\cup(d,a)\cup(u,v)-(c,a)\cup(x,y)。$$

显然，$t'_k$是一个与$t_k$同类型的有向树，并使得$f(t_k)=-f(t'_k)$。如果$P_{ux}$或$P_{uy}$包含有一条有源边，则可重复上述全过程。因为$t_k$是一个树且在$G$中不含如图3所示的那种子图，其中$\alpha\neq\beta$，这一过程总要在某一阶段停止。于是，我们证明了$P_{dc}$只含有一条有源边的情况。若$P_{dc}$含有2条以上的有源边的情况，则这一子情况可用归纳法加以证明。

**情况6**：$(d,b)$或$(c,b)$在$t_k$中，将它们从$t_k$移去后得到$t_{dac,kb}$或$t_{cad,kb}$。证明方法与情况5相

似，此处从略。

因为$T_{k1}$的每一个元素$t_k$是上述类型中的一种，所以引理立即得到。引理证毕。

## 附　录　3

**定理4的证明概要**

我们将用归纳法来证明此定理。如果$G$至多有一个由(3)式所定义的有源或无源集合$S$，从第2节-$A$的讨论可知，该定理是正确的。假设这一论断对于任何含有$m-1$个(或小于$m-1$个）这种集合的$G$都成立，此处 $m\geqslant 1$，则我们将证明当$G$含有$m$个这种集合的情况也将成立。

不失一般性地由（3）式所定义的$S$是$G$的一个有源集合。将$G$之$t_k$的集合$T_k$像第2节-$A$那样分解成$T_{kz}$。显然我们仅需考虑(1)式的$T_{k0}$，$T'_{k2}$和$T_{k4}$。因为$T_{k0}$是一个从$G$移去$S$的各边而得的图$G_0$的有向树的集合，则从归纳法的假设便得到，这种$T_{k0}$的$t_k$对于（1）式之最后展开式的未相消项的贡献相应于$G_0$的完备有向树。

下面，研究$T_{k4}$的各元素，显然我们有：

$T_{k4}=\{t_{k4}|$ $S$的$(x,y)$在$t_k$中且使$t_k-(x,y)=t_{xy',kx'y}$，式中$x$和$x'$($y$和$y'$)是$\{c,d\}$($\{a,b\}$)的元素之补$\}$。

令$S_1$是$G$的另一个集合。$T_{k4}$的元素可以进一步分解为互不相交的情况$T^1_{kz}$ ($z=0,1,2,3,4$)，其中$T^1_{kz}$的定义与$T_{kz}$相同，只不过$t_k$是$T_{k4}$的一个元素，而用$S_1$代替了原来的$S$。

现在，我们能证明对$T^1_{k3}$和$T^1_{k2}$的元素可以分别得到类似于(4)—(6)式的结果。对于$T^1_{k1}$的元素，其结果与(7)式多少有点不同，因为不是所有在证明引理4时所定义的运算而得到的元素在$T_{k4}$中仍然存在。令$S_1=\{(x_1,y_1),(x_1,y'_1),(x'_1,y_1),(x'_1,y'_1)\}$。在$t_{xy',kx'y}$中令$P_{y'x}$和$P_{x'y}$分别是连接$y'$和$x$以及$x'$和$y$间的唯一通路。要考虑三种情况。

**情况1：** 在$P_{y'x}$或$P_{x'y}$中没有$S_1$的边，可得到关于$T^1_{k1}$的元素的类似于(7)式的结果，其证明与引理4相同

**情况2：** $S_1$的$(x_1,y_1)$在$P_{y'x}$或$P_{x'y}$中，节点$y_1$和$y'_1$与$t_k-(x,y)$处在同一个连通片之中。对于$T^1_{k1}$的各元素也可得到类似于(7)式的结果，其证明方法类似于引理4。

**情况3：** $(x_1,y_1)$在$P_{y'x}$或$P_{x'y}$中，节点$y_1$和$y'_1$在$t_k-(x,y)$的不同的连通片之中。不失一般性地我们假设$(x_1,y_1)$在$P_{y'x}$中。如果$t_k-(x,y)-(x_1,y_1)$是一个$t_{xx'_1,y_1y'}$类型的3-树(不一定是有向3-树)，那么仿照引理4的证明我们能在$T_{k4}$中找到唯一的$t'_k$，使得$f(t_k)=-f(t'_k)$。如果它是$t_{x_1,y_1x'_1y}$或$t_{xy'_1,y_1x}$类型的，那么满足于定义1的3)。

最后，我们注意对对于集合$S_1$来说，$T^1_{k0}$和$T^1_{k4}$满足定义1的1)。于是，我们断定在(1)式中仅需考虑$T_k$的元素，它们对于$S$和$S_1$满足定义1的条件。

假设这一论断对任意含有$m'-1$ ($m'\geqslant 1$) 个或小于$m'-1$个这样的集合的$G$是正确的。那么第二次归纳法将证明这一论断对于任意$m'$是成立的。于是在(1)式的最后展开式未消去的项唯一地对应于$G$的完备有向树。

类似地我们能够证明节点导纳矩阵元素的余子式的情况。这里省略了细节。

**致谢（略）**

# 参 考 文 献


〔1〕 W. K. Chen, "Topological analysis for active networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-12, pp. 85-91, Mar. 1965.

〔2〕 S. P. Chan, *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks*. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1969.

〔3〕 W. K. Chen, *Applied Graph Theory*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1971, ch. 4.

〔4〕 W. Mayeda, "Topological formulas for nonreciprocal networks and networks with transformers," in *Proc. Nat. Electron. Conf.*, vol. 14, pp. 631-643, 1958.

〔5〕 S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*. Reading, Mass. :Addison-Wesley, 1961, pp. 178-193.

〔6〕 W. K. Chen, "Unified theory on topological analysis of linear systems," *Proc. Inst. Elec. Eng.* (London), vol. 114, pp. 1630-1636, Nov. 1967.

〔7〕 W. K. Chen, "A generalization of the equicofactor matrix," *IEEE Trans. Circuit Theory* (Corresp.), vol. CT-13, pp. 440-442, Dec. 1966.

〔8〕 W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen, and N. Deo, "Generation of complete trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-15, pp. 101-105, June 1968.

〔9〕 C. L. Coates, "General topological formulas for linear network functions," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-5, pp. 30-42, Mar. 1958.

〔10〕 S. P. Chan and W. R. Dunn, Jr., "Topological formulation of active network functions," *IEEE Trans. Circuit Theory* (Corresp.), vol. CT-18, pp. 554-557, sept. 1971.

〔11〕 J. Tow, "Order of complexity of linear active networks," *Proc. Inst. Elec. Eng.* (London), vol. 115, pp. 1259-1262, Sept. 1968.

# 十三、论线性代数方程的有向图解

**1.引言**

线性系统分析最后化简为线性联立方程的求解问题。作为通常解线性联立代数方程组的另一种方法，可以用研究与该系统对应的某种线图来得出其解。方程的未知数对应于该图的各节点，而节点之间的线性关系是以连接这些节点的有向边的形式出现。线图法在网络分析中是特别有意义的，因为对应的有向图可通过对网络的直接观察而建立，而无需首先列出所对应的方程。

本文的目的在于总结许多现有的结果，提供一种推导它们的统一理论，并且给出产生一个已知有向图的1-因子，1-因子连接，半因子和$k$-半因子的系统方法。

**2.定义** 一个有向图$G$（线图）是由集合$V$和集合$E$所组成，$V$中的元素称为节点，$E$中的元素是有序节偶（$i$, $j$），$i$和$j$在$V$中，称为$G$的有向边；节点$i$称为边（$i$, $j$）的起始节点，节点$j$称为终止节点。为方便起见，边（$i$, $j$）还用符号$e_{ij}$来表示。对于$V$中的任一节点$i$来说，$\rho(i)$和$\rho^*(i)$分别用来表示以$i$作为起始节点和终止节点的边集合的数目。它们称为在$G$中$i$点的出度和入度。没有与任何边相关联的节点称为孤立节点。一个仅含有孤立节点的有向图称为零图。两个子图当它们无公共节点时是互不相交的。如果$S$是$G$的一个子图，且$G$的每一个节点是$S$的一个节点，则$S$是$G$的一个生成子图。如果$\rho^*(i)=\rho(i)=k$，适用于$G$中的每一个节点$i$，则该有向图是度数为$k$的规则图。如果（$i$, $j$）在$G$中所具有的性质而（$j$, $i$）在$G$中也具有此性质，则称该有向图是对称的。$G$的一个有向回路是度数为1的规则连通子图。仅有一条边构成的有向回路称为自环。

从$G$中的节点$i$到节点$j$的有向通路用$P_{ij}$表示，它是一个在$G$中形如$P_{ij}=(i,k_1)(k_1,k_2)(k_2,k_3)\cdots(k_m,j)$的序列。此处$i$、$j$和$k_t$是$G$中的节点，且$t=1, 2, \cdots, m$，即各节点互不相同。如果$G$的子图$H$是$G$的最大连通子图，则称其为$G$的一个连通片。如果$A$是图$G$之节点集合的子集，则用$G[A]$表示$G$的局部图，它是一个子图，其节点的集合是$A$，其边是在$G$中所有连接$A$的两个节点的边。一个孤立节点可作为一个连通片来考虑。一个偶连通片是指含有偶数条边的连通片。

$G$的1-因子是$G$的一个生成子图，其度数有规则地为1。较直观地说，1-因子是包含$G$中的所有节点的、互不相接的有向回路之集合。在工程文献（见[17]，[20]）中，1-因子也称为连接。从$G$的节点$i$到节点$j$的1-因子连接，用$H_{ij}$来表示，它是$G$的一个生成子图，它包括：(i) 从节点$i$到节点$j$的有向通路$P_{ij}$；(ii) 不包括在(i)中的$G$之所有其它节点而形成的、互不相接的有向回路之集合。1-因子连接也称为1-连接(见[17]，[20])。

一个加权有向图$G$是一个每条边都赋以权的有向图。为方便起见，对于$G$的每一个子图

$S$，若其不含孤立节点的话，它也可用边的“乘积”或并置来表示；例如一个有向回路可用$e_{12}e_{23}e_{31}$来表示。符号$f((i,j))$或$f((e_{ij}))$用来表示与$G$之边$(i,j)$相对应的权。如果$S$是$G$的一个子图，那么$f(S)$表示了$S$的各个边权的乘积。如果$S$是$G$的零图，则定义$f(S)=1$。一个标记有向图是$G$的一个有向图，其中所有的节点用整数1，2，…，$n$来标记，此处$n$是$G$中节点的数目。贯穿于本文始终，术语“有向图”系指一个有标记的加权有向图。

两种集合论二元运算，“并”及“交”，分别用$\cup$及$\cap$表示。它们可用于两种稍为不同的范畴。例如，$H_1$和$H_2$是$G$的两个子图，那么$H_1 \cup H_2$表示$G$的一个子图，它含有既在$H_1$中、或者在$H_2$中、或者在两者之中的元素。如果$H_1$和$H_2$是两个集合，那么$H_1 \cup H_2$表示两集合之并。对于$\cap$，这也是类似定义的。对于一个有限集合$B$来说，其元素的数目用$\mu(B)$表示。如果一个给定的矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$用来表示从$\boldsymbol{A}$删去其第$i$行与第$j$列而得到的矩阵。

如果在有向回路中所包含的边数为$m$，则有向回路的长度是$m$。$G$的半因子$R$是$G$的一个生成子图，它不含有长度$\geq 2$的任何有向回路，且使得$\rho^{*}(i)=1$，适用于$R$中的所有$i$。一个用$R^{j_1 j_2 \cdots j_k}$表示的$G$的子图，当把边$(j_1,j_1)$，…，$(j_k,j_k)$加到$R^{j_1 j_2 \cdots j_k}$上，所得到的有向图变成$G'$的一个半因子，则称其为$k$-半因子，此处$G'$是把边$(j_1,j_1)$，…，$(j_k,j_k)$加在$G$上而得的图。

**3.一个矩阵的对应有向图**

一个行列式的展开式中的每一项与一个有向图中相应的有向回路之间有对应关系，这一思想并不是新的。König〔1〕第一个应用图论的方法计算了行列式。然后许多作者将其用到各种各样的场合〔2〕—〔32〕。把有向图与一组线性联立方程联系起来是由Mason提出的〔15〕，〔16〕，并称为信号流图。Coates〔17〕发明了一种不同的有向图，称为流图。用于建立与代数方程组的相同联系，并给出了某些拓扑公式严格而系统化的推导。

对于一个给定的$n$阶方阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$来说，$\boldsymbol{A}$的流图用$G_c(\boldsymbol{A})$表示，它是一个$n$个节点的、加权、标记有向图，使得如果$a_{ji} \neq 0$，则从节点$i$指向节点$j$有一条相应的权为$a_{ji}$的有向边；如果$a_{ji}=0$，则从节点$i$到节点$j$无有向边。反之，对于给定的流图$G_c$，有对应的一个矩阵，并用$\boldsymbol{A}(G_c)$表示。实际上，用Harary〔11〕采用的变量邻接矩阵的术语，$G_c$的对应矩阵$\boldsymbol{A}(G_c)$等于$G_c$的变量邻接矩阵的转置（或是Hohn，Seshu，以及Aufenkamp〔18〕，〔19〕所述的初始连接矩阵的转置）。下列结果首先是由König〔1〕所采用，并由Coates〔17〕以有向图的关联矩阵为工具进行了严格而系统化的推导。但是，其证明是相当冗长的。最近对Coates公式，Desoer〔20〕利用少量的行列式性质给出一种简单的推导方法。因为Desoer给出的结果是相当简单的，我们将其作为下列定理而重新叙述其结果。

**定理1**　在$i \neq j$时，

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^n \sum_{h} (-1)^{L_p} f(h),$$

$$(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_q - 1} f(H_{ij})$$

此处$h$是$G_c(\boldsymbol{A})$中的1-因子；$H_{ij}$是$G_c(\boldsymbol{A})$中从节点$i$到节点$j$的1-因子连接；$L_p$和$L_q$分别是在$h$和$H_{ij}$中的有向回路数；$\boldsymbol{A}_{ij}$是从给定的$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$、删去其第$i$行与第$j$列而得到的矩阵，和式$\sum\limits_{h}$和$\sum\limits_{H_{ij}}$分别对$G_c(\boldsymbol{A})$中的全部$h$和$H_{ij}$求取。此外，如果$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$是（常系数）联立方程组

的话，那么其解由下式给出：

$$x_k=\frac{\sum\limits_{H_{(n+1)k}}(-1)^{L_h}f(H_{(n+1)k})}{\sum\limits_{h}(-1)^{L_h}f(h)}$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，此处$\det \boldsymbol{A}\neq 0$；$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{B}$是列矢量，$\boldsymbol{X}$的转置用$[x_1,x_2,\ \cdots,\ x_n]$来给出）；$H_{(n+1)k}$是在$G_c(\boldsymbol{A}_u)$中从节点$n+1$到节点$k$的1-因子连接，此处$\boldsymbol{A}_u$是从$\boldsymbol{A}$而得到的增广矩阵，即它是将$-\boldsymbol{B}$加到$\boldsymbol{A}$的右边，然后把一行零加到所得矩阵的底部而得；$L_0$是$H_{(n+1)k}$中的有向回路数；和式$\sum\limits_{H_{(n+1)k}}$是对$G_c(\boldsymbol{A}_u)$中的全部$H_{(n+1)k}$求取。

因为一个矩阵的行列式和该矩阵转置的行列式是相等的，由此可知我们分别用$G_c(\boldsymbol{A}')$和$G_c(\boldsymbol{A}_u')$代替$G_c(\boldsymbol{A})$和$G_c(\boldsymbol{A}_u)$之后，定理1仍然成立，此处一撇表示矩阵的转置。唯一例外的是我们必须说明$H_{xy}$是作为从节点$y$到节点$x$的1-因子连接，而代替了从节点$x$到节点$y$的1-因子连接。这就是为什么我们要定义一个流图来作为$\boldsymbol{A}'$（而不是$\boldsymbol{A}$）的对应有向图。换句话说，我们可以采用定理1来得到一个有向图的变量邻接矩阵或连接矩阵行列式的值。

另一种与给定矩阵相联系的有向图，称为信号流图[15]，[16]。事实上，信号流图比流图先导出，并且它已广泛地作为工程问题的分析工具，特别是线性问题分析的工具[21]。正如在本节开始时所提到的，信号流图首先由Mason提出[15]。但是在推导得出他的论证是相当曲折的。最近，Younger[22]利用行列式的恒等式给出了一种简单推导Mason公式的方法。奇妙的是拓扑公式完全基于行列式的理论。这里我们将介绍Coates的结果[17]的简便拓朴推导法。

对于一个给定的$n$阶方阵来说，用$G_m(\boldsymbol{A})$表示$\boldsymbol{A}$的信号流图，它是矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$的流图，此处$\boldsymbol{I}_n$是$n$阶单位矩阵，因此，信号流图可以从相应的流图来得到——即在所存在的每一个自环处将权加1，且在流图中无自环的节点处，加上一个权为1的自环。

建立此类关系的理由如下：方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$可以写成稍为不同的形式，即

$$(\boldsymbol{A}_u+\boldsymbol{I}_{n+1})\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{X}'',$$

此处$\boldsymbol{A}_u$的定义如前那样，$\boldsymbol{X}''$的转置由$[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1}]$给出，这里$x_{n+1}=1$，且$\boldsymbol{B}$的转置由$[b_1,b_2,\cdots,b_n]$给出，现在我们对上述的方程组

$$(a_{kk}+1)x_k-b_kx_{n+1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j=x_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

解释为在$G_m(\boldsymbol{A}_u)$中或在$G_c(\boldsymbol{A}_u+\boldsymbol{I}_{n+1})$中的信号流。即每一个节点$k$处有一个称为节点信号$x_k$的对应量。每一个方程给出一个节点信号，它是由射入边所流进信号的代数和。每一个流入的信号是一条边的权与发出该边所在节点信号之乘积。注意在一个给定节点的信号就是流入信号之和，而射出边的存在不会直接影响到该节点的信号。作者深信，这就是Mason为什么将对应的有向图称为信号流图的理由。

**定理2**（Mason）

$$\det\boldsymbol{A}=(-1)^n[1+\sum_{m,r}(-1)^{L_{mr}}f(C'_{mr})],$$

$$(-1)^{i+j}\det\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_{k}P^k_{ij}[1+\sum_{s,u}(-1)^{L_{su}}f(D^k_{su})]$$

以及

$$x_k=\frac{\sum\limits_{t} P^{t}_{(n+1)k}\left[1+\sum\limits_{s,v}(-1)^{L^{t}_{v}} f(E^{t}_{sv})\right]}{1+\sum\limits_{m,r}(-1)^{L_{r}} f(C^{t}_{mr})}$$

$k=1,2,\cdots,n$，且$i\neq j$，此处$C^{\prime}_{mr}$是$G_m(\boldsymbol{A})$中$r$个互不相接的回路的第$m$种可能的组合。$P^{t}_{ij}$和$P^{t}_{(n-1)k}$分别为在$G_m(\boldsymbol{A})$中从节点$i$到节点$j$以及在$G_m(\boldsymbol{A}_n)$中从节点$n+1$到节点$k$的第$t$条有向通路；$D^{t}_{sv}(E^{t}_{sv})$是$v$个互不相接的回路的第$s$种可能的组合，这些回路在$G_m(\boldsymbol{A})(G_m(\boldsymbol{A}_n))$中与有向通路$P^{t}_{ij}(P^{t}_{(n+1)k})$不相接触；$L^{\prime}_{r},L^{\prime}_{v}$与$L^{t}_{v}$分别是在$C^{\prime}_{mr}$，$D^{t}_{sv}$，以及$E^{t}_{sv}$中的有向回路数；和式是对所有的$m$，$r$，$t$，$s$与$v$（在它们各自的有向回路中）求取，此处$m$，$r$，$s$，$t$与$v$是正整数；所有在此未特别说明的术语与定理1中的定义相同。

*证明：我们基于定理1的第1个方程证明第1个恒等式，而第2个和第3个恒等式可与定理1的相应的方程作完全类似的证明。*

正如前面所提到，一个流图$G_c(\boldsymbol{A})$可以从一个给定的信号流图$G_m(\boldsymbol{A})$而简单地得到——在存在自环处将其权减1，同时在$G_m(\boldsymbol{A})$没有自环的每一个节点加入一个权为$-1$的自环。这可等效地说成相应的$G_c(\boldsymbol{A})$可从$G_m(\boldsymbol{A})$简单地将其每个节点加上一个$-1$的自环而得到。显然，$G_c(\boldsymbol{A})$在每个节点至多包含两个、至少包含有1个自环。如果$R_{ij}$是$G_c(\boldsymbol{A})$的第$i$个1-因子，$G_c(\boldsymbol{A})$包含了$j$个权为$-1$的附加自环，此处$j$的范围从0到$n$，因此

$$f(R_{ij})=(-1)^{j} f(Q_{ij}),$$

此处$Q_{ij}$是从$R_{ij}$移去第$j$个附加自环而得到的。利用定理1的第1个方程，带有适当符号$R_{ij}$的总和恰好等于$\boldsymbol{A}$的行列式，即

$$\det\boldsymbol{A}=(-1)^{n}\left[\sum_{i,j}(-1)^{L_i+j}(-1)^{j} f(Q_{ij})\right],$$

此处$L_i$是$Q_{ij}$中的有向回路数，和式是对所有可能的指数$i$和$j$求取。因为所有$R_{ij}$是各不相同的，所有$Q_{ij}$也是各不相同的，反之亦然。根据这一点，人们容易认识到$\det\boldsymbol{A}$可用$G_m(\boldsymbol{A})$来计算，而不是用$G_c(\boldsymbol{A})$来计算，仅仅利用重新排列$\det\boldsymbol{A}$的各项，我们得到另一种熟知的展开式：

$$\det\boldsymbol{A}=(-1)^{n}\left[1+\sum_{m,r}(-1)^{L_{r}} f(C^{\prime}_{mr})\right]$$

定理证毕。

**4.流图与信号流图的改进**

上述所给出的方法在网络分析的领域中是特别有意义的。因为这两种图可以从对网络的观察而直接画出而不必首先去列写对应的方程。但是正如Chen所指出[23]，这些公式在电网络函数的计算中并不是那么有效，主要理由是存在着大量的相消项。因此他提出了一种改进Mason图和Coates图的方法，以致得出了有效的公式[23]。虽然这种改进是简单的，其公式也非常紧凑，但证明却相当长。这里我们将给出他的定理的简要证明。

对于一个流图$G_c(\boldsymbol{A})$（或信号流图$G_m(\boldsymbol{A})$，用$G^{\prime}_c(\boldsymbol{A})$或$G^{\prime}_m(\boldsymbol{A})$表示$G_c(\boldsymbol{A})$的改进流图（或$G_m(\boldsymbol{A})$的改进信号流图），它们是从$G_c(\boldsymbol{A})$（或$G_m(\boldsymbol{A})$）把每个自环所对应的权改变成$\sum\limits_{k=1}^{n} f((k,i))$而得到的有向图，此处$n$是$G_c(\boldsymbol{A})$（或$G_m(\boldsymbol{A})$）中的节点数。现在我们着手证明下列

定理。

**定理3**

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{R'}(-1)^{q'}f(R')$$

以及

$$(-1)^{i+j}\det \boldsymbol{A}_{ij}=\sum_{R_j^i}(-1)^{q_j^{i'}-1}f(R_j^i),$$

此处$R'$是$G_c'(\boldsymbol{A})$的半因子；$R_j^i$是$G_c'(\boldsymbol{A})$的1-半因子$R^i$，其中下标$j$表示节点$i$和$j$包含在$R_j^i$同一个连通片中；$q'$与$q_j^i$为$R'$与$R_j^i$中的偶连通片的数目；和式是分别对$G_c'(\boldsymbol{A})$中所有可能的$R'$和$R_j^i$求取。

证明：我们将证明行列式部分，因为余子式部分完全可用类似的方法加以证明。定理的证明将对$G_c'(\boldsymbol{A})$的边数、用数学归纳法来进行。

如果$G_c'(\boldsymbol{A})$仅有一条边，可看出本定理是成立的。假设本定理对具有$m-1$条（或少于$m-1$条）的任意$G_c'(\boldsymbol{A})$成立，为了完成数学归纳法的证明，我们需证明$G_c'(\boldsymbol{A})$有$m$条边的情况也成立。

假设$G_c'(\boldsymbol{A})$中存在一条边$(i,i)$，使得$\rho^*(i)\geqslant\rho^*(x)\geqslant1$，适用于$G_c'(\boldsymbol{A})$中所有的节点$x$。如果不是这样，本定理对此情况也成立，因为$\boldsymbol{A}$的每一行中的元素之和为零。令$G_1'$是一个从$G_c'(\boldsymbol{A})$移去$(i,i)$边而得到的有向图，$G_2'$是从$G_c'(\boldsymbol{A})$移去所有的$(t,i)$边而得到的有向图，$t=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n$，现在需要考虑两种情况。

**情况1**　$\rho^*(i)\geqq2$。因为$G_1'$与$G_2'$所具有的边少于$G_c'(\boldsymbol{A})$所具有的边，现在可应用归纳法的假设，即

$$\det \boldsymbol{A}_k=\sum_{Q_k'}(-1)^{q_k'}f(Q_k')$$

$k=1$与$2$。此处$Q_k'$是$G_k'$的一个半因子；$q_k'$是$Q_k'$中的偶连通片的数目；和式是对$G_k'$中所有可能的$Q_k'$来取；$\boldsymbol{A}_k$是从$G_k'$而得到的矩阵，使得相应于$\boldsymbol{A}_k$的改进流图是$G_k'$。由此得到

$$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}_1+\det \boldsymbol{A}_2=\sum_{Q_1'}(-1)^{q_1'}f(Q_1')+\sum_{Q_2'}(-1)^{q_2'}f(Q_2')$$

$$=\sum_{R'}(-1)^{q'}f(R')$$

**情况2**　$\rho^*(i)=1$。令$G_3'$是矩阵$\boldsymbol{A}_{ii}$的改进流图，此处$\boldsymbol{A}_{ii}$是从矩阵$\boldsymbol{A}$将第$i$行与第$i$列删去而得。现在可以再次应用归纳法的假设，即

$$\det \boldsymbol{A}_{ii}=\sum_{Q_3'}(-1)^{q_3'}f(Q_3'),$$

此处$Q_3'$是$G_3'$的半因子；$q_3'$是在$Q_3'$中的偶连通片的数目；和式是对$G_3'$中所有可能的$Q_3'$求取。因为在$G_3'$中，$f((j,j))=a_{jj}$或$-a_{ji}$，适用于$G_3'$中所有的$j(\neq i)$（再利用在每一个节点上两个自环的概念）。由此得到，在$G_c'(\boldsymbol{A})$中的半因子$R'$与$G_3'$中的半因子$Q_3'$之间存在着一一对应的关系，使得

$$(-1)^{q'}f(R')=(-1)^{q_3'}f((i,\ i))f(Q_3'),$$

此处$(i,\ i)$是$G_c'(\boldsymbol{A})$中的一条边。因此得出此定理。定理证毕。

**定理4**

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{m,r} (-1)^{q'_r} f(R'_{mr}), \qquad r = 0, 1, \cdots, n,$$

此处$R'_{mr}$是$G'_m(\boldsymbol{A})$中的第$m$个$r$–半因子；$q'_r$是在$R'_{mr}$中之偶连通片的数目；和式是对$G'_m(\boldsymbol{A})$中所有可能的$R'_{mr}$求取。$R'_{m0}$定义为第$m$个半因子。

定理4的证明与定理2的证明是相同的，故这里从略。

下一条定理是与〔23〕的定理3相对偶的定理。

**定理5**

$$(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{ij} = \sum_{m,r} (-1)^{q'_{ij}-1} f(R^{ij}_{mr}), \quad r = 1, 2, \cdots, n,$$

此处$R^{ij}_{mr}$是$G'_m(\boldsymbol{A})$中第$m$个$r$–半因子，其中节点$i$和$j$包含在同一个连通片中，且$\rho^*(i) = 0$，$q'_{ij}$是在$R^{ij}_{mr}$中的偶连通片的数目；和式是对在$G'_m(\boldsymbol{A})$中所有可能的$R^{ij}_{mr}$求取。

证明：因为这一对偶的结论Chen在〔23〕中未证明过，故现在证明如下。

容易证明$G'_c(\boldsymbol{A})$可以从$G'_m(\boldsymbol{A})$简单地得到——即在$G'_m(\boldsymbol{A})$的每个节点上添加权为$-1$的自环。显然，$G'_c(\boldsymbol{A})$在每一个节点至多包含2个、至少包含1个自环。如果$W^{ij}_{t}$是在$G'_c(\boldsymbol{A})$中第$t$个形如$R^{ij}$的1–因子（见定理3对$R^{ij}$的定义），它包含了$u$个权为$-1$的附加自环，此处$u$的范围是从0到$n-1$，那么容易证明：

$$(-1)^{q^{ij'}-1} f(W^{ij}_{t}) = (-1)^{q'_{ij}-u-1}(-1)^{u} f(Z^{ij}_{t(u+1)}),$$

此处$q'_i$与$q'_i$分别是在$W^{ij}_{t}$及$Z^{ij}_{t(u+1)}$中的偶连通片的数目，$Z^{ij}_{t(u+1)}$是从$W^{ij}_{t}$移去所加的自环而得到的。利用定理3，带有适当符号的$W^{ij}_{t}$的总和值恰好是矩阵的第$(i, j)$个余子式，即

$$(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{ij} = \sum_{t,u} (-1)^{q'_{ij}-1} f(Z^{ij}_{t(u+1)}),$$

此处和式是对所有可能的下标$t$，$u$求取。容易看出$Z^{ij}_{t(u+1)}$是$G'_m(\boldsymbol{A})$中形如$R^{ij}_{t(u+1)}$的$(u+1)$–半因子。因为所有$W^{ij}_{t}$是各不相同的，所以所有$Z^{ij}_{t(u+1)}$也是各不相同的。反之亦然。只不过把上述方程重新排列一下，我们便得到另一种较好的表达式：

$$(-1)^{i-j} \det \boldsymbol{A}_{ij} = \sum_{m,r} (-1)^{q'_{ij}-1} f(R^{ij}_{mr})$$

$r = 1, 2, \cdots, n$。定理证毕。

**5.有向图的子图的计算**

正如前面所提到，上面所介绍的结论的实用性很大程度上决定于产生一个有向图的某类子图的有效性。在本节中，我们将给出产生此类子图的一种系统化的方法。下面要叙述到一种适合于数字计算机编程序的方法。

对于一个给定的有向图$G$，用$V(G)$来表示变量邻接矩阵，它是一个$n$阶的方阵〔11〕。当且仅当在$G$中从节点$i$到节点$j$有一条边，且$x_k$即是这条边，则$(i, j)$元素为$x_k$，如果在$G$中没有这种边，则此元素为零，此处$n$是$G$中的节点数。正如在第3节中所指出，如果我们把$G$解释为一个给定的流图，那么$\boldsymbol{A}(G)$与$V(G)$的转置是相同的，此处$x_k$可以看成是$G$中边$(i, j)$的权。

为完整性起见，我们对全然不包含有向回路的有向图叙述一个众所周知的结论。

**定理6** 在一个没有有向回路的有向图$G$中，所有从节点$i$到节点$j$的有向通路$P_{ij}$是用$(I-V(G))^{-1}$的$(i, j)$元素来表示的。

证明：把$G$看成是一个给定的信号流图。$G$的对应矩阵用$\boldsymbol{A}(G)$给出，此处$\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I}$是

一个流图的对应矩阵，该流图与信号流图相对应，$\boldsymbol{I}$是$n$阶单位矩阵，$n$是$G$的节点数。根据定理2，我们有：

$$\det(\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I})=(-1)^n$$

以及

$$(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I})_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_{(t)}P_{ij}^t,$$

因为据假设$C_{n}^{t}$,和$D_{n}^{t}$为空集。此处$P_{ij}^t$是$G$中从节点$i$到节点$j$的第$t$条有向通路。因为$(V(G)-\boldsymbol{I})^{-1}$的$(i,j)$元素等于$(\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I})^{-1}$的$(j,i)$元素，即

$$\frac{(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I})_{ij}}{\det(\boldsymbol{A}(G)-\boldsymbol{I})}=-\sum_{t}P_{ij}^t,$$

故得出此定理。定理证毕。

对于一个给定的有向图$G$，符号$S_i$和$S_i'$用来分别表示以节点$i$作为$G$的起始节点与终止节点的边之集合。

**定理7** 对于一个给定的有向图$G$，1-因子集合$X$和从节点$i$到节点$j$的1-因子连接的集合$X_{ij}$由下式给出：

$$X=\left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\cap\left(\prod_{t=1}^{n}S_t'\right)$$

$$X_{ij}=\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}S_k\right)\cap\left(\prod_{\substack{t=1\\t\neq i}}^{n}S_t'\right),$$

此处$n$是$G$中的节点数，括号中的乘积表示集合的笛卡儿乘积。

证明：因为$\prod_{k=1}^{n}S_k$的每一个元素相应于$G$的一个生成子图，并且使得对于所有的$i$，$\rho(i)=1$，同时$\prod_{t=1}^{n}S_{t=1}'$的每一个元素对应于$G$的一个生成子图，对于所有的$i$，$\rho^*(i)=1$，由此得出只有$G$的1-因子才可能出现在$X$中。反之亦然。这就完成了本定理的第一部分的证明。

本定理的第二部分可从下列事实而直接得出，即$G$中从节点$i$到节点$j$的1-因子连接$X_{ij}$可简单地从$G'$的1-因子连接的集合$X'$而得到——在$X'$的每一项中删去$e_{ji}$边，此处$G'$是从$G$移去所有$e_{ju}$与$e_{ui}$ $(u=1, 2, \cdots, n)$的边，然后加上从节点$j$到节点$i$的一条边而所得到的有向图。因为在$G'$中

$$X'=\left(\prod_{k=1}^{n}\bar{S}_k\right)\cap\left(\prod_{t=1}^{n}\bar{S}_t'\right),$$

其中

$$\bar{S}_k=S_k-\{e_{ki}\},\quad k=1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n,$$

$$\bar{S}_t'=S_t'-\{e_{jt}\},\quad t=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n,$$

以及$\bar{S}_j=\bar{S}_i'=\{e_{ji}\}$，所以得到此定理。定理证毕。

对于信号流图来说，定理2所指出的那类子图的集合也可利用定理7来得到。差别仅仅在于我们必须对于每一个集合插入一个单位元素，它用$e_0$来表示，使得$e_0e_{xy}=e_{xy}$，此处$e_{xy}$是$G$的一条边。

令$H$是两个子图作运算而产生的子集的集合，这两个子集是在一个给定有向图$G$的所有子图集合中选取，其中有两种二元运算定义如下：对于$H$中的$h_1$和$h_2$来说，

$$h_1 \oplus h_2 = \{x;\ x\text{在}h_1\text{中或者在}h_2\text{中，但不在二者之中}\},$$

$$h_1 * h_2 = \{x \cup y: x\text{在}h_1\text{中，}y\text{在}h_2\text{中，且}x \cap y = \varnothing\}。$$容易证明这些所定义的运算满足交换律与结合律。利用这些定义，我们来着手产生$G$的形如$R^{i_1 i_2 \cdots i_k}$的半因子和$k$-半因子的集合。下面所叙述的方法是对于产生有向树及有向$k$-树的方法[24]的一种修改。

**定理8** 在给定的对称有向图$G$中，令$W$表示集合$S_t^i$的星乘(即王氏乘法)运算，$t=1,2,\cdots,n$；$T$表示集合$S_i^i$的星乘运算，$i=1,2,\cdots,n$，但$i \neq j_1, j_2 \cdots, j_k$，此处$S_t^i$表示$G$中以$t$作为终止节点的边集合，$n$是$G$中的节点数。还令

$$Y = \{w_1 \oplus w_2 \oplus \cdots \oplus w_{\mu(W)}\}$$

$$Z = \{t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_{\mu(T)}\},$$

此处$w_i \in W$，$i=1,2\cdots,\mu(W)$和$t_i \in T$，$i=1,2,\cdots,\mu(T)$。

在所有边的运算中，若把$e_{rs}$和$e_{sr}$看成是相同边的话，那么$G$的全部互不相同的半因子由$Y$给出；而$G$的全部互不相同的$R^{i_1 i_2 \cdots i_k}$形式的$k$-半因子（直至零图）由$Z$给出。

上述定理是Chen的结果[24]作了少许的修改，并且可用完全类似的方法加以证明。

如果$G$是不对称的，则总可使其成为对称的。令$G_s$是从$G$利用加上最少数量的边而得到的对称有向图。为了使人们区分增添的边与早先$G$中的边，对$G_s$中的边采用下列标记过程：如果$e_{ij}$和$e_{ji}$二者都在$G$中，则令$e_{ij}=e_k$，$e_{ji}=e_k'$；如果$e_{ij}$在$G$中，$e_{ji}$在$G_s$中但不在$G$中，令$e_{ij}=e_t$及$e_{ji}=e_t''$，此处$k$和$t$是某些正整数。

对于任意有向图$G$来说，假定$G_s$边是根据刚才的规则所标记，则$G_s$之所有不同的半因子及$k$-半因子可利用定理8，并分别假定$e_k$和$e_k'$，$e_t$和$e_t''$在运算中作为相同边而获得。由此得到、如果人们将所有的包含有一个带2撇的文字元素$e_t''$消去，那么，剩下的元素即是$G$的所有各不相同的半因子及$k$-半因子。

**6.多节点移去算法**

求解线性联立齐次方程组（任意一组变量是另外一些变量的函数）的标准代数方法是系统地减少方程数和变量数，直到留下仅含所希望变量的一组方程为止。对于这种用代数方法求解的过程，它对应着与这些方程相应有向图的拓扑简化过程，使得与所得图形对应的方程组就是应用代数方法所得的结果。为了实现这一点，*Mason*[15]和*Coates*[17]指出了如何从一个给定的有向图、其中减少一个节点而得到等效的有向图。这种运算一直重复进行直到移去所必须的节点为止。在下面的定理中所包含的结论是*Mason*与*Coates*方法的推广、且可以看成是多节点的移去过程[13]、[14]。为方便起见，与一个给定有向图$G$相对应的矩阵的行列式用$\det G$表示。

**定理9** 假设$V$是一个流图$G_c(\boldsymbol{A})$的节点集合，$V_m$是一个使$G_c[V_m] \neq 0$的$V$之真子集，那么$\det G_c(\boldsymbol{A}) = K_c \det G_{cr}$与$K_c = \det G_c[V_m]$，此处$G_{cr}$是用下列过程而从$G_c(\boldsymbol{A})$而得到的简化流图。

(i) 从$G_c$移去$G_c(V_m)$，即移去$V_m$中的所有节点以及与其任意一个节点相关联的边。

(ii) 在$G_{cr}$中与$(i,\ j)$边相对应的权由下式给出：

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{\mu(V_m)}}{K_c} \sum_{H_{ij}^m} (-1)^{q_m} f(H_{ij}^m)，\text{所有}i,\ j\text{在}V-V_m\text{中，}$$

此处$H_{ij}^m$是在$G_c[V_m \cup i \cup j]$中从节点$i$到节点$j$的1-因子连接，此处$V_m \cup i \cup j$是由节点$i$、节点$j$

和$V_m$中的各节点之并；$q_m$是$H^m_{ij}$中的有向回路数，$\mu(V_m)$表示$V_m$中的节点数；和式是对$G_c[V_m \cup i \cup j]$中所有可能的$H^m_{ij}$求取，当$i=j$时，$G_c[V_m \cup i \cup j]$简化为$G_c[V_m \cup i]$，同时从节点$i$到节点$j$的1-因子连接变成由定义所给的$G_c[V_m \cup i]$的1-因子。

**推论1.** 一个行列式与其一个余子式之比、以及两个余子式之比，对所有的在$V-V_m$中的$i$与$j$来说，无论在$G_c(\boldsymbol{A})$或者$G_{cr}$中均不变。

对于信号流图可得到类似的结果。

**定理10** 假设$V$是信号流图$G_m(\boldsymbol{A})$的节点集合，$V_m$是$V$的一个真子集，使得$\det G_m[V_m] \neq 0$；那么$\det G_m(\boldsymbol{A}) = K_m \det G_{mr}$，$K_m = \det G_m[V_m]$，此处$G_{mr}$是从$G_m(\boldsymbol{A})$利用下列过程所得到的信号流图：

(i) 从$G_m$移去$G_m[V_m]$。

(ii) 在$G_{mr}$中与边$(i,j)$相对应的权$b_{ij}$由下式给出：

$$b_{ij} = \frac{1}{K_m} \sum_k f(P^k_{ij}) \Delta_k \text{，所有}i\text{与}j\text{在}V-V_m\text{中，}$$

此处$P^k_{ij}$是在$G_m[V_m \cup i \cup j]$中从节点$i$到节点$j$的第$k$条有向通路；$\Delta_k$是不接触$P^k_{ij}$的那部分图的$\det G_m[V_m \cup i \cup j]$，即

$$\Delta_k = 1 + \sum_{s,v} (-1)^{L_m} f(M^k_{sv}),$$

此处$M^k_{sv}$是$v$个互不相接的有向回路的第$s$种可能的组合，它也与$G_m[V_m \cup i \cup j]$中的$P^k_{ij}$不接触，$L_m$是$M^k_{sv}$中的有向回路数；和式是对$G_m[V_m \cup i \cup j]$中所有可能的$k$，$s$与$v$求取。

**推论2** 一个行列式与其一个余子式之比，以及两个余子式之比（所有$i,j$在$V-V_m$中），无论在$G_m(\boldsymbol{A})$中或在$G_{mr}$中都是不变的。

**7.矩阵的特征方程**

给定一个$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$，其特征方程的系数与$G_c(\boldsymbol{A})$的有向回路集合之间的关系由Milić[25]，[26]作过研究，并由Ponstein[27]重新发现。但是Ponstein也研究了$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的余子式，在本节中我们将总结他们的工作，并将其写成更为方便的形式。因为这些结果可以利用类似于定理2中的方法加以证明，只不过所加自环的权为$-\lambda$，而不是$-1$，所以在下面仅叙述这些结果而未加证明。

**定理11**

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \lambda^n + \sum^n \lambda^{n-k} \sum_{G_k} \sum_u (-1)^{L^k_u} f(h^k_u)$$

以及

$$(-1)^{i+j} \det\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{ij} = \sum_{k=2}^{n} \lambda^{n-k} \sum_{G^{ij}_k} \sum_t (-1)^{L^{kt}_{ij}} f(H^{kt}_{ij}) \quad i \neq j,$$

此处$h^k_u$和$H^{kt}_{ij}$分别是在$G_k$和$G^{ij}_k$中第$u$个1-因子以及从节点$i$到节点$j$的第$t$个1-因子连接；$L^k_u$和$L^{kt}_{ij}$分别是在$h^k_u$及$H^{kt}_{ij}$中的有向回路数；$G_k$是$G_c(\boldsymbol{A})$的$k$节点的局部图；$G^{ij}_k$是$G_c(\boldsymbol{A})$的一个局部图，使节点$i$和$j$总包含在$G^{ij}_k$内；和式是对$G_c(\boldsymbol{A})$中所有可能的局部图$G_k$及$G^{ij}_k$以及指数$u$和$t$求取，$G_c(\boldsymbol{A})$是给定的$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的对应流图。

显然，如果$\boldsymbol{A}$是与一个与给定的$n$个节点有向图相对应的变量邻接矩阵，则定理2还可利用。差别只不过在于$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{ij}$项应该用$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{ji}$来代替。

**8.示例**

图1（a）是一个晶体管放大器，（b）是其等效电路。该系统的节点方程给出如下：

$$\begin{bmatrix} G_b+g_b & -g_b & -G_b \\ -g_b & g_b+g_e+g_c-\alpha g_e & -g_c \\ -G_b & -g_c+\alpha g_e & G_b+g_c+G_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

式中$V_1$，$V_2$和$V_3$是节点电压。与矩阵$\boldsymbol{A}$相对应的流图$G_c(\boldsymbol{A})$示于图2，此处$\boldsymbol{A}$是系统的系数矩阵。由定理7，从节点1到节点3的1-因子集合$X$与1-因子连接的集合$X_{13}$由下式给出：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}=&\{(e_{11},\ e_{12},\ e_{13})(e_{21},\ e_{22},\ e_{23})(e_{31},\ e_{32},\ e_{33})\} \\ &\cap\{(e_{11},\ e_{21},e_{31})(e_{12},e_{22},e_{32})(e_{13},e_{23},e_{33})\} \\ =&\{e_{13}e_{22}e_{31},e_{13}e_{21}e_{32},e_{12}e_{23}e_{31},e_{12}e_{21}e_{33},\ e_{11}e_{23}e_{32},e_{11}e_{22}e_{33}\} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_{13}=&\{(e_{11},e_{12},e_{13})(e_{21},e_{22},e_{23})\}\cap\{(e_{12},e_{22},e_{32})(e_{13},e_{23},e_{33})\} \\ =&\{e_{12}e_{23},e_{13}e_{22}\} \end{aligned}$$

电流增益$g=I_3/I_1$如下地得到：

$$g=G_c(-1)^{1+3}\det\boldsymbol{A}_{13}/\det\boldsymbol{A}=\frac{-G_c\sum\limits_{x'\text{在}X_{13}\text{中}}(-1)^{L_0}f(x')}{\sum\limits_{x\text{在}X\text{中}}(-1)^{L_p}f(x)},$$

此处$L_0$和$L_p$分别为$x'$及$x$中的有向回路数。

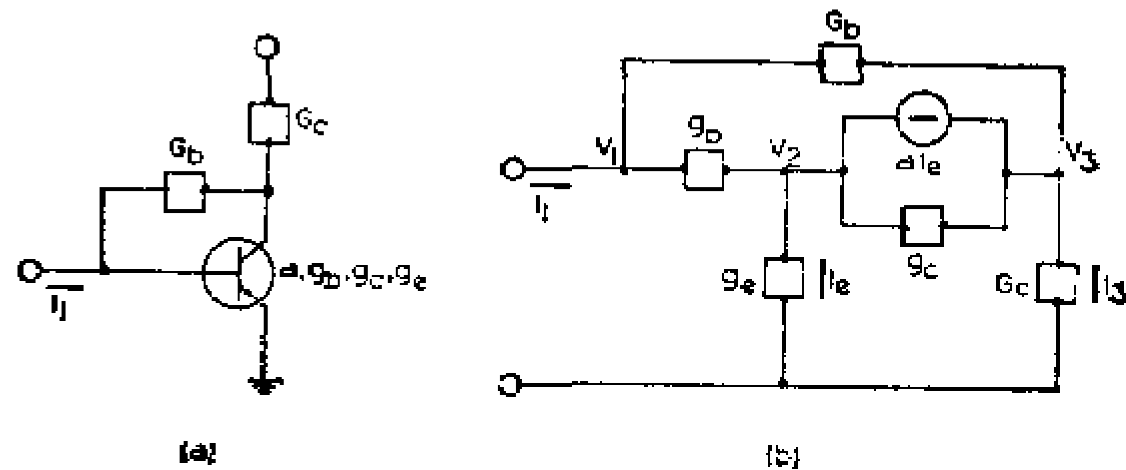



图1.（a）晶体管放大器 （b）等效电路

$G_c(\boldsymbol{A})$的改进流图$G_c'(\boldsymbol{A})$示于图3。由定理8在$G_c'(\boldsymbol{A})$中形如$R_3^1$的半因子集合Y和1-因子集合Z如下地得到：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}=&\{(e_{21},e_{31})*(e_{12},e_{22},e_{32})*(e_{13},e_{23},e_{33})\} \\ =&\{e_{21}e_{32}e_{33},e_{21}e_{32}e_{13},e_{21}e_{22}e_{33},\ e_{21}e_{22}e_{23},\ e_{21}e_{22}e_{13}, \\ &e_{31}e_{32}e_{33},\ e_{31}e_{22}e_{33},\ e_{31}e_{22}e_{23},\ e_{31}e_{12}e_{33},\ e_{31}e_{12}e_{23}\}, \\ \mathbf{Y}=&\{e_{21}e_{32}e_{33},\ e_{21}e_{22}e_{33},\ e_{21}e_{12}e_{33},\ e_{21}e_{22}e_{13}, \\ &e_{31}e_{32}e_{33},\ e_{31}e_{12}e_{33},\ e_{31}e_{22}e_{23},\ e_{31}e_{12}e_{33}\}, \\ \boldsymbol{T}=&\{(e_{12},\ e_{22},\ e_{32})*(e_{13},\ e_{23},\ e_{33})\} \\ =&\{e_{12}e_{13},\ e_{12}e_{23},\ e_{12}e_{33},\ e_{22}e_{13},\ e_{22}e_{23},\ e_{22}e_{33},\ e_{32}e_{13},\ e_{32}e_{33}\}, \\ \mathbf{Z}=&\{e_{12}e_{33},\ e_{12}e_{23},\ e_{22}e_{13},\ e_{32}e_{13}\} \end{aligned}$$

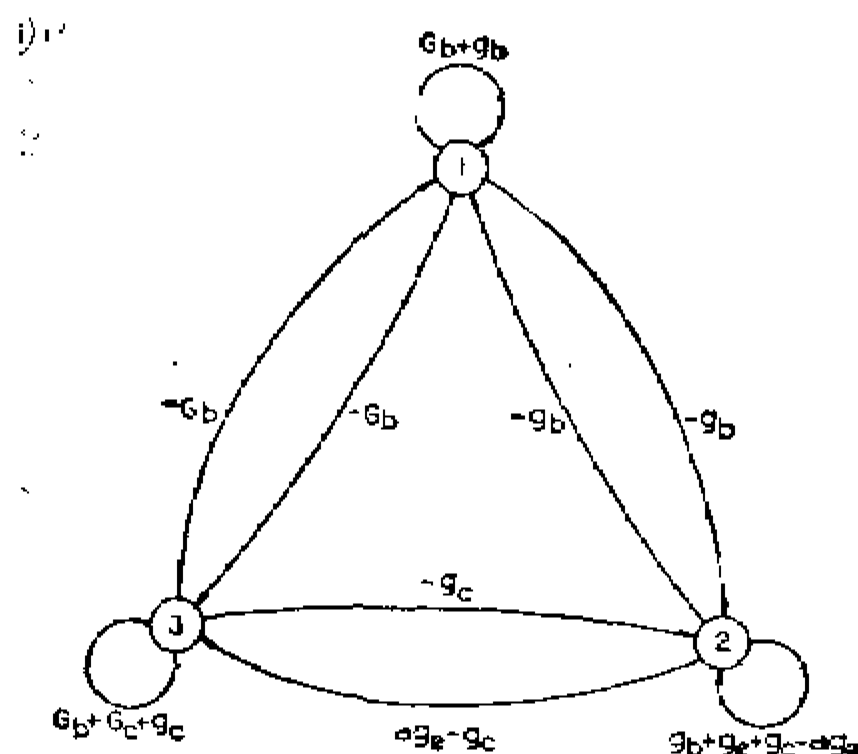



图2 对应的流图$G_s(A)$

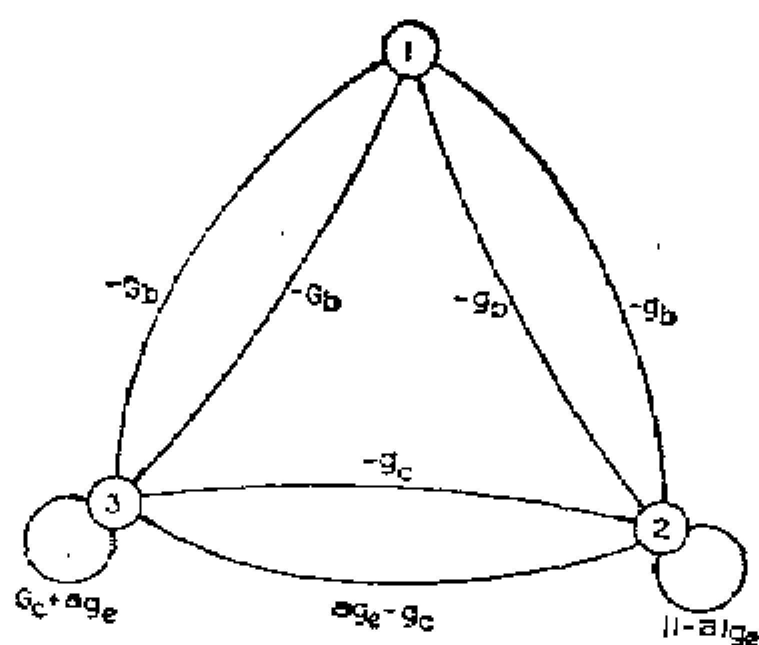



图3 图2中$G_s(A)$的改进流图$G_s'(A)$

因此，晶体管的增益如下：

$$g = \frac{-G_c \sum\limits_{z\text{在}Z\text{中}} (-1)^{q_z} f(z)}{\sum\limits_{y\text{在}Y\text{中}} (-1)^{q} f(y)},$$

此处$q_z$和$q$分别是$z$和$y$中的偶连通片的数目。当然这一增益与用流图法得到的增益是一致的。注意，在这种情况下相消项的数目则大大减小了。

## 结 论

在本文中已讨论了一个行列式与其对应有向图之间的关系，以及总结了应用于一个矩阵的特征方程的计算问题。介绍了适用于数字计算机产生1-因子、1-因子连接、半因子以及$k$-半因子的方法。一般说来，这些方法容易记忆且计算简单。这些方法的优点在于这一事实，即一旦一个所希望的集合以及给定的有向图导出（它可用观察法容易地确定），剩下的运算则全部是代数运算，它无需再返回到原先给定的有向图，以看出是否有一个生成项形成了所希望的子图。

线性代数方程的有向图解提出了另一种观点，它是较熟悉的经典法的补充和提高。因为这种方法在研究中不仅非常直观地显示了矩阵的各元素之间的关系，而且还对用矩阵来描述该系统的特性提供了一种透彻的理解。它已经广泛地用作一种工程问题的分析工具。虽然本文不打算就本课题的各个发展阶段作更为详细的概要介绍，但这里所介绍的方法统一了现有的全部结果。对于更广泛的论述，应查阅该领域的各种论文与著作。

## 参 考 文 献


〔1〕D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann., 77 (1916), pp. 453-465.

〔2〕R. D. Luce and A. D. Perry, *A method of matrix analysis of group structure*, Psycho-

metrika, 14 (1949), pp. 95-116.

[3] I. C. Ross and F. Harary, *On the determination of redundancies in sociometric chains*, Ibid., 17 (1952), pp. 195-208.

[4] M. Kac and J. C. Ward, *A combinatorial solution of the 2-dimensional Ising model*, Phys. Rev., 88 (1952), pp. 1332-1337.

[5] F. Hohn and L. Schissler, *Boolean matrices and the design of combinational relay switching circuits*, Bell System Tech. J., 34 (1955), pp. 177-202.

[6] L. Collatz and U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957), pp. 63-77.

[7] D. Rosenblatt, *On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean matrices and stochastic matrices*, Naval Res. Logist. Quart., 4 (1957), pp. 151-167.

[8] I. M. Copi, *Matrix development of the calculus of relations*, J. Symbolic Logic, 13(1958), pp. 193-203.

[9] I. C. Ross and F. Harary, *A description of strengthening and weakening members of a group*, Sociometry, 22(1959), pp. 139-147.

[10] F. Harary, *A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues*, J. Math. and Phys., 38(1959), pp. 104-111.

[11] ——, *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, this Review, 4 (1962), pp. 202-210.

[12] W. K. Chen, *The inversion of matrices by flow graphs*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12 (1964), pp. 676-685.

[13] ——, *On signal-flow graphs*, Proc. IEEE, 52 (1964), p. 967.

[14] ——, *Flow graphs: some properties and methods of simplification*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-12 (1965), pp. 128-130.

[15] S. J. Mason, *Feedback theory—some properties of signal flow graphs*, Proc. IRE, 41(1953), pp. 1144-1156.

[16] ——, *Feedback theory—further properties of signal flow graphs*, Ibid., 44 (1956), pp. 920-926.

[17] C. L. Coates, *Flow graph solutions of linear algebraic equations*, IRE Trans. Circuit Theory, CT-6 (1959), pp. 170-187.

[18] F. E. Hohn, S. Seshu and D. D. Aufenkamp, *The theory of nets*, IRE Trans. Electronic Computers, EC-6 (1957), pp. 154-161.

[19] W. K. Chen, *Boolean matrices and switching nets*, Math. Mag., 39 (1966), pp. 1-8.

[20] C. A. Desoer, *The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates' formula*, Proc. IRE, 48 (1960), pp. 883-889.

[21] J. G. Truxal, *Control System Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[22] D. Younger, *A simple derivation of Mason's formula*, Proc. IRE, 51 (1963), pp. 1043-1044.

[23] W. K. Chen, *On the modifications of flow graphs*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 13 (1965), pp. 493-505.

[24] ——, *On directed trees and directed k-trees of a digraph and their generation*, Ibid., 14 (1966), pp. 550-560.

[25] M. M. Milić, *Flow-graph evaluation of the characteristic polynomial of a matrix*, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-11 (1964), pp. 423-424.

[26] W. K. Chen, *Comment on "flow-graph evaluation of the characteristic polynomial of a matrix,"* Ibid., CT-12 (1965), pp. 434-435.

[27] J. Ponstein, *Self-avoiding paths and the adjacency matrix of a graph*, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), pp. 600-609.

[28] W. K. Chen, *Generation of trees*, Proc. Third Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, Urbana, 1965, pp. 889-899.

[29] F. Haray, *Graphs and matrices*, this Review, 9 (1967), pp. 83-90.

[30] W. K. Chen, *On flow graph solutions of linear algebraic equations*, SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), pp. 136-142.

〔31〕 F. HARAR; *A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning*; Numer. Math.; 4 (1962), pp. 128-135.
〔32〕 R. L. NORMAN; *A matrix method for location of cycles of a directed graph*; A. I. Ch. E.J.; 11 (1965), pp. 450-452.

# 十四、关于线性系统拓扑分析的统一理论

摘　　要

基尔霍夫用网孔方程，麦克斯韦用节点方程，Mason用信号流图以及Coates用流图都叙述过拓扑公式，在本文中指出这些关系可以相互地导出。利用这些关系，得到了网络理论中普遍化的星-网孔变换。还给出了从一个已知的网络画出其伴随有向图的简单方法与说明性的例子。

符号表

$G$＝有向图

$G_u$＝$G$的伴随无向图

$G_m$＝Mason图或信号流图

$G_c$＝Coates图或流图

$t_n$＝相对于参考点$n$的有向树

$t_{n,i}$＝相对于参考点$n$和$i$的有向2-树

$\rho(i)$＝从节点$i$射出的边数

$\mu(A)$＝在有限集合$A$中的元素数目

$G(A)$＝由节点集合$A$所定义的局部图

$N$＝给定网络

$f$＝映射函数

**1.引言**

在1847年首先由基尔霍夫〔1〕用网孔方程叙述过拓扑公式，在1892年由麦克斯韦〔2〕曾给出了适用于节点方程的基本公式，从那时以来，有关这些拓扑公式已出现了许多论文；或者是推广这些公式，或者是给出这些公式的新证明〔3—13〕。推广和应用于电网络问题进行拓扑分析的理由不仅仅在于它用非常直观的方法显示出所研究系统的各个变量间的因果关系，而且还在计算行列式及其余子式中提供了一条捷径，因为通常在网络行列式的计算中固有的相消项是可以避免的。对拓扑分析概念的复苏，一般说来从工程师们的角度，尤其是从电路理论工作者的角度来讲，主要地是出于这一事实。

把一个拓扑结构与一组线性代数方程相联系是由Mason〔14，15〕提出的，并称之为信号流图。Coates〔16〕对于相同的关系发明了一种不同的线图，并称之为流图，同时给出了某些拓扑公式的严格而系统化的推导，后来，Desoer〔17〕仅仅利用了几个行列式的性质，发现了一种推导Coates公式的简单方法。此后为了进一步发展这些图的拓扑性质出现了许多论文〔18～42〕。

本文的主要目的是指出基尔霍夫规则，麦克斯韦规则，Mason公式和Coates公式可以相互

地导出。这一点是合乎逻辑的，因为这些规则和公式都必须解线性代数方程。这些规则之间的内在关系和这些公式使人们能从一种简化方法而变换到另一种简化方法。事实上，在网络理论中推广的星-网孔变换就是采用这些方法得到的。

**2.预备知识和定义**

一个有向(线)图$G$是由集合$V$和集合$E$所组成，$V$的元素称为节点，而$E$的元素是形如$(i, j)$的有向节偶，此处$i$和$j$在$V$中，且把$(i, j)$称为图的（有向）边。一个加权有向图是一个有向图，其中每一条边赋以一个权。为了更紧凑地描述加权有向图起见，采用三元组$G(V, E, f)$的表示法（或简写成$G$），此处$V$是节点的集合，$E$是边的集合，$f$是一个在$E$域和$V$域中的映射函数，其值域是复数，使得$f\{(i, j)\}$表示与该有向图之边$(i, j)$相对应的权。孤立节点的映射定义为1。将映射函数$f$从一条边或一个节点推广到$G(V, E, f)$的任意子图$R$上是方便的，使$f(R)$表示$R$的各个相对应的边之乘积。一个有限的、带标记的有向图是一个有限有向图，其中每个节点用1到$m$的整数标记，此处$m$是有向图的节点数。贯穿于本文的始终，所用的有向图是指有向的、加了权的、带标记的有向图。一个有向图$G(V, E, f)$的抽象定义具有简单的几何意义：各节点用小圆圈表示，它们中的任意两个节点$i$和$j$，若$(i, j)$在$E$中，则用一条带箭头的连续曲线表示，或者从$i$到$j$用一条直线相连接。几何概念可考虑得一般些，因为每条曲线可以有多样性，但本文的讨论不研究这种情况。这里所得的结论很容易推广，并这种推广几乎是很简单的。

如果$A$是$V$的一个子集，用$A$定义$G$的一个局部图，它是$G$的一个子图，记作$G(A)$，其节点的集合是$A$，其边是$G$中连接所有$A$中两个节点的边。两个子图当它们没有公共节点时称为互不相交的。一个有向回路，若其包含的边数为$m$，则它的长度为$m$。长度为1的有向回路称为自环。$G$的一个连通片是$G$的最大连通子图。偶连通片是一个含有偶数条边的连通片。对于每一个有向图$G$，有一个对应的伴随无向图$G_u$，它的节点就是$G$中的节点，它的边是将$G$中不考虑方向地将并列边合并而得。注意，对$G_u$来说其映射函数是不确定的。

如果$S$是$G$的一个子图，且$G$的每一个节点是$S$中的一个节点，那么$S$是$G$的一个生成子图。对$G$的子图$S$中的任一节点来说，符号$\rho(i)$用来表示$S$中从节点$i$射出的边数。一个记作$t_n$的为$G$之子图，当且仅当(a)$t_n$的伴随无向图形成$G_u$的一个树；(b)在$V$中所有的$i \neq n$时，$\rho(i)=1$和$\rho(n)=0$，此处$n$为$G$之参考点，则称$t_n$为一个有向树。一个记作$t_{n,i}$的$G$之子图，当且仅当(i)$t_{n,i}$的伴随无向图是$G_u$中的一个2-树，(ii)$t_{n,i}$的两个连通片中的每一个是$G$的某个局部图的有向树时，则称为有向2-树。节点$n$是两个连通片之一中的一个参考点，节点$i$是另一个连通片之参考点，经常地采用那种有向2-树，其中某些被标识的节点需出现在不同的连通片之中。例如$t_{na,jbc}$是一个有向2-树的符号，其中节点$n$和$a$在一个连通片之中，而节点$j$、$b$与$c$在另一个连通片之中。$n$和$j$(第一个下标)是各连通片的参考点。类似地，$t_{na,jbc}$也用来表示一个2-树，节点$n$和$a$在一个连通片之中，节点$j$、$b$和$c$在另一个连通片之中。注意对于一个2-树来说，下标的次序是无关紧要的。

一个网络的几何性质与支路的结构无关，所以在拓扑讨论中，通常用一条线段来代替每一条网络支路。换句话说，从抽象的观点来看，任何网络可用有向图来表示，它的边至少在某种程度上表示了网络元件且用权来表示元件的构成。

把一个有向图与一组线性代数方程联系起来是由Mason提出的〔14, 15〕，并称为信号流图。Coates〔16〕对相同的联系发明了一种不同的图，并称为流图。为方便起见，信号流图用$G_m(V_m, E_m, f_m)$（或简写为$G_m$）来表示，并称为 Mason 图，它与流图有所区别，流图则用

$G_c(V_c,\ E_c,\ f_c)$来表示，并称为Coates图。

三种集合论的二元运算，"并"、"交"及"差"分别用"$\cup$"、"$\cap$"及"—"来表示。它们用在两种不同的范畴。如果$H_1$和$H_2$是一个有向图的两个子图，$H_1\cup H_2$表示一个和图，即该子图是由或者在$H_1$中、或者在$H_2$中、或者在二者之中的元素所构成，如果$H_1$和$H_2$是两个集合，那么$H_1\cup H_2$表示并集。这些对于"$\cap$"和"—"来说也是类似地成立的，对于一个有限集合$A$，其元素的数目用$\mu(A)$表示。

在本文中所采用的一些在此未特别说明的术语，它们可在Seshu与Reed[59]和Desoer[17]的文献中查到。

Mason图和Coates图之间的固有关系，基尔霍夫规则和麦克斯韦规则之间的固有关系都是众所周知的[59]，无需作更进一步的说明。下面将给出Coates图拓扑和网络拓扑（麦克斯韦规则）之间的简单关系。

**3.网络拓扑和Coates图拓扑**

对于一个无互感的无源网络的网络函数的拓扑公式绝不是新的。1847年基尔霍夫[1]用网孔方程叙述了这一基本公式，1892年麦克斯韦[2]用节点方程给出了基本公式。因为基尔霍夫公式与麦克斯韦公式是完全对偶的，为方便起见，这里仅论述麦克斯韦公式和Coates公式之间的关系。

把麦克斯韦拓扑规则推广到含互感的有源网络，许多作者作过研究[26，43—51]。但是，所涉及到的一些特点可能是不希望的；例如，它们可能有过多的规则[43，46—49]，或者需要求得每一项的符号[44，45]。最近，利用Chen[26]提出的有向树和有向2-树的方法改进了求一般网络行列式和它的余子式的计算。同样，根据该文还得到了下列有意义的结果。

令$\boldsymbol{Y}_N$是一个给定网络$N$的$n-1$阶节点导纳矩阵，此处$\boldsymbol{Y}_N$形为：

$$\boldsymbol{Y}_N=\begin{bmatrix} \sum\limits_{x=1}^{n-1} y_{1x} & -y_{12} & -y_{13} & \cdots & -y_{1(n-1)} \\ -y_{21} & \sum\limits_{x=1}^{n-1} y_{2x} & -y_{23} & \cdots & -y_{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ -y_{(n-1)1} & -y_{(n-1)2} & -y_{(n-1)3} & \cdots & \sum\limits_{x=1}^{n-1} y_{(n-1)x} \end{bmatrix}$$

把一个有向图$G(V,\ E,\ f)$与$\boldsymbol{Y}_N$相对应的过程如下：

(a) $\mu(V)=n$。将$n$个节点之中的$n-1$个节点，每一个节点用1到$n-1$的整数来标记，节点$n$称为参考点，使得标为$k$的节点与$\boldsymbol{Y}_N$的第$k$行（或第$k$列）相对应。

(b) 如果$y_{ij}\neq 0$，$i\neq j$，则在$E$中有一条有向边$(i,\ j)$，使得$f\{(i,\ j)\}=y_{ij}$。

(c) 如果$y_{ij}\neq 0$，$i=j$，则在$E$中有一条有向边$(i,\ n)$，使得$f\{(i,\ n)\}=y_{ii}$。

相反地，如果$G(V,\ E,\ f)$是给定的，可以得到上述类型的节点导纳矩阵。*

应该注意，如果$y_{ii}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$没有直接给出的话，它们是很容易求出的。例如$y_{ii}$是$\boldsymbol{Y}_N$的第$i$行的各元素之和。在许多情况下，$G$可直接从给定的电网络图画出，而不必首先写出$\boldsymbol{Y}_N$。

* 注意，在$G$中若存在$(n,\ k)$的边，则在得到相应的节点导纳矩阵$\boldsymbol{Y}_N$中它可以略去。

如果$G_c(V_c, E_c, f_c)$是一个$\mathbf{Y}_N$的对应Coates图，它可以用稍为不同的形式如下地画出：

(i) $\mu(V_c)=n-1$。每一行表示一个节点，且用1到$(n-1)$的一个整数标记，使得标有$k$的节点与第$k$行相对应。

(ii) 如果$y_{ji}\neq 0$，$i\neq j$，则有一条有向边$(i, j)$，在$E_c$的节点$j$处还有一个自环（用$(j, j)_i$表示），使得

$$f_c\{(i, j)\}=-y_{ji}, \text{ 和} f_c\{(j, j)_i\}=y_{ji},$$

$i$和$j=1, 2, \cdots, n-1$与$i\neq j$。

(iii) 如果$y_{ii}\neq 0$，在节点$i$处有一个自环$(i, i)_i$，使得

$$f_c\{(i, i)_i\}=y_{ii}.$$

$i=1, 2, \cdots, n-1$。

### 3.1 有向树和连接

众所周知，节点行列式$\det \mathbf{Y}_N$可用Coates公式[16, 17, 22, 23]来计算，即

$$\det \mathbf{Y}_N=\Sigma(-1)^q f_c(h)$$

此处$h$是$G_c$中的一个连接；$q$是$h$中偶连通片的数目；和式是对$G_c$中全部$h$求取。

一个$G_c$的连接，当且仅当它仅仅包含有自环形如

$$(i_1, i_1)_{k1}(i_2, i_2)_{k2}\cdots(i_j, i_j)_{kj}$$

使得它存在一个$k$的子下标$k_{t_1}\ k_{t_2}\cdots\ k_{t_m}$的集合$(m\geqslant 2)$与一个对应的$i$的子下标$i_{t_1}\ i_{t_2}\cdots\ i_{t_m}$的集合，并满足$i_{t_{u+1}}=k_{t_u}$，$u=1, 2, \cdots, m-1$以及$i_{t_1}=k_{t_m}$，此处$j$与$m$是适当的整数，则称该连接为循环(Cyclic)连接。

令$B_1$是$G_c$中所有连接的集合，令$B_2$是$B_1$中的一个子集，且使得$B_2$中的每一个$h_2$，它或者是一个循环连接，或者用另一种说法是至少含有一个（长度$\geqslant 2$的）有向回路。再令$T_n$是$G$中全部有向树$t_n$的集合。正如参考文献[26]的定理1所证明的那样，得到一个类似的论断，现在可叙述为下列定理。

**定理1.** $\Sigma(-1)^q f_c(h_2)=0$

此处$h_2$是$B_2$中的一个元素；$q_2$是$h_2$中的偶连通片的数目。和式是对$B_2$中的全部$h_2$求取。此外，在$B_3$中的元素$h_3$和$T_n$中的元素$t_n$存在着一一对应的关系，使得如果$h_3$和$t_n$是相应元素的话，

$$f_c(h_3)=f(t_n)$$

此处 $B_3=B_1-B_2$

定理1的直接结果如下，它是由Chen给出的。

**定理2.** $\det \mathbf{Y}_N=\Sigma f_c(h_3)=\Sigma f(t_n)$

此处第一个和式是对$B_3$中所有的$h_3$求取，而第二个和式是对$G$中所有的有向树$t_n$求取。

为方便起见，一个无互感的无源网络$N$可用$N$ $(V_N, E_N, f_N)$ 来表示（或简写为$N$），此处$V_N$表示N的各节点；$E_N$表示$N$的各支路；$f_N$是$E_N$的非空子集$R$的一个映射函数，$f_N(R)$表示$R$的各支路导纳乘积。

**推论1.** $\det \mathbf{Y}_N=\Sigma f_c(h_3)=\Sigma f_N(t)$

此处$t$是N中的一个树；第一个和式是对$B_3$中的全部$h_3$求取的；而第二个和式是对N中的所有树$t$求取。

推论1是众所周知的树支导纳乘积之和，并且首先是由麦克斯韦所给出的[2]。换句话说，麦克斯韦规则实际上与Coates公式（因此也与Mason公式）相同，只不过前者是后者未抵消连

接而已。因此就电网络的行列式而论，麦克斯韦规则可以看成是最佳公式，因为在网络行列式的计算中避免了通常固有的相消项。注意对这种特殊情况，假若$E$中的$(i, j)$和$(j, i)$用一条$E_N$中的无向边$(i, j)$来替代的话，即$G(V, E, f)$简化为$N(V_N, E_N, f_N)$。

如果$N$是一个有源网络并且包含有互感的情况，定理2可以看成是麦克斯韦规则逻辑的推广，因为它仅仅是对应Coates图中未相消连接的情况。显然这里所介绍的推广比许多现有的文献[43—49]要更加合乎逻辑。

### 3.2 有向2-树和单连接

刚才已经建立了有向树和无相消的连接之间的密切关系。下一个问题是要建立有向2-树和单连接之间的关系。人们可以预料$G$中的有向2-树和$G_c$中的未相消的单连接之间存在着一一对应的关系。正如下面所指出，情况确实如此。

令$h_{ij}=P_{ij}\cup h^*$是在$G_c$中从节点$i$到节点$j$的一个单连接，此处$P_{ij}$是$h_{ij}$中唯一的有向通路，$h^*$是一个包含了$h_{ij}$（而不含有$p_{ij}$中的元素）的元素的子图，如果$h^*$在$G_c^{p_{ij}}$中是一个循环连接，则称$h_{ij}$为一个循环连接子图，此处$G_c^{p_{ij}}$是一个从$G_c$移去与$P_{ij}$相关联的射出边，且移去所有的孤立节点而得到的图。

令$C_1$是$G_c(V_c, E_c, f_c)$中所有形如$h_{ij}$的单连接集合，$C_2$是$C_1$的子集，使得$C_2$之中的每一个$h_{ij}^2$，或者是一个循环单连接，或者为至少包含有一个长度不小于2的有向回路。又令$T_{ij,n}$是$G(V, E, f)$中形如$t_{ij,n}$的所有有向2-树的集合。于是将证明下列定理。

**定理3.**

$$\sum(-1)^{q_2}f_c(h_{ij}^2)=0$$

此处$h_{ij}^2$是$C_2$中的一个元素；$q_2$是$h_{ij}^2$中偶连通片的数目，和式是对$C_2$中所有的$h_{ij}^2$求取。此外，在$C_3$中的元素$h_{ij}^3$和$T_{ij,n}$中的元素$t_{ij,n}$之间存在着一一对应的关系，使得如果$h_{ij}^3$和$t_{ij,n}$是相应元素的话，

$$(-1)^{q_3-1}f_c(h_{ij}^3)=f(t_{ij,n})$$

此处$C_3=C_1-C_2$，$q_3$是$h_{ij}^3$中偶连通片的数目。

证明：

对于$G_c$中的一个给定的有向通路$P_{ij}$来说，令$B_{p_{ij}}$是$G_c^{p_{ij}}$中所有连接的集合，使得对于$B_{p_{ij}}$中的每一个$h^*$来说，$h^*$或者是一个循环连接，或者说成是至少包含一个长度不小于2的有向回路，此处$G_c^{p_{ij}}$采用如前面相同的方法来定义。按照证明定理1的类似论断，人们得到：

$$\sum(-1)^{q^*}f_c(h^*)=0$$

此处$q^*$是$h^*$中的偶连通片的数目，和式是对$B_{p_{ij}}$中所有的$h^*$求取。这一方程还可以表示成稍为不同的形式：

$$f_c(p_{ij})\sum(-1)^{q^*}f_c(h^*)=0,$$

或
$$\sum(-1)^{q^*}f_c(h_{ij})=0$$

此处$h_{ij}=P_{ij}\cup h^*$。因为这对于任意$P_{ij}$均成立，所以该定理的第一部分立即得到。这就完成了定理第一部分的证明。

如果人们把$E_c$中的每一条边$(i,j)_i$与$E$中的$(j,i)$边相对应$(i\neq j)$，再把$E_c$中的$(j,j)_i$和$E$中的边$(j,n)$相对应$(i=j)$，并且注意到$(-1)^{q-1}=(-1)^m$，此处$m$是$P_{ij}$中的边数，因

此就得到了定理的第二部分。定理证毕。

定理 3 的直接结果如下。

**定理4.** 一个带互感的有源网络的节点行列式 $det\ \mathbf{Y}_N$ 的第 $ii$ 个余子式 $\Delta_{ij}$ 由下式给出：

$$\Delta_{ij}=\sum(-1)^{q_s-1}f_c(h_{ij}^3)=\sum f(t_{ij,n})$$

此处第一个和式是对 $C_8$ 中所有的 $h_{ij}^3$ 求取，而第二个和式是对 $G$ 中所有的有向2-树 $t_{ij,n}$ 求取，$q_s$ 是 $h_{ij}^3$ 中的偶连通片数。

**推论2.** 在一个无互感的无源网络 $N(V_N,\ E_N,\ f_N)$ 中，

$$\Delta_{ij}=\sum(-1)^{q_s-1}f_c(h_{ij}^3)=\sum f_N(t_{ij,n})$$

此处 $t_{ij,n}$ 是 $N$ 中的一个2-树；第一个和式是对 $C_s$ 中所有的 $h_{ij}^3$ 求取；第二个和式是对 $N$ 中所有的2-树 $t_{ij,n}$ 求取。

**推论2**是众所周知的2-树导纳乘积之和，且已由Mayed和Seshu〔58〕所说明。再次地对于余子式来说，利用2-树的拓朴规则实际上与利用单连接的Coates公式相同（在Mason 公式中也相对应）。只不过是把前者仅仅看成是后者无相消的单连接的情况。因此，就计算网络的行列式而论，网络拓扑公式可以认为是最佳的公式。类似地，如果 $N$ 是一个有源网络且包含有互感的话，定理4可以看成是众所周知的2-树导纳乘积的逻辑推广。因为再次地它仅仅考虑了在对应Coates 图中无相消单连接的情况。这种方法的推广也比现有的许多论文的方法〔43-49〕要更为合理。

**4、一般化的星-网孔变换**

在有向树与无相消的连接之间和有向2-树与无相消的单连接之间的完全相似性，使人们坚信可以从一种方法变换到另一种方法。正如本节将指出，情况确是如此。

分析Coates 图中的基本问题是确定连接和单连接的问题。为了实现这一点，Coates 指出如何从一个给定的Coates图利用其减少一个节点而得到一个等效的Coates 图。这种运算是重复的，直到移去必须的节点数为止。最近Chen〔23〕给出了一种推广的Coates图的运算形式，它可看成是多节点的移去过程。因此我们希望找到在电网络中相应的运算，如果可以这样做的话，众所周知的星-网孔变换〔52-54〕便成为这种一般情况的特例。

为完整性起见，Chen〔23〕的多节点移去过程给出如下，以便进行比较。

**定理5.** 令 $G_c(V_c,\ E_c,\ f_c)$ 是一个给定的Coates图，且令 $V_{cp}$ 是 $V_c$ 的任意一个使 $K_c\neq 0$ 的真子集，此处 $K_c$ 是与局部图 $G_c(V_{cp})$ 相对应的矩阵的行列式，则

$$det\ \mathbf{Y}_N=\sum(-1)^q f_c(h)=K_c\sum(-1)^{q_r}f_c^r(h^r),$$

此处 $h^r$ 和 $h$ 分别是 $G_c^r$ 和 $G_c$ 中的连接；$q_r$ 和 $q$ 分别是在 $h^r$ 和 $h$ 中的偶连通片的数目；和式是分别对 $G_c^r$ 中所有的 $h^r$ 以及 $G_c$ 中所有的 $h$ 求取；$G_c^r(V_c^r,\ E_c^r,\ f_c^r)$（或简写为 $G_c^r$）是从 $G_c$ 经下列过程而得到的简化Coates图。

(*a*) 从 $G_c$ 中移去 $G_c(V_{cp})$，即移去 $V_{cp}$ 中的所有节点以及与 $V_p$ 的任意一个节点相关联的射入边与射出边，原来不在 $G_c$ 中的边作为具有零映射的边来考虑。

(*b*) 对于在 $(V_c-V_{cp})$ 中所有的 $i$ 与 $j$，$f_c^r\{(i,\ j)\}=\frac{1}{K_c}\sum(-1)^{q'}f(h'_{ij})$，此处 $h'_{ij}$ 为 $G_c[V_{cp}\cup i\cup j]$ 中从节点 $i$ 到节点 $j$ 的单连接。$q'$ 是在 $h'_{ij}$ 中的偶连通片的数目；和式是对 $G_c[V_{cp}\cup i\cup j]$ 中的所有 $h'_{ij}$ 求取。在 $i=j$ 时，$h'_{ij}$ 根据定义它简化为 $G_c[V_{cp}\cup i\cup j]$ 中的一个连接。

这条定理照字面看来似乎是相当复杂，但是其拓朴结构却是非常简单的。为了理解它的

简单性，人们只需要求出其每一项对应的图即可。对于$G(V,E,f)$来说，下列定理与定理5是对偶的。

如果$V_p$是$V$的一个真子集，为方便起见，$G^*[V_p]$是用来表示从$G$将所有的$V-V_p$的节点连成一点而得到的有向图。组合节点用$p$来表示*。利用这些定义，现在可以来叙述下列定理：

**定理6.** 令$G(V,E,f)$是矩阵$\mathbf{Y}_N$的伴随有向图，此处$\mathbf{Y}_N$是一给定的带互感有源网络的$n-1$阶节点导纳矩阵，令$V_p$是$V$中的一个使$K \neq 0$的真子集，且$\mu(V_p)<n-2$，此处$K$是与$G^*(V_p)$相对应的节点导纳矩阵的行列式。那么

$$det\mathbf{Y}_N=\sum f(t_n)=K\sum f'(t'_n)$$

此处$t'_n$和$t_n$分别是在$G'$和$G$中以$n$为参考点的有向树；和式是分别对$G'$中所有的$t'_n$与$G$中所有的$t_n$求取；假设节点$n$不包含在$V_p$中；$G'(V',E',f')$（或简写为$G'$）是从$G$经过下列过程而得到的有向图：

(i) 从$G$移去$G(V_p)$。

(ii) 对于所有的在$(V-V_p)$中的$i$与$j$，$f'\{(i,j)\}=\frac{1}{K}\sum f(t^*_{ji,p})$，此处$t^*_{ji,p}$是在$G^*[V_p\cup i\cup j]$中形如$t_{ji,p}$的有向2-树；和式是对$G^*[V_p\cup i\cup j]$中所有的$t^*_{ji,p}$求取。

本定理的证明在附录9中给出。注意在$i=n$的情况下，则有

$$\sum f(t^*_{jn,p})=0$$

因为我们可以假设原来不在$G$中的边是零映射的边。上述定理还可应用到一个给定有源网络的回路阻抗矩阵上[26]。因为它们是完全相同的，所以这里仅需叙述一下节点导纳矩阵的情况。

同样，这条定理的叙述看起来似乎非常复杂，但它的拓扑结构却是十分简单的，只不过是说在简化有向图$G'$中与边$(i,j)$ $(i\neq j)$对应的权等于在$G^*[V_p\cup i\cup j]$中形如$t_{ij,p}$有向2-树的全部可能的有向2-树导纳乘积之和的常数倍；而定理5是说明了在简化的Coates图$G'_c$中与$(i,j)$相对应的权等于在$G_c[V_{cp}\cup i\cup j]$中从节点$i$到节点$j$的所有单连接的全部可能的单连接乘积之和的常数倍，每一项乘积的符号是由在特定的单连接中的偶连通片的数目来确定。相似地，人们将预料到如果一个局部图$G_m[V_{mp}]$是从一个Mason图$G_m(V_m,E_m,f_m)$移出来的，那么在简化Mason图$G'_m(V'_m,E'_m,f'_m)$（或简写为$G'_m$）与边$(i,j)$相对应的权即由$\sum_k P_k\Delta_K$给出，此处$G'_m$是从$G_m$移掉$G_m[V_{mp}]$而得到的；$P_k$是在$G_m[V_{mp}\cup i\cup j]$中从节点$i$到节点$j$的第$k$条前向通路的乘积；$\Delta_K$是在$G_m[V_{mp}\cup i\cup j]$中与第$k$条前向通路不接触的图而相对应的矩阵之行列式；和式是对在$G_m[V_{mp}\cup i\cup j]$中所有可能的$P_k\Delta_k$求取。这是Chen已经证明了的[21]。

**推论3.** 如果在定理6中$V_p=\{k\}$，那么对于在$V-V_p$中所有的$i$和$j$来说，

$$f'\{(i,j)\}=f\{(i,j)\}+\frac{f\{(i,k)f(k,j)\}}{\sum_{\substack{x=1\\x\neq k}}^{n} f(k,x)},$$

推论3可以看成是带互感的有源网络的星-网孔变换，定理6的实用性是在下一条定理中：

**定理7.** 如果参考节点$n$未包含在$V_p$中，

$$\Delta_{ij}=\sum f(t_{ij,n})=K\sum f'(t'_{ij,n})$$

---

*因为组合节点$p$总是用作参考点，所以形式为$(p,k)$，$k=1,2,\cdots$，的所有边可以除去。

此处$t^r_{ij,n}$和$t_{ij,n}$分别是在$G_r$和$G$中形如$t_{ij,n}$的有向2-树；和式分别是对$G^r$中的所有$t^r_{ij,n}$和$G$中所有$t_{ij,n}$求取；$\Delta_{ij}$是$\det\ \mathbf{Y}_N$的第$ij$个余子式。

我们将用一个例子来说明上述结果。

例题1，研究示于图1的有向图$G$，它表示了一个一般的电压反馈放大器的伴随有向图。假设$V_p=\{4\}$，相应的简化有向图$G^r$也在图1中给出。$G^r$的元素值可如下地得到：

$$K=y_p+g_m+y_k,\quad f^r\{(1,2)\}=f^r\{(2,1)\}=y_1$$
$$f^r\{(3,2)\}=(y_f-g_m)+(y_p+g_m)g_m/K,\quad f^r\{(2,3)\}=y_f$$
$$f^r\{(3,5)\}=y_2+(y_p+g_m)y_K/K,\quad f^r\{(2,5)\}=y_g$$

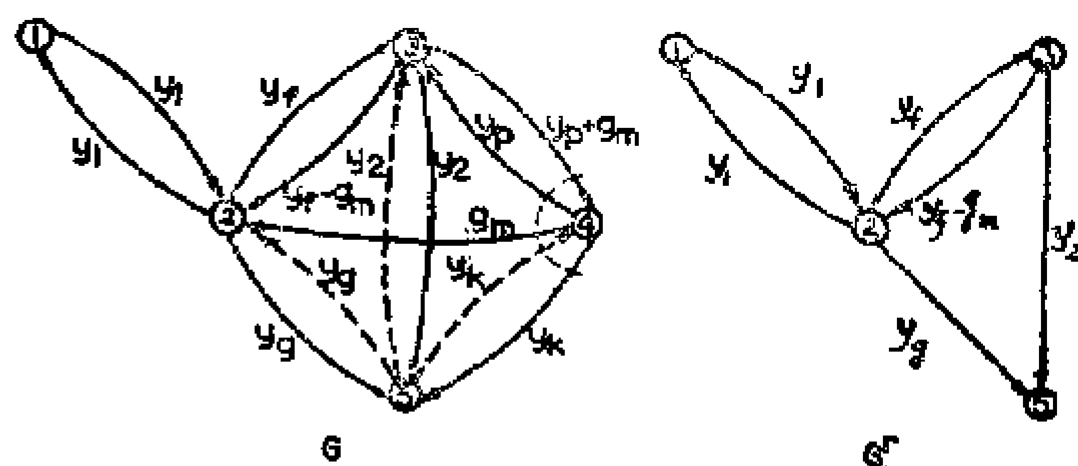



图1　给定的有向图$G$及其相应的简化有向图$G^r$

对于一个给定网络的伴随有向图有一个简单的物理说明。如果$V_i$表示节点$i$相对于参考点$n$的电位，$V_{ij}$表示节点$i$和节点$j$之间的电位差，所以$V_{ij}=V_i-V_j$，那么流入节点$i$的源电流$I_i$为：

$$I_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} f\{(i,j)\}V_{ij}$$

$i=1,2,\cdots,m$；此处$m$是$G$中的节点数。因为对应于$i=n$的方程是多余的，所以$(n,k)$的各边$(k=1,2,\cdots,m,)$在$G$中不必画出；在图1中用虚线来表示。

**推论4.**

$$\frac{\Delta}{\Delta_{ij}}=\frac{\sum f(t_n)}{\sum f(t_{ij,n})}=\frac{\sum f^r(t^r_n)}{\sum f^r(t^r_{ij,n})},$$

以及

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{km}}=\frac{\sum f(t_{ij,n})}{\sum f(t_{km,n})}=\frac{\sum f^r(t^r_{ij,n})}{\sum f^r(t^r_{km,n})}$$

此处$\Delta=\det\ \mathbf{Y}_N$。和式是分别在它们相应的有向图中对所有的有向树和有向2-树求取；并且所有其它的符号均如前那样定义。

因为网络函数总可以表示为网络的行列式与它们的余子式之比，或者是各个余子式之比。所以网络函数可以用简化有向图而不用原始图来进行计算。

**推论5.**　令$N(V_N,E_N,f_N)$是一个给定的无互感的无源网络，令$V_{Np}$是一个任意的使$K_N\neq 0$的$V_N$的真子集，且$\mu(V_{Np})<n-2$，此处$K_N$是与子网络$N^*[V_{Np}]$相对应的节点导纳矩阵的行列式。那么

$$K_N\{\Sigma f_N^r(t^r)\}=\Sigma f_N(t),\quad \text{以及}\ K_N\{\Sigma f_N^r(t_{ij,k}^r)\}=\Sigma f_N(t_{ij,k})$$

此处$t^r$和$t$分别是$N^r$和$N$中的树；$t_{ij,k}^r$和$t_{ij,k}$分别是$N^r$和$N$中的2-树；和式是在它们各网络中对所有的树和2-树求取；$P$是在$N^*[V_{Np}]$中的合并节点；$N^r(V_N^r,E_N^r,f_N^r)$（简写为$N^r$）是从$N$由下列过程得到的：

(a) 从$N$移去$N[V_{Np}]$。

(b) $f_N^r\{(i,j)\}=\frac{1}{K_N}\Sigma f(t_{ij,p}^*)$，

适用于在$V_N-V_p$中的所有$i$与$j$；此处$t_{ij,p}^*$是在$N^*[V_{Np}\cup i\cup j]$中形如$t_{ij,p}$的2-树；和式是对在$N^*[V_{Np}\cup i\cup j]$中所有的$t_{ij,p}^*$求取。

类似地网络函数可以利用简化网络代替原网络来进行计算。推论3的直接结果是网络理论中众所周知的结果：

**推论6**. 在一个无互感的无源网络$N(V_N,E_N,f_N)$中，如果$V_{Np}=\{k\}$，

$$f_N^r\{(i,j)\}=y_{ij}+y_{ik}y_{kj}\Big/\Big(\sum_{\substack{x=1\\x\neq k}}^{n}y_{kx}\Big)$$

适用于在$(V_N-V_{Np})$中所有的$i$和$j$；此处$y_{uv}=f_N\{(u,v)\}$，适用于$V_N$中的所有$u$和$v$。

推论6是众所周知的网络理论中的星-网孔变换，并且首先由Shen提出，[52]且又重新发现了多次[53,54]。推论5可以作为广义的星-网孔变换。依次地看出，推论6是推论5推广到适用于带互感的有源网络的情况。我们将用一个例子来说明。

例2. 研究一个在图2中给出的网络$N(V_N,E_N,f_N)$。假设$V_{Np}=\{1,2\}$，和$f_N\{(i,j)\}=y_{ij}$，与$i=1,2,\cdots,6$。相应的简化网络$N^r$也在图2中给出。简化网络的元件值可如下地得到：

$$K_N=(y_{13}+y_{14}+y_{16})(y_{23}+y_{25})$$

$$K_Nf_N^r\{(3,4)\}=y_{14}y_{13}y_{25}+y_{14}y_{13}y_{23}$$

$$\begin{aligned}K_Nf_N^r\{(3,5)\}=&y_{35}y_{13}y_{23}+y_{35}y_{25}y_{13}+y_{35}y_{25}y_{14}\\&+y_{35}y_{23}y_{16}+y_{35}y_{23}y_{14}+y_{35}y_{25}y_{16}\\&+y_{23}y_{25}y_{14}+y_{23}y_{25}y_{16}+y_{23}y_{25}y_{13}\end{aligned}$$

$$K_Nf_N^r\{(3,6)\}=y_{16}y_{13}y_{25}+y_{16}y_{13}y_{23}$$

$$K_Nf_N^r\{(4,6)\}=y_{41}y_{16}y_{23}+y_{41}y_{16}y_{25}$$

$$\begin{aligned}K_Nf_N^r\{(4,5)\}=&y_{45}y_{25}y_{14}+y_{45}y_{13}y_{25}+y_{45}y_{16}y_{25}\\&+y_{45}y_{23}y_{14}+y_{45}y_{23}y_{13}+y_{45}y_{23}y_{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_Nf_N^r\{(5,6)\}=&y_{56}y_{16}y_{3.}+y_{56}y_{23}y_{13}+y_{56}y_{23}y_{14}\\&+y_{56}y_{16}y_{23}+y_{56}y_{25}y_{13}+y_{56}y_{25}y_{14}\end{aligned}$$

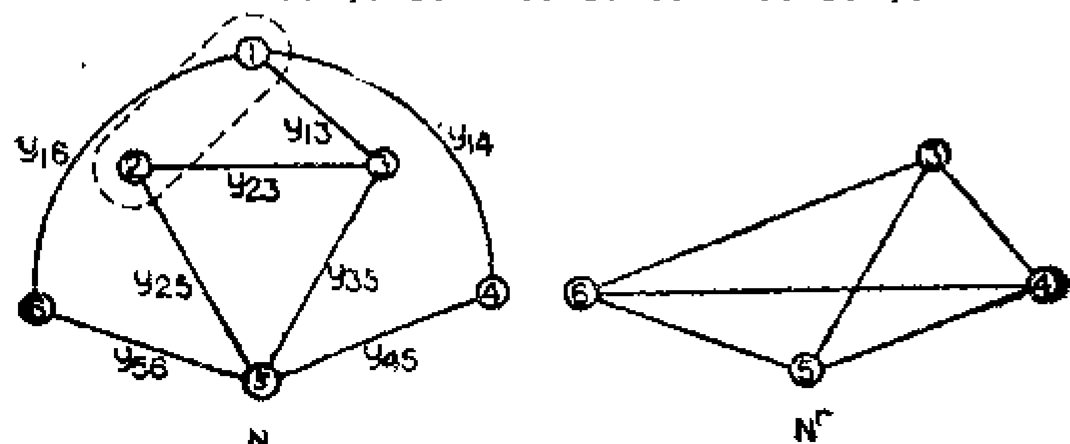



图2 给定的网络$N$与相应的简化网络$N^r$

在本文中所介绍的结果的实用性决定于产生有向树，有向2-树，无相消的连接和单连接的效率。已有计算这些子图的方法[39,55-57]可供使用，同时它们也易于编程序而适合于数字计算机计算。

**5.电网络的有向图分析**

因为早期线性电路分析的开拓者设法使电路问题的分析方法公式化。看来似乎很少有尝试导出一种网络分析的快速方法。前面各节中所讨论的方法，假若容易地得到伴随有向图，Coates图或 Mason图的话，提供了一种快速的一般线性网络的分析法。在本节中将介绍对一类最常用的网络，构成这些图的简便方法。下面，要研究的这些网络是由电阻器、电容器、电感(除变压器外)，晶体管，真空管及受控源所组成。我们假设受控源是受控电流源，它们仅仅决定于其它支路的电压。这一假设是相当普遍的，因为其它类型的受控源很容易地转换为上述类型的受控源（若有必要的话，可采用 Blakesley变换[62]）。当然可以把这种方法推广到更普遍类型的网络。未考虑一般情况的理由是在于这里只需要较少的规则，并且这些规则容易记忆和运算。在含互感网络的情况，从网络的回路阻抗矩阵直接画出有向图要更为简单；因为这里所有介绍的方法已经证明均适用于这种情况[26]。

**5.1 从一个给定的有源网络得到伴随有向图**

在一个给定网络中，假设除了激励端有一个电源之外，所有的独立电源已经移去。也就是说使所有独立电流源开路，使所有的独立电压源短路。这并不是一种严格的限制，因为在一个线性网络中各电源的作用是迭加的。下面是构成有向图的步骤：

(i) 从给定的网络得到一个等效电路；即用相应的等效电路代替所有的有源元件。

(ii) 用相应于图3所示的有向图代替受控源；即移去受控源，然后把相应于图3所示的有向图迭加在早先从第一步得到的等效电路上。

(iii) 用一对相反方向的边代替每一个无源元件，每个边的权是无源元件的导纳。

(iv) 如果有必要的话，把并列边合并，即把相同节点对之间方向相同的边合并起来，其边是每条边权之和。现在可选取一个参考点。

**5.2 从一个给定网络得到Coates图**

(i) 仿照5.1节中给出的(i)—(iii)的各步。

(ii)在(i)步所得的有向图$G$中的每一个节点上加上一个自环。与每一个自环对应的权是从$G$图中特定的节点射出的所有边的导纳之和。

(iii) 把每条边的方向倒过来，改变与每一个非自环的边对应的权的符号。然后从得到的有向图中移去一个任意节点。

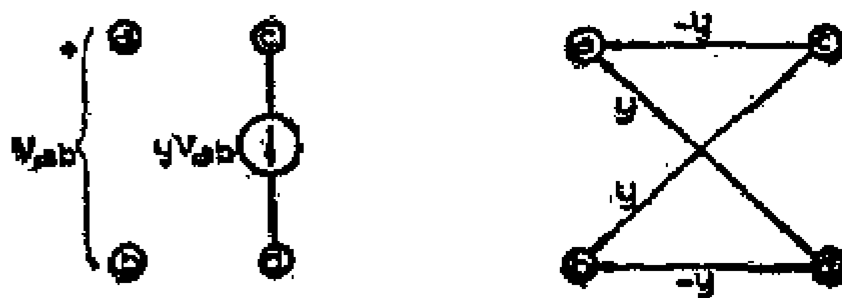



图3 受控电流源及其相应的有向图

类似地，Mason图可以简单地构成，即在每个存在自环处将其权加上1，并且在Coates图的每一个无自环的节点加入一个权为1的自环〔17〕。注意在5.1和5.2节中所给出的许多步骤实际上是可以合并的。

在节点$b$和$d$是合并的情况，在图3中从节点$d-b$的有向边可以略去。对于真空管，$y=g_m$，此处$g_m$是真空管的转移电导；对于晶体管，$y=-ag_e$，此处$a$是电流放大系数，$g_e$是发射极电导。我们将下列例子来说明这一点。

**例3.** 研究图4所示的一个一般电压反馈放大器及其等效电路。假设要求取从输入端看进去的输入导纳$y_{in}$。伴随有向图$G$及其相应的简化有向图$G'$按上述概括的过程在图1中给出。有向树$t'_5$的集合$T'_5$以及$G'$中的有向2-树$t'_{1,5}$的集合$T'_{1,5}$可如下地得到：

$$T'_5=\{(1,2)(2,5)(3,5),\ (1,2)(2,3)(3,5),\ (1,2)(3,2)(2,5)\},$$

$$T'_{1,5}=\{(2,1)(3,2),\ (2,1)(3,5),\ (3,5)(2,3),\ (2,5)(3,5),\ (3,2)(2,5)\}$$

输入导纳为：

$$Y_{in}=\frac{\Sigma f'(t'_5)}{\Sigma f'(t'_{1,5})}=\frac{y_1[\{y_2+(y_p+g_m)y_k/K\}(y_g+y_f)+y_2\{(y_f-g_m)+(y_p+g_m)g_m/K\}]}{(y_1+y_g)\{(y_f-g_m)+(y_p+g_m)g_m/K\}+(y_1+y_f+y_g)\{y_2+y_k/K\}g_m(y_p+)}$$

$$=\frac{y_1\{(y_p+g_m+y_k)(y_2y_f+y_2y_g+y_fy_g)+y_k(y_py_f+y_py_g+g_my_f)\}}{(y_p+g_m+y_k)(y_1y_f+y_1y_g+y_2y_f+y_2y_1+y_2y_g)+y_k(y_fy_p+y_fg_m+y_1y_p+y_gy_p)}$$

此处$K=y_p+g_m+y_k$，与$G'$的各边相对应的权在例1中给出。

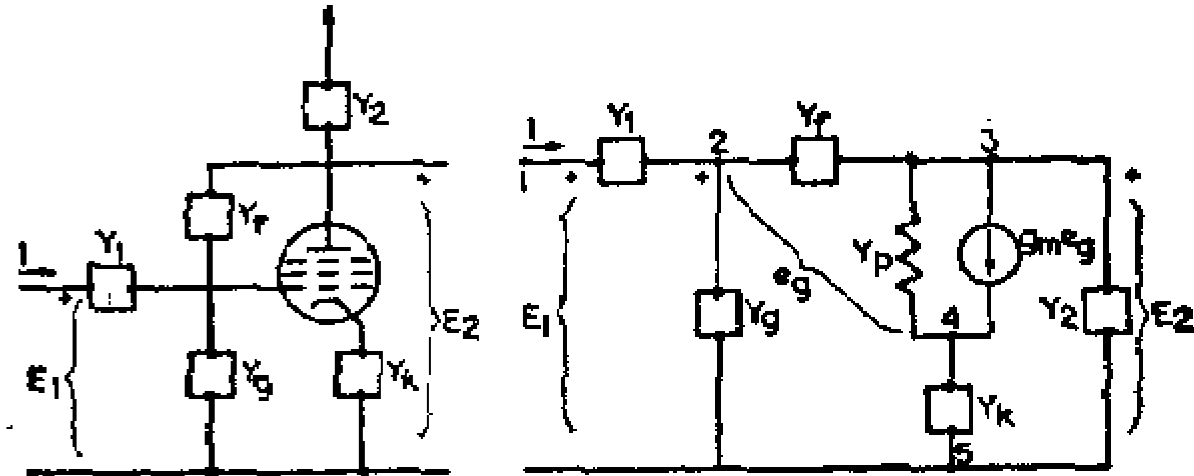



图4 一般电压反馈放大器及其等效电路

## 结 论

已经证明基尔霍夫规则，麦克斯韦规则，Mason公式以及Coates 公式可以互相地求得。这是合乎逻辑的。因为它们都涉及到解线性代数联立方程问题。这些规则和公式之间的内在关系使人们可转换某一种简化方法而导出另一种方法。普遍化的星-网孔变换就是用这种方法得到的。虽然这些定理是用给定网络的节点导纳矩阵的伴随有向图来叙述的，但是实际上它们对于给定网络的回路阻抗矩阵的伴随有向图也是成立的。差别仅仅在于采用阻抗乘积来代替导纳乘积。在网络为无源和不含互感的情况，普遍化的转换简化为一个网络的多节点移去过程，它再次地可看成在网络理论中众所周知的普遍化的星-网孔变换的推广。

**致谢（略）**

## 参 考 文 献

〔1〕KIRCHHOFF, G.: "Ueber die Autloesung der Gleichungen auf Welsche Man bei der

Untersuchungen der Linearen Vertailung Galvanischer Stroeme Geführt Wird', *Ann. Phys.*, 1847, **72**, pp. 497–508.
[2] MAXWELL, J. C.: 'Electricity and magnetism' (Clarendon Press, 1892), Vol. 1, chap. 6 and pp. 403–410
[3] CAMPBELL, G. A.: 'Cisoidal oscillations', *Trans. Amer. Inst. Elect. Engrs.*, 1911, 30, pp. 873–909
[4] CAUER, W.: 'Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen' (Akademie Verlag, 1954)
[5] FRANKLIN, P.: 'The electric currents in a network', *J. Math. Phys.*, 1925, 4, pp. 97–102
[6] FEUSSNER, W.: 'Ueber Stromverzweigung in Netzfoermige Leitern', *Ann. Phys.*, 1902, **9**, pp. 1304–1329
[7] FEUSSNER, W.: 'Zur Berechnung der Stroemstaerke in Netzfoermige Leitern', *ibid.*, 1904, **15**, pp. 385–394
[8] KU, Y. H.: 'Resume of Maxwell's and Kirchhoff's rules', *J. Franklin Inst.*, 1952, **253**, pp. 211–224
[9] OKADA, s.: 'Topologic and algebraic foundations of network synthesis' in Proceedings of the symposium on modern network synthesis. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1955, Vol. 5, pp. 283–322
[10] TING, S. L.: 'On the general properties of electrical network determinants', *Chinese J. Phys.*, 1935, **1**, pp. 18–40
[11] TSAI, C. T.: 'Short cut methods for expanding determinants involved in network problems', *ibid.*, 1939, **3**, pp. 148–181
[12] WANG, K. T.: 'On a new method for the analysis of networks', National Research Institute of Engineering, Academia Sinica, 1934, memorandum 2, pp. 1–11
[13] PERCIVAL, W. S.: 'The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees', *Proc. IEE*, 1953, **100**, Pt. III, pp. 143–150
[14] MASON, S. J.: 'Feedback theory—some properties of signal flow graphs', *Proc. Inst. Radio Engrs.*, 1953, **41**, pp. 1144–1156
[15] MASON, S. J.: 'Feedback theory—further properties of signal flow graphs', *ibid.*, 1956, **44**, pp. 920–926
[16] COATES, C. L.: 'Flow graph solutions of linear algebraic equations', *IRE Trans.*, 1959, CT-6, pp. 170–187
[17] DESOER, C. A.: 'The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates' formula', *Proc. Inst. Radio Engrs.*, 1960, **48**, pp. 883–889
[18] HOSKINS, R. F.: 'Signal flow-graph analysis and feedback theory', *Proc. IEE*, 1961, **108 C**, pp. 12–19
[19] BOISVERT, M.: 'Les diagrammes de fluence de signal', *Ann. Telecomm.*, 1958, **13**, pp. 50–77
[20] ASH, R. B.: 'Topology and the solution of linear systems', *J. Franklin Inst.*, 1959, **268**, pp. 453–463
[21] CHEN, W. K.: 'On signal-flow graphs', *Proc. Inst. Elect. Electronics Engrs.*, 1964, **52**, p. 967
[22] CHEN, W. K.: 'Flow graphs: some properties and methods of simplification', *IEEE Trans.*, 1965, CT-12, pp. 128–130
[23] CHEN, W. K.: 'The inversion of matrices by flow graphs', *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1964, **12**, pp. 676–685
[24] CHEN, W. K.: 'Matrix graphs and bipartite graphs', *IEEE Trans.*, 1965, CT-12, pp. 268–269
[25] CHEN, W. K.: 'On the modification of flow graphs', *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1965, **13**, pp. 493–505
[26] CHEN, W. K.: 'Topological analysis for active networks', *IEEE Trans.*, 1965, CT-12, pp. 85–91
[27] HOSKINS, R. F.: 'Signal flow graphs', *Electronic and Radio Engr.*, 1959, **36**, p. 298
[28] HOSKINS, R. F.: 'Flow graphs, signal flow graphs, and graph determinants', *Proc. IEE*,

1962, **109** C, pp. 263–269
[29] NATHAN, A.: 'Algebraic approach to signal flow graphs', *Proc. Inst. Radio Engrs.*, 1958, **46**, p. 1955
[30] NATHAN, A.: 'A proof of the topological rules of signal-flow graph analysis', *Proc. IEE*, 1962, **109** C, pp. 83–85
[31] LORENS, C. S.: 'Theory and applications of flow graphs', Sc. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, July 1956
[32] CHIEN, R. T.: 'A simplification of the Coates-Desoer formula for the gain of a flow graph', *Proc. Inst. Elect. Electronics Engrs.*, 1965, **53**, pp. 1240–1241
[33] HAPP, W. W.: 'Signal flow graphs', *Proc. Inst. Radio Engrs.*, 1957, **45**, p. 1293
[34] CHOW, Y.: 'Node duplication—a transformation of signal-flow graphs', *IRE Trans.*, 1959, **CT-6**, pp. 233-234
[35] HOSKINS, R. F.: 'Flow-graph and signal flow-graph analysis of linear systems', Recent developments in network theory (Pergamon Press, 1963), pp. 139-157
[36] MASON, S. J.: 'About such things as unistors, flow graphs, partial factoring and matrices', *IRE Trans.*, 1957, CT-4, pp. 90–97
[37] CHEN, W. K., and QUISENBERRY, R. C.: 'On network topology', Proceedings of the 9th midwest symposium on circuit theory, Oklahoma State University, Stillwater, May 1966, pp. 8.0–8.14
[38] *CHEN, W. K.: 'On flow graph solutions of linear algebraic equations', SIAM J. Appl. Math.*, 1967, 15, pp. 136–142
[39] CHEN, W. K.: 'On directed graph solutions of linear algebraic equations', *SIAM Rev.*, 1967, to be published
[40] JACOB, J. P.: 'The number of terms in the general gain formulas for Coates and Mason signal flow graphs', *IEEE Trans.*, 1965, **CT-12**, pp. 601–604
[41] VASUDEVA, M. S.: 'Signal flow matrix—a new approach to signal flow graphs', *ibid.*, 1967, **CT-14**, pp. 84–86
[42] PESKIN, E.: 'Comment on "A simplification of the Coates-Desoer formula for the gain of a flow graph"', *Proc. Inst. Elect. Electronics Engrs.*, 1966, **54**, p. 324
[43] MASON, S.J.: 'Topological analysis of linear non-reciprocal networks', *Proc. Inst.Radio Engrs.*, 1957, **45**, pp. 829–838
[44] COATES, C. L.: 'General topological formulas for linear network functions', *IRE Trans.*, 1958, **CT-5**, pp. 30–42.
[45] MAYEDA, W.: 'Topological formulas for active networks', Internal technical report 8, US Army contract DA-11-022-ORD-1983, University of Illinois, Jan. 1958
[46] TALBOT, A.: 'Topological analysis of general linear networks', *IEEE Trans.*, 1965, **CT-12** pp. 170–180
[47] NATHAN, A.: 'Topological rules for linear networks', *ibid.*, 1965, **CT-12**, pp. 344–358
[48] BROWN, D. P.: 'New topological formulas for linear networks', *ibid.*, 1965, **CT-12**, pp. 358–365
[49] PERCIVAL, W. S.: 'The graphs of active networks', *Proc. IEE*, 1955, **102** C, pp. 270–278
[50] TALBOT, A.: 'Topological analysis for active networks', *IEEE Trans.*, 1966, **CT-13**, pp. 111–112
[51] CHEN, W. K.: 'Note on topological analysis for active networks', *ibid.*, 1966, **CT-13**, pp. 438–439.
[52] SHEN, D. W. C.: 'Generalised star and mesh transformations', *Phil. Mag.*, 1947, [7], **38**, pp. 267–275
[53] WANG, C. L., and TOKAD, Y.: 'Polygon to star transformations', *IRE Trans.*, 1961, **CT-8**, pp. 489-491
[54] BEDROSIAN, S. D.: 'Converse of the star-mesh transformation', *ibid.*, 1961, CT-8, pp. 491–493
[55] CHEN, W. K.: 'Generation of trees and k-trees', Proceedings of the

## 附　　录

**定理6的证明概要**

令$\boldsymbol{Y}_N$是这样地分割，即使得$\boldsymbol{Y}_{11}$对应于节点集合 $V_p$。这种分割总是可能的，因为节点集合总可以重新标号。

$$\boldsymbol{Y}_N=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\end{bmatrix}$$

此处$\boldsymbol{Y}_{11}$与$\boldsymbol{Y}_{22}$分别是$m$阶$[m=\mu(V_p)]$与$n-m-1$阶方阵，$\boldsymbol{Y}_{11}$是非奇异矩阵。

容易证明下列恒等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ -y_{21}\boldsymbol{Y}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11}\boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21}\boldsymbol{Y}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{Y}_{22}-\boldsymbol{Y}_{21}\boldsymbol{Y}_{11}^{-1}\boldsymbol{Y}_{12}\end{bmatrix}$$

以及$det\ \boldsymbol{Y}_N=(det\ \boldsymbol{Y}_{11})det(\boldsymbol{Y}_{22}-\boldsymbol{Y}_{21}\boldsymbol{Y}_{11}^{-1}\boldsymbol{Y}_{12})$成立。此处$\boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{O}$分别是适当阶数的单位矩阵和零矩阵，$\boldsymbol{Y}_{11}^{-1}$是$\boldsymbol{Y}_{11}$的逆。

令　$\boldsymbol{Y}_{kt}=[y_{ij}^{kt}]$　$k,t=1,2$。

$[c_{ij}]/det\boldsymbol{Y}_{11}=\boldsymbol{Y}_{22}-\boldsymbol{Y}_{21}\boldsymbol{Y}_{11}^{-1}\boldsymbol{Y}_{12}$。

$\boldsymbol{A}_i=[-y_{i1}-y_{i2}\cdots-y_{im}]$　$i=m+1,m+2,\cdots,n-1$,

$\boldsymbol{B}_j'=[-y_{1j}-y_{2j}\cdots-y_{mj}]$　$j=m+1,m+2,\cdots,n-1$,

以及　$\boldsymbol{C}_m=[y_{11}\ \ y_{22}\cdots y_{mm}]$

此处一撇表示矩阵的转置。由此立即得到

$$\begin{aligned}
c_{ij}&=(\det\ \boldsymbol{Y}_{11})y_{ij}^{22}-\sum_{k_1=1}^{m}\ \sum_{k_2=1}^{m}(-1)^{k_1+k_2}y_{ik_1}^{21}M_{k_2k_1}^{11}y_{k_2j}^{12}\\
&=y_{ij}^{22}\det\ \boldsymbol{Y}_{11}+\sum_{k_1=1}^{m}\left[(-1)^{k_1+m+1}\ y_{ik_1}^{21}\left\{\sum_{k_2=1}^{m}(-1)^{k_2+m}y_{k_2j}^{12}M_{k_2k_1}^{11}\right\}\right]\\
&=y_{ij}^{22}\det\ \boldsymbol{Y}_{11}+\sum_{k_1=1}^{m}(-1)^{k_1+m+1}\ y_{ik_1}^{21}\det[\boldsymbol{Y}_{11}\ \ \boldsymbol{B}_j]_{k_1}\\
&=y_{ij}^{22}\det\ \boldsymbol{Y}_{11}+\sum_{k_1=1}^{m}(-1)^{k_1+m+1}y_{ik_1}^{21}\ det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_j\\ \boldsymbol{A}_i & y_{ij}^{22}\end{bmatrix}_{(m+1)k_1}\\
&\det=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_j\\ \boldsymbol{A}_i & y_{ij}^{22}\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

此处$M_{k_2k_1}^{11}$是$\det\ \boldsymbol{Y}_{11}$的第$k_2$行、第$k_1$列的子行列式；$\det[\boldsymbol{Y}_{11}\ \ \boldsymbol{B}_j]_{k_1}$是从$\det[\boldsymbol{Y}_{11}\ \ \boldsymbol{B}_j]$删掉第$k$列而得到的行列式；以及

$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_j\\ \boldsymbol{A}_i & Y_{ij}^{22}\end{bmatrix}_{(m+1)k_1}$是从$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_j\\ \boldsymbol{A}_i & Y_{ij}^{22}\end{bmatrix}$删掉第$m+1$行及第$k_1$列而得到的行列式。

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n-m-1}c_{is}&=\sum_{j=m+1}^{n-1}\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_j\\ \boldsymbol{A}_i & y_{ij}^{22}\end{bmatrix}\\
&=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_{m+1}+\boldsymbol{B}_{m+2}+\cdots+\boldsymbol{B}_{n-1}\\ \boldsymbol{A}_i & y_{i1}+y_{i2}+\cdots+y_{im}+y_{ii}\end{bmatrix}\\
&=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{C}_m\\ \boldsymbol{A}_i & y_{ii}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

上一式子是把头$m$列加到第$(m+1)$列而得到的。

与矩阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_j \\ \boldsymbol{A}_i & y^{22}_{ii} & y^{22}_{ij} \\ \boldsymbol{A}_j & y^{22}_{ji} & y^{22}_{jj} \end{bmatrix} \text{及} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{B}_i & -\boldsymbol{C}_m \\ \boldsymbol{A}_i & y^{22}_{ii} & y_{ii} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相对应的有向图实际上分别是$G^*[V_p \cup i \cup j]$以及$/G^*[V_p \cup i \cup n]$,带有稍微不同的节点标号。即第一个矩阵的第$(m+1)$行与第$(m+2)$行分别用节点$i$与$j$来表示；第二个矩阵的$(m+1)$行与$(m+2)$行分别用节点$i$与$n$来表示；参考节点用$p$来表示；因为$-c_{ij}$与$\sum_{t=1}^{n-m-1} c_{it}$分别是上述两个矩阵的第$/(m+2)$行，第$(m+1)$列的余子式，从定理4得到：

$$-c_{ij} = \sum f(t^*_{ji,p})$$

$$\sum_{t=1}^{n-m-1} c_{it} = \sum f(t^*_{ni,p}),$$

此处$t^*_{xi,p}(x=j$与$n)$ 是在$G^*[V_p \cup i \cup x]$中形如$t_{xi,p}$的一个有向2-树，和式是对$G^*[V_p \cup i \cup x]$中所有可能的$t^*_{xi,p}$求取。

因为简化有向图$G'$实际上是矩阵$[C_{ij}/K]$的对应有向图，矩阵$[C_{ij}/K]$的行列式与$\det \boldsymbol{Y}_N$是通过$\det \boldsymbol{Y}_N = K\det[C_{ij}/K]$来建立联系的。所以定理得证。

# 十五、关于广义网络矩阵的行列式及其广义余子式的不变性与相互关系的图论研究

## 1. 引言

节点导纳矩阵的行列式相对于参考点的选择表现不变的特性，首先是由Jeans研究的〔见〔1〕328〕。并在〔2〕中Percival以及在〔3〕中Shekel也重新研究过。关于回路阻抗矩阵也经常得到相同的论断〔见〔4〕〕。Seshu在〔5〕中曾指出：在回路变换的情况下，回路阻抗矩阵的行列式一般说来不是保持不变的。但是，它们之间通过一个实常数（仅决定于回路的两种选取方法）来建立联系。Okada在〔6〕中已指出：用树的方法形成回路阻抗矩阵的行列式是保持不变的，然而当采用广义节点变量时，节点导纳矩阵的行列式就不能保持不变了。Cederbaum在〔7〕中更一般地研究了这一问题，同时指出：虽然对一般回路系统或一般割集表示法来说，网络行列式不是保持不变的，但对更普遍与更重要类型的网络——诸如利用树的方法来列写回路与割集表示法以及利用平面网络的窗口来形成回路表示法则是保持不变的。他还指出回路阻抗矩阵和节点导纳矩阵的行列式的比值，在不变的条件下它等于网络的支路阻抗矩阵的行列式。这是Tsang早先工作的推广〔4〕。

本文的目的是要证明网络行列式与网络函数的许多不变特性可用纯图论的观点来导出。因此，它们不仅适用于电网络，而且还适用于其它系统。还将证明相对于网络的关联函数的选择，即相对于网络的支路取向的选择，它们是不变的。

## 2. 主子矩阵行列式的不变性

令$\boldsymbol{F}$是一个$p\times q$阶及秩为$p$的任意矩阵，此处$p\leqslant q$。如果$\boldsymbol{F}_m$是$\boldsymbol{F}$中的一个$p$阶非奇异子矩阵，则称$\boldsymbol{F}_m$为$\boldsymbol{F}$的主子矩阵。换句话说$\boldsymbol{F}_m$的行列式是$\boldsymbol{F}$的一个非零的主行列式。还令$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$分别是一个$v$个节点、$e$条边的有向图$G$的回路矩阵与割集矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times e$阶，秩为$n$，$\boldsymbol{Q}$为$r\times e$阶，秩为$r$。此处$n$与$r$分别是$G$的零度（维）与秩。众所周知〔见【9】第5章〕$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$的主子矩阵$\boldsymbol{Q}_m$与$\boldsymbol{B}_m$和$G$的树$t$与补树$\bar{t}$是一一对应的。为方便起见，我们将假设这里所研究的回路矩阵与割集矩阵已用相同的边的次序而作排列。如果$\boldsymbol{B}_f$与$\boldsymbol{Q}_f$分别表示相对于$G$的树$t$的基本回路矩阵与基本割集矩阵。那么显然分别存在着秩为$n$与$r$的非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{D}$，使得

$$\boldsymbol{B}_f=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \qquad \text{以及} \qquad \boldsymbol{Q}_f=\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q},$$

因为$\boldsymbol{B}_f$与$\boldsymbol{Q}_f$的各行分别是由$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$的各行所张成的矢量空间的基。为方便起见，令$\boldsymbol{Q}_{fm}$与$\boldsymbol{Q}_m$分别是相对于树$t$的$\boldsymbol{Q}_f$与$\boldsymbol{Q}$的主子矩阵，$\boldsymbol{B}_{fm}$与$\boldsymbol{B}_m$分别是相对于补树$\bar{t}$的$\boldsymbol{B}_f$与$\boldsymbol{B}$的主子矩阵，由此得到$\boldsymbol{B}_{fm}$与$\boldsymbol{Q}_{fm}$分别是$n$阶与$r$阶的单位矩阵，且

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}_m^{-1} \qquad \text{以及} \qquad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}_m^{-1}$$

因为$\boldsymbol{B}_f$与$\boldsymbol{Q}_f$是么模矩阵〔见【9】〕，所以$\boldsymbol{B}_f$或$\boldsymbol{Q}_f$的所有主子矩阵的行列式都具有相同的值1。在

这里的场合，我们将把下列众所周知的结果[见[9]]叙述为：

**引理1.** 一个有向图的回路矩阵与割集矩阵的所有主子矩阵的行列式具有相同的值。

**定理1.** 如果$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$是一个有向图的回路矩阵与割集矩阵，那么对于每一种分别选取的$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$的主子矩阵$\boldsymbol{B}_m$与$\boldsymbol{Q}_m$来说，$\boldsymbol{B}_m^{-1}\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}_m^{-1}\boldsymbol{Q}$必定是么模矩阵。

因为$\boldsymbol{B}_m$与$\boldsymbol{Q}_m$的元素是1、-1或0，这些主子矩阵的行列式必然是一个整数（不一定为$\pm 2^i$），此处$i$对于给定的$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$来说是一个固定非负整数，正如Seshu及Reed在[9]中引用Okada的结论所述[6]。作为一个示例，研究图1中所示的有向图。回路矩阵$\boldsymbol{B}$是由边$e_1e_5e_6e_3e_4$，$e_1e_2e_6e_7e_4$，$e_1e_2e_3e_7e_8$以及$e_5e_2e_3e_4e_8$所形成的回路所构成，并由下式给出：

$$\boldsymbol{B}=\begin{matrix} \\ (e_1e_5e_6e_3e_4) \\ (e_1e_2e_6e_7e_4) \\ (e_1e_2e_3e_7e_8) \\ (e_5e_2e_3e_4e_8) \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易证明$\boldsymbol{B}$的所有主子矩阵的行列式具有的秩为3，它显然不是2的某次幂。

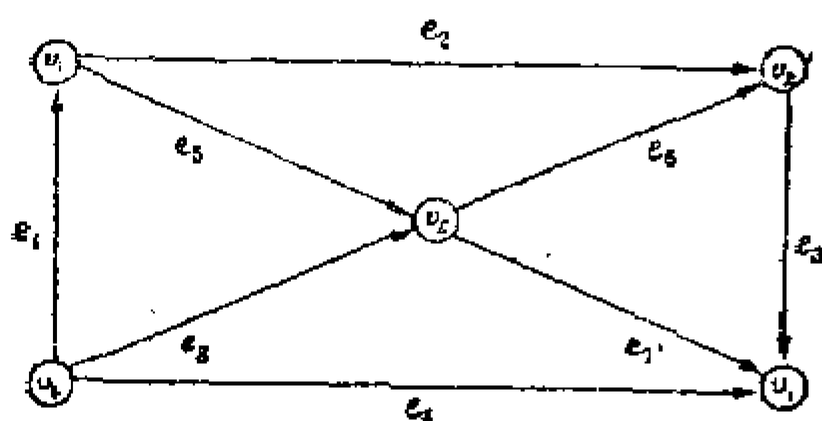



图1. 一个给定的有向图$G$

在许多应用中，必须计算这种主行列式值的平方，为方便起见，令$k(\boldsymbol{B})=(\det\boldsymbol{B}_m)^2$以及$k(\boldsymbol{Q})=(\det\boldsymbol{Q}_m)^2$，此处$\boldsymbol{B}_m$与$\boldsymbol{Q}_m$分别是$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$相对于$G$的补树$\bar{t}$与树$t$的主子矩阵。还为方便起见，令$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}_p$分别表示$G$的$r\times e$阶，秩为$r$的关联矩阵以及相应于一个平面图的窗口的$n\times e$阶，秩为$n$的回路矩阵。显然我们有$k(\boldsymbol{A})=1$，$k(\boldsymbol{B}_p)=1$，$k(\boldsymbol{B}_f)=1$以及$k(\boldsymbol{Q}_f)=1$。这是对任意有向图$G$的主子矩阵所能得到的最小数值。然而，主子矩阵的行列式具有这一最小值并非只有这种情况。具有最小值的这些情况可由下列引理来表征。

**引理2.** 当且仅当存在$\boldsymbol{B}$的主子矩阵$\boldsymbol{B}_m$以及$\boldsymbol{Q}$的主子矩阵$\boldsymbol{Q}_m$，使得分别有$\det\boldsymbol{B}_m=\pm 1$以及$\det\boldsymbol{Q}_m=\pm 1$时，则$k(\boldsymbol{B})=1$与$k(\boldsymbol{Q})=1$。

**3. 广义网络矩阵**

在本节中我们将要研究矩阵三重乘积$\boldsymbol{BWB}'$与$\boldsymbol{QXQ}'$，此处$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$是$e$阶方阵；$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{Q}$如前面所定义；一撇表示一个矩阵的转置。我们还将讨论矩阵三重乘积相对于从一种系统变换到另一种系统时的不变性的条件以及它们之间的相互关系。为方便起见，矩阵三重乘积将称为广义网络矩阵。不失一般性地我们假定$G$是连通的。

**定理2.** 令$\boldsymbol{B}_1$与$\boldsymbol{B}_2$是$G$的两个秩为$n$的回路矩阵，$\boldsymbol{Q}_1$和$\boldsymbol{Q}_2$是$G$的两个秩为$r$的割集矩阵。那么当且仅当分别有$k(\boldsymbol{B}_1)=k(\boldsymbol{B}_2)$以及$k(\boldsymbol{Q}_1)=k(\boldsymbol{Q}_2)$，则

$$k(\boldsymbol{B}_2)\det\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1'=k(\boldsymbol{B}_1)\det\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_2'$$

以及　　$k(\boldsymbol{Q}_2)\det\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_1' = k(\boldsymbol{Q}_1)\det\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_2'$；

以及　　$\det\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1' = \det\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_2'(\neq 0)$与$\det\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_1' = \det\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_2'(\neq 0)$

证明：我们将证明回路矩阵部份，因为割集矩阵部分可用完全类似的方法加以证明。令$\boldsymbol{B}_{m1}$与$\boldsymbol{B}_{m2}$分别是相应于$\boldsymbol{B}_1$与$\boldsymbol{B}_2$的主子矩阵。那么，从前面的讨论，我们有：

$$\boldsymbol{B}_f = \boldsymbol{B}_{m1}^{-1}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_{m2}^{-1}\boldsymbol{B}_2$$

因此，
$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1' &= \det((\boldsymbol{B}_{m1}\boldsymbol{B}_{m2}^{-1}\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{B}_{m1}\boldsymbol{B}_{m2}^{-1}\boldsymbol{B}_2)')\\ &= \det((\boldsymbol{B}_{m1}\boldsymbol{B}_{m2}^{-1})(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_2')(\boldsymbol{B}_{m1}\boldsymbol{B}_{m2}^{-1})')\\ &= (\det\boldsymbol{B}_{m1}/\det\boldsymbol{B}_{m2})^2\det\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_2'\\ &= (k(\boldsymbol{B}_1)/k(\boldsymbol{B}_2))\det\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_2'\end{aligned}$$

立即得到本定理。定理证毕。

**推论1.** 与一个基本回路系统与基本割集系统相对应的广义网络矩阵的行列式，在它从一种系统转换到另一种系统时是保持不变的。

**推论2.**　对于给定的$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$，当且仅当分别有$k(\boldsymbol{B})=1$及$k(\boldsymbol{Q})=1$时，若广义网络矩阵$\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}'$不等于零，则达到它们的最小绝对值。

**推论3.**　对于一个给定的$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$，广义矩阵$\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_f'$，$\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_p'$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'$与$\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_f'$具有它们的最小绝对值。

对于一个给定的矩阵$\boldsymbol{F}$，符号$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}_u, \boldsymbol{J}_v)$用来表示包含有分别相应在集合$\boldsymbol{I}_u$与$\boldsymbol{J}_v$中整数的行与列组成$\boldsymbol{F}$的子矩阵。此处$\boldsymbol{I}_u=\{i_1, i_2, \cdots, i_u\}$与$\boldsymbol{J}_v=\{j_1, j_2\cdots, j_v\}$。在我们建立两类广义网络矩阵行列式的一个重要结果之前，首先证明下列引理。

**引理3.**　$G$的树数是由$(\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')/k(\boldsymbol{B})$或$(\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}')/k(\boldsymbol{Q})$来给出的。

证明：令$\boldsymbol{B}_m$是$\boldsymbol{B}$的主子矩阵。那么$\boldsymbol{B}_f=\boldsymbol{B}_m^{-1}\boldsymbol{B}$。由此得到：

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' &= \det\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{B}_f'\boldsymbol{B}_m' = (\det\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{B}_m')\det\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{B}_f'\\ &= k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{B}_f'\end{aligned}$$

现在$\det\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{B}_f'$表示$G$的树数。〔这可从这一事实而得出，$\det\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{B}_f'$也是一个电阻性网络（每个电阻值取作1）的回路阻抗矩阵的行列式。因此，它等于该网络的补树阻抗乘积之和〕。本引理的第一部份立即得到。类似地我们能证明该引理的第二部份。

**引理4.**

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r}\det\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_r)\det\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{I}}_r) = (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_r}\det\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}_r)\det\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{J}}_r),$$

此处$\overline{\boldsymbol{I}}_r$与$\overline{\boldsymbol{J}}_r$分别是$\{1, 2, \cdots, e\}$的集合$\boldsymbol{I}_r$与$\boldsymbol{J}_r$的补。$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_r)$与$\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{I}}_r)$是$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$的主子矩阵，它们分别由相应在$\boldsymbol{I}_r$与$\overline{\boldsymbol{I}}_r$中的整数的列所组成。

证明：令$\boldsymbol{M}'=[\boldsymbol{Q}'|\boldsymbol{B}']$。那么$\det\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'=(\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}')(\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')$。如果$m$表示$G$的树数，那么由引理3我们有：

$$\det\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}' = (\det\boldsymbol{M})^2 = m^2k(\boldsymbol{Q})k(\boldsymbol{B})$$

$$\det\boldsymbol{M} = \pm m(k(\boldsymbol{Q})k(\boldsymbol{B}))^{\frac{1}{2}}$$

把$\det\boldsymbol{M}$根据头$r$行的主子式利用拉普拉斯展开，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{(I_r)}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r}\det\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_r)\det\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{I}}_r) &= \sum_{(I_r)}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r}(\pm 1)(k(\boldsymbol{Q})k(\boldsymbol{B}))^{\frac{1}{2}}\\ &= (k(\boldsymbol{Q})k(\boldsymbol{B}))^{\frac{1}{2}}\sum_{(I_r)}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r}(\pm 1)\end{aligned}$$

$$= \pm m(k(\boldsymbol{Q})k(\boldsymbol{B}))^{\frac{1}{2}}$$

因为在该和式中恰好有$m$项，为了使该等式成立，在和式里面的所有项必须给以相同的代数符号。引理立即得证。

上述引理的一种特殊情况（当$\boldsymbol{Q}$是$G$的关联矩阵$\boldsymbol{A}$）是最近由Malik与Hale在[10]中给出的。引理4的直接结果如下。

**推论4.**

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}\det\boldsymbol{Q}(I_r)\det\boldsymbol{Q}(J_r) = (k(\boldsymbol{Q})/k(\boldsymbol{B}))\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)$$

现在我们能够叙述与证明本节中的一条主要定理。

**定理3.** 如果$\boldsymbol{W}$是非奇异的，那么

$$k(\boldsymbol{Q})\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}' = k(\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{W})(\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{Q}')$$

证明：令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{I}}_r$与$\bar{\boldsymbol{J}}_r$分别为$\{1,2,\cdots,e\}$的集合$\boldsymbol{I}_r$与$\boldsymbol{J}_r$的补。还令$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_r)$和$\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)$是$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{B}$的主子矩阵，它们分别由相应于在$\boldsymbol{I}_r$与$\bar{\boldsymbol{I}}_r$中的整数的列所组成。用通常的方法应用比耐一柯西定理[参看(11)]来展开$\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'$与$\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}'$，我们有

$$\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}' = \sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{I}}_r,\ \bar{\boldsymbol{J}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)'$$

$$= \sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)\det\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{I}}_r,\ \bar{\boldsymbol{J}}_r)$$

以及

$$\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}' = \sum_{(I_r)(J_r)}\sum\det\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_r)\det\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{J}_r)\det\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}_r,\ \boldsymbol{J}_r)$$

$$= (k(\boldsymbol{Q})/k(\boldsymbol{B}))\sum_{(I_r)(J_r)}\sum(-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}\times$$

$$\times\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)\det\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}_r,\ \boldsymbol{J}_r)$$

因为$\boldsymbol{X}$是$\boldsymbol{W}$的逆，利用雅各比定理[参看[11]]，我们有：

$$\det\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{J}_r) = (-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}\det\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{J}}_r,\ \bar{\boldsymbol{I}}_r)/\det\boldsymbol{W}$$

因此

$$\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}' = (k(\boldsymbol{Q})/k(\boldsymbol{B}))\sum_{(I_r)(J_r)}\sum\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)\det\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{J}}_r,\ \bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{W}$$

$$= \frac{k(\boldsymbol{Q})}{k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{W}}\sum_{(I_r)(J_r)}\sum\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{I}}_r)\det\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{J}}_r)\det\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{I}}_r,\ \bar{\boldsymbol{J}}_r)$$

$$= k(\boldsymbol{Q})(\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}')/(k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{W})$$

得出定理。定理证毕。

**推论5.** 如果$\boldsymbol{W}$是非奇异的，那么

$$\det\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_f' = (\det\boldsymbol{W})(\det\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{Q}_f') = (\det\boldsymbol{W})(\det\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}')$$

如果$\boldsymbol{Z}_b$与$\boldsymbol{Y}_b$分别是给定网络$N$的$e$阶支路阻抗矩阵与支路导纳矩阵，矩阵乘积$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{Q}'$分别称为给定网络$N$的回路阻抗矩阵$\boldsymbol{Z}_m$与割集导纳矩阵$\boldsymbol{Y}_c$。特别是，与$N$的关联矩阵$\boldsymbol{A}$相对应的割集导纳矩阵称为节点导纳矩阵（用$\boldsymbol{Y}_n$来表示）。上述讨论的某些结果，现在可以叙述如下：

**推论6.** 〔Cederbaum[7]〕与基本回路系统相关联的回路阻抗矩阵或基本割集系统相对应的割集导纳矩阵的行列式，在从一种系统转换到另一种系统时，它们是保持不变的。这种行列式的绝对值是给定网络可能的最小绝对值。

**推论7.** 〔Cederbaum[7]〕与具有$r$个独立节点对电压系统相对应的割集导纳矩阵的行列式具有最小的绝对值，因此在上述一种系统转换到另一种系统时，这些行列式是保持不变的。如果网络是平面的，由网络的窗口而形成的回路阻抗矩阵的行列式具有最小的绝对值。

〔在Cederbaum的定理中未出现"绝对值"这一术语。〕

**推论8.** 〔Jeams[1]，Percival[2]以及Shekel[8]。〕。节点导纳矩阵的行列式相对于该网络中参考节点的选取是保持不变的。

证明：令$\boldsymbol{A}_{ci}$是从完备关联矩阵$\boldsymbol{A}_c$删去其第$i$行而得的关联矩阵。因为$\det\boldsymbol{A}_{ci}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}_{ci}'$相对于任意$i$是不变的，又因$\boldsymbol{A}_{ci}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}_{ci}'$是用节点$i$作为参考点，故本推论由此而得出，推论证毕。

定理3的一个直接结果如下：

**推论9.** 任意两个回路阻抗矩阵的行列式或任意两个割集矩阵的行列式，它们用一个实常数来建立相互联系。

上述推论的第一部分是由Seshu得到的[5]。因此，网络行列式的极点与零点与回路电流与割集电压的选取无关，尤其与网络中的节点对电压的选取无关。

回路阻抗矩阵的行列式与割集矩阵行列式之间的关系可直接从定理3得到，并给出如下：

**推论10.** 如果$\boldsymbol{Z}_b$是非奇异的，那么

$$k(\boldsymbol{Q})\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{B}'=k(\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{Z}_b)(\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{Q}'),$$

此处$\boldsymbol{Y}_b=\boldsymbol{Z}_b^{-1}$

**推论11.** 〔Cederbaum[7]〕如果$\boldsymbol{Z}_b$是非奇异的，那么回路阻抗矩阵的行列式与割集导纳矩阵行列式最小绝对值的比值等于支路阻抗矩阵行列式的绝对值。

在单向传递率（transmittances），即不形成任何闭合回路的情况下，我们可以重新给支路编号，使$\boldsymbol{Z}_b$为三角形矩阵，因此我们有：

**推论12.** 〔Tsang[4]〕如果一个网络的传递率没有形成任何闭合回路，那么回路阻抗矩阵的行列式和节点导纳矩阵的行列式的最小绝对值之比等于所有支路策动点阻抗的乘积。该比值与给出的传递率无关。

实际上，用任意的割集导纳矩阵代替节点导纳矩阵时，这结论也是正确的。

Tsang在〔4〕中导出，其结论是假设回路阻抗矩阵的行列式在相对于独立回路的选取是保持不变的。因此在他的定理中未出现"最小值"这一术语。推论10的另一种不同的形式如下：

**推论13.** 如果$\boldsymbol{Z}_b$是非奇异的，那么回路阻抗矩阵的行列式与割集导纳矩阵的行列式之比等于该网络的支路阻抗矩阵的行列式的实常数倍。此处该实常数仅与所选的回路与割集有关。

**推论14.** 回路阻抗矩阵与割集导纳矩阵的行列式的极点和零点仅仅相差了包含在该网络的支路阻抗矩阵行列式中的极点与零点。

**推论15.** 对一个无互感的无源RLC网络，回路阻抗矩阵的行列式与割集导纳矩阵的行列式除了原点与无穷远处之外，它们具有相同的零点。

## 4. 广义网络矩阵的行列式的广义余子式

在本节中我们将研究广义网络矩阵的行列式的“广义余子式”保持不变的条件（“广义余子式”是一些准确定义的量），以致于它们可用来证明一个网络的网络函数相对于所选取的回路电流或割集电压来说是保持不变的。

对于一个给定的矩阵$\boldsymbol{F}$，令符号$\boldsymbol{F}_{-i}$是用来表示从$\boldsymbol{F}$中删去其第$i$行而得到的矩阵。如果$\boldsymbol{F}$是$p\times q$阶，$p\leqslant q$，那么所谓$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}_K)$，我们意指一个$p\times k$阶的由相应于$\boldsymbol{I}_K$中的整数的各列而组成的矩阵，式中$\boldsymbol{I}_K=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}$。

因为一般说来$\boldsymbol{B}_{-i}$（或$\boldsymbol{Q}_{-i}$）的主子矩阵的行列式都不具有相同的值，我们寻找某些具有这种性质的量是重要的。作为一个例子，研究§2中所给出的回路矩阵$\boldsymbol{B}$。如果我们从$\boldsymbol{B}$中删去第4行，则我们有：

$$\boldsymbol{B}_{-4}=\begin{matrix}(e_1e_2e_6e_5e_4)\\(e_1e_2e_6e_7e_4)\\(e_1e_2e_3e_7e_8)\end{matrix}\overset{\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1&1&0&0\\1&1&0&-1&0&-1&1&0\\1&1&1&0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}}$$

很容易校验包含$\boldsymbol{B}_{-4}$第1，2，3列的主子矩阵的行列式具有的值为1，而相应于第2，3，4列的主子矩阵的行列式具有的值为$-2$。因此，它们并不具有相同的值。为方便起见，令$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$与$\boldsymbol{Q}=[q_{ij}]$。定义

$$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_{ij}\det\boldsymbol{B}_{-i}(\boldsymbol{I}_{n-1})$$

及

$$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{I}_{r-1})=\sum^{r}(-1)^i q_{ij}\det\boldsymbol{Q}_{-i}(\boldsymbol{I}_{r-1})$$

**引理5.** 令$\boldsymbol{B}''$与$\boldsymbol{B}^*$是$G$的两个秩为$n$的回路矩阵，$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{Q}^*$是$G$的两个秩为$r$的割集矩阵。那么，如果$j$不在$\boldsymbol{I}_{n-1}$与$\boldsymbol{I}_{r-1}$中，则

$$k(\boldsymbol{B}^*)^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}'';\boldsymbol{I}_{n-1})|=k(\boldsymbol{B}'')^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}^*;\boldsymbol{I}_{n-1})|$$

$$k(\boldsymbol{Q}^*)^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q}'';\boldsymbol{I}_{r-1})|=k(\boldsymbol{Q}'')^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q}^*;\boldsymbol{I}_{r-1})|$$

并若$j$在$\boldsymbol{I}_{n-1}$与$\boldsymbol{I}_{r-1}$中，则它们均为零。

证明：我们将证明回路矩阵部分，因为割集矩阵部分可用完全类似的方法加以证明。如果$j$不在$\boldsymbol{I}_{n-1}$中，那么

$$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}'';\ \boldsymbol{I}_{n-1})=\pm\det\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{I}_{n-1}\cup\{j\})$$

以及

$$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{I}_{n-1})=\pm\det\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{I}_{n-1}\cup\{j\})$$

不失一般性地假设$\boldsymbol{B}''(I_{n-1}\cup\{j\})$是$\boldsymbol{B}''$的主子矩阵。因为

$\det\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{I}_{n-1}\cup\{j\})=\pm k(\boldsymbol{B}'')^{\frac{1}{2}}$以及$\det\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{I}_{n-1}\cup\{j\})=\pm k(\boldsymbol{B}^*)^{\frac{1}{2}}$，所以得到该引理。如果$j$在$\boldsymbol{I}_{n-1}$中，我们来研究矩阵$\boldsymbol{R}$，它是从$\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{I}_{n-1})$，将$\boldsymbol{B}''$的第$j$列插到相应于$\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{I}_{n-1})$第$j$列的左面而得到的。现在如果我们沿着插入的列来展开$\det\boldsymbol{R}$，我们可求得$\det\boldsymbol{R}=\pm\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}'';\ \boldsymbol{I}_{n-1})$。因为$\boldsymbol{R}$具有两个相同的列，因而得出引理，引理证毕。

因此，如果$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1})$与$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1})$是非零的，此处

$$\boldsymbol{J}_{n-1}=\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-1}\},$$

那么它们具有相同的值。这对于割集也类似成立。

**推论16.** $\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}_f;\ \boldsymbol{I}_{n-1})$ 与$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q}_f;\ \boldsymbol{I}_{r-1})$ 的值相对于从一种基本系统转换到另一种基本系统时是不变的，并且它们都等于1。

**引理6.**

$$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{B}'';\ \boldsymbol{I}_{n-1})\ \boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}'';\ \boldsymbol{J}_{n-1})=(k(\boldsymbol{B}'')/k(\boldsymbol{B}^*))\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{I}_{n-1})\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{J}_{n-1}),$$

$$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{Q}'';\ \boldsymbol{I}_{r-1})\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q}'';\ \boldsymbol{J}_{r-1})=(k(\boldsymbol{Q}'')/k(\boldsymbol{Q}^*))\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{Q}^*;\ \boldsymbol{I}_{r-1})\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q}^*,\ \boldsymbol{J}_{r-1})$$

**推论17.** 当且仅当在$G$中相应于$\boldsymbol{I}_{r-1}$中整数的边形成2-树，并将相应于整数$j$的边$e_j$的两个端点分开，则$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{I}_{r-1})$是非零的。当且仅当相应于$\boldsymbol{I}_{n-1}$中的整数的各边而在$G-e_i$中形成补树时，则$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1})$为非零。

证明，因为当且仅当$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_{r-1}\cup\{j\})$ 是$\boldsymbol{Q}$的一个使得$j$不在$\boldsymbol{I}_{r-1}$中的主子矩阵，则$\boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{I}_{r-1})$ 为非零，同时当且仅当$\boldsymbol{Q}$ $(\boldsymbol{I}_{r-1}\cup\{j\})$ 的各列形成一个包含有$G$中的$e_j$边的树时，$\det\boldsymbol{Q}$ $(\boldsymbol{I}_{r-1}\cup\{j\})\neq 0$。该推论的第一部分立即得到。类似地，我们可证明推论的第二部分。推论证毕。

对于一个给定的$e$阶矩阵$\boldsymbol{W}$和$\boldsymbol{X}$，令

$$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{iu}b_{jv}\det\boldsymbol{B}_{-i}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'_{-j}$$

以及

$$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{i+j}q_{iu}q_{jv}\det\boldsymbol{Q}_{-i}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}'_{-j}$$

$u$, $v=1$, 2, …, $e$。在我们的场合下，我们将$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$ 与$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$ 分别称为 $\det\boldsymbol{BWB}'$与$\det\boldsymbol{QXQ}'$的广义余子式。采用这一名字的理由在于在附加一些约束后它们可化简为通常的余子式。例如，如果在$G$中相应于$\boldsymbol{B}$中第$u$列与第$v$列的边$e_u$与$e_v$仅包含在相应于$\boldsymbol{B}$中的第$k$行与第$m$行的回路$C_k$与$C_m$中，并且分别与$c_k$及$c_m$回路的指向相同，那么我们有

$$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})=(-1)^{k+m}\det\boldsymbol{B}_{-k}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'_{-m},$$

它实际上就是$\det\boldsymbol{BWB}'$的第 $(k,\ m)$ 个余子式。〔所谓第 $(k,\ m)$ 余子式我们意指是在$\boldsymbol{BWB}'$中元素$z_{km}$的余子式，此处$\boldsymbol{BWB}'=[z_{ij}]$〕。如果$G$的边与回路是用这种方法$k=u$与$m=v$来标记，那么$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$就化简为$\det\boldsymbol{BWB}'$的第 $(u、v)$ 余子式。这对于$\det\boldsymbol{QXQ}'$的广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$也类似成立。

下面，我们将证明，在一定条件下上面所定义的广义余子式相对于回路与割集的选取，它们是保持不变的。

**定理4.** 令$\boldsymbol{B}''$与$\boldsymbol{B}^*$是图$G$的两个秩为$n$的回路矩阵，$\boldsymbol{Q}''$与$\boldsymbol{Q}^*$是图$G$的两个秩为$r$的割集矩阵。那么对于任意给定的$e$阶矩阵$\boldsymbol{W}$和$\boldsymbol{X}$来说，我们有：

$$k(\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}'')=k(\boldsymbol{B}'')\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}^*)\text{以及}k(\boldsymbol{Q}^*)\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q}'')=k(\boldsymbol{Q}'')\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q}^*)$$

$u$与$v=1$, 2, …, $e$。

证明，令$\boldsymbol{B}''=[b''_{ij}]$，$\boldsymbol{B}^*=[b^*_{ij}]$，$\boldsymbol{Q}''=[q''_{ij}]$，以及$\boldsymbol{Q}^*=[q^*_{ij}]$。那么

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}'')\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b''_{iu}b''_{jv}\det\boldsymbol{B}''_{-i}\boldsymbol{W}(B''_{-j})'\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[(-1)^{i+j}b''_{iu}b''_{jv}\sum_{(I_{n-1})}\sum_{(J_{n-1})}\times\end{aligned}$$

$$\times (\det \boldsymbol{B}''_{-i}(\boldsymbol{I}_{n-1}) \det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1}) \det \boldsymbol{B}''_{-j}(\boldsymbol{J}_{n-1}))\Big]$$

$$= \sum_{(I_{n-1})} \sum_{(J_{n-1})} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{*} (-1)^i b''_{iu} \det \boldsymbol{B}''_{-i}(\boldsymbol{I}_{n-1})\Big) \times$$

$$\times \det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1}) \Big(\sum_{j=1}^{*} (-1)^j b''_{jv} \det \boldsymbol{B}''_{-j}(\boldsymbol{J}_{n-1})\Big)\Big]$$

$$= \sum_{(I_{n-1})} \sum_{(J_{n-1})} \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B}'';\boldsymbol{I}_{n-1}) \det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1}) \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B}'';\ \boldsymbol{J}_{n-1})$$

$$= \sum_{(I_{n-1})} \sum_{(J_{n-1})} k(\boldsymbol{B}'') \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{I}_{n-1}) \det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1}) \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{J}_{n-1})/k(\boldsymbol{B}^*)$$

$$= (k(\boldsymbol{B}'')/k(\boldsymbol{B}^*)) \sum_{(I_{n-1})} \sum_{(J_{n-1})} \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{I}_{n-1}) \det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1}) \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B}^*;\ \boldsymbol{J}_{n-1})$$

$$= (k(\boldsymbol{B}'')/k(\boldsymbol{B}^*)) \boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}^*)$$

类似地，我们可证明其它情况。定理证毕。

**推论18．** $\det \boldsymbol{B}_f \boldsymbol{W} \boldsymbol{B}'_f$与$\det \boldsymbol{Q}_f \boldsymbol{X} \boldsymbol{Q}'_f$的广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}_f)$与$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q}_f)$相对于从一种基本系统转换到另一种基本系统时是保持不变的。

**推论19．** 对于一个给定的$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$，当且仅当分别有$k(\boldsymbol{B})=1$与$k(\boldsymbol{Q})=1$时，$\det \boldsymbol{B} \boldsymbol{W} \boldsymbol{B}'$与$\det \boldsymbol{Q} \boldsymbol{X} \boldsymbol{Q}'$的广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$与$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$若不等于零，则达到其最小值。

**推论20．** 对于一个给定的$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$，广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}_f)$，$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}_p)$，$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q}_f)$以及$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{A})$具有它们最小的绝对值。

定理2与定理4的一个直接结果如下。

**推论21．** 比值 $\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})/\boldsymbol{M}_{ts}(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})/\det \boldsymbol{B} \boldsymbol{W} \boldsymbol{B}'$，$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})/\boldsymbol{M}_{ts}(\boldsymbol{Q})$ 以及 $\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})/\det \boldsymbol{Q} \boldsymbol{X} \boldsymbol{Q}'$相对于选定的各回路与各割集是保持不变的。

令$S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ e\}$。对于在$S$中的$u$与$v$，令$S^{uv}=S-\{u,\ v\}$。为方便起见，符号$\boldsymbol{I}_k^{uv}$与$\boldsymbol{J}_k^{uv}$用来表示$S^{uv}$的子集，其中每个子集包含$k$个元素。所谓$\overline{\boldsymbol{I}_k^{uv}}$与$\overline{\boldsymbol{J}_k^{uv}}$分别意指$S^{uv}$中$\boldsymbol{I}_k^{uv}$与$\boldsymbol{J}_k^{uv}$的补。根据这些定义，我们有：

**引理7．** 如果$u$与$v$是相邻的整数，则

$$k(\boldsymbol{Q}) \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}) \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}) = k(\boldsymbol{B})(-1)^{a+b+1} \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}}) \boldsymbol{M}^{uu}(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}),$$

此处$a$与$b$是分别包含在$\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}}$与$\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}$中的整数的和。

证明：不失一般性地假设$v>u$，因为

$$\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}) = (-1)^{u'} \det \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv} \cup \{u\})$$

以及

$$\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}) = (-1)^{v'} \det \boldsymbol{B}(\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv} \cup \{v\}),$$

此处$u'$与$v'$分别表示相应于在$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv} \cup \{u\})$与$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv} \cup \{v\})$中的整数的列的列标号。从推论4得到

$$[k(\boldsymbol{Q})/k(\boldsymbol{B})] \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}) \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv})$$

$$= (-1)^{u'+v'+a+b+u+v}\det\boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}} \cup \{v\})\det\boldsymbol{Q}\ (\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}} \cup \{u\})$$

因为
$$\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}}) = (-1)^{uv}\det\boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}} \cup \{v\})$$

以及
$$\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) = (-1)^{u''}\det\boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}} \cup \{u\}),$$

此处$v''$与$u''$分别表示在$\boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}} \cup \{v\}$与$\boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}} \cup \{u\})$ 的整数$v$和$u$列的列标号，且$u = u' + v'' - 1$以及$v = v' + u''$，由此得到

$$k(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1}^{uv})\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}) = (-1)^{a+b+1}\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}})k(\boldsymbol{B}),$$

此引理得证。

令$\boldsymbol{W} = [w_{ij}]$。为方便起见，如果在$i \neq u$与$i = 1, 2, \cdots, e$时，$w_{ui} = w_{iu} = 0$ 以及在$j \neq v$与$j = 1, 2, \cdots, e$时，$w_{vj} = w_{jv} = 0$，我们将称对应于$\boldsymbol{W}$的$u$行（列）与$v$行（列）的$G$的边$e_u$与$e_v$是孤立的。换句话，如果$w_{uu} \neq 0$与$w_{vv} \neq 0$，$w_{uu}$与$w_{vv}$仅是在这些行与列中的一个非零元素。所谓$\boldsymbol{W}_{uu,vv}$，我们意指是从$\boldsymbol{W}$删去第$u$，$v$行与第$u$，$v$列而得到的矩阵。

**定理5.** 如果$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{W}_{uu,vv}$是非奇异的使$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}^{-1}$，那么

$$k(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}) = -k(\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{W}_{uu,vv})\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$$

适用于所有$G$的$u \neq v$的孤立边$e_u$与$e_v$。

证明：因为交换$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{Q}$的各列与交换相应的$\boldsymbol{W}$或$\boldsymbol{X}$的行与列不会改变$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$与$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$的值。不失一般性地假设$u$与$v$是相邻的整数。令$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}_{uu,vv}$。得到一个与定理4证明中给出的类似的论述，我们有：

$$-\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$$

$$= -\sum_{(I_{n-1})}\sum_{(J_{n-1})} \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1})\det\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1};\ \boldsymbol{J}_{n-1})\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1})$$

$$= -\sum_{(I_{n-1}^{uv})}\sum_{(J_{n-1}^{uv})} \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{I}_{n-1}^{uv})\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv})\det\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv})$$

$$= \sum_{(I_{n-1}^{uv})}{}'\sum_{(J_{n-1}^{uv})} (k(\boldsymbol{B})/k(\boldsymbol{Q}))\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) \times$$
$$\times (-1)^{a+b}\det\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv})$$

$$= (k(\boldsymbol{B})/k(\boldsymbol{Q}))\sum_{(I_{n-1}^{uv})}\sum_{(J_{n-1}^{uv})} \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) \times$$
$$\times (-1)^{a+b}\det\boldsymbol{H}(\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv};\ \boldsymbol{J}_{n-1}^{uv})$$

$$= (k(\boldsymbol{B})/k(\boldsymbol{Q}))\sum_{(I_{n-1}^{uv})}\sum_{(J_{n-1}^{uv})} \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) \times$$
$$\times \det\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}},\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\det\boldsymbol{H}$$

$$= (k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{H}/k(\boldsymbol{Q}))\sum_{(I_{n-1}^{uv})}\sum_{(J_{n-1}^{uv})} \boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) \times$$
$$\times \det\boldsymbol{X}(\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})$$

$$= (k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{H}/k(\boldsymbol{Q}))\sum_{(\overline{J_{n-1}^{uv}})}\sum_{(\overline{I_{n-1}^{uv}})} \boldsymbol{M}_u(\boldsymbol{Q};\ \overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}}) \times$$
$$\times \det\boldsymbol{X}(\overline{\boldsymbol{J}_{n-1}^{uv}};\ \overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{Q};\overline{\boldsymbol{I}_{n-1}^{uv}})$$

$$= (k(\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{H}/k(\boldsymbol{Q}))\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$$

此处第二行由引理5及以下事实得到：因为$e_u$与$e_v$是$G$的孤立边，若$v$在$\boldsymbol{I}_{n-1}$中或$u$在$\boldsymbol{J}_{n-1}$中，矩阵三重乘积为零，同时第5行是利用我们在定理4证明中的雅各比定理而得到的。定理证毕。

**推论22.** 如果$e_u$和$e_v$是$G$的孤立边，$u\neq v$，那么

$$-\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B}_f)=(\det\boldsymbol{W}_{uu,vv})\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q}_f)=(\det\boldsymbol{W}_{uu,vv})\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{A})$$

**推论23.** 如果$e_s$，$e_v$，$e_t$与$e_s$是$G$的孤立边，并且如果W，$W_{uu,vv}$与$W_{tt,ss}$是非奇异的，使得$X=W^{-1}$，那么对于$s\neq t$及$u\neq v$，我们有

$$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})/\boldsymbol{M}_{ts}(\boldsymbol{B})=K_1\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})/\boldsymbol{M}_{ts}(\boldsymbol{Q})$$

以及

$$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})/\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'=K_2\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})/\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}',$$

此处 $K_1=w_{tt}w_{ss}/w_{uu}w_{vv}$ and $K_2=-1/w_{uu}w_{vv}$

如果$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$分别是一个网络的非奇异的支路阻抗矩阵与支路导纳矩阵，因此不难看出网络函数总可以表示为一个网络行列式与它的一个广义余子式之比或者它的两个广义余子式之比。例如，在分析中采用回路电流时，我们从该网络移去所有的独立源（除了支路$e_u$中的独立源之外），在对应于整数$u$与$v$的支路$e_u$与$e_v$之间的转移导纳由比值$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})/\det\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}'$给出，即由于在$e_u$中的一个电压信号源在$e_u$的箭头处带有参考十号，在支路$e_v$中电流以$e_v$作为参考方向。类似地，如果采用割集电压，在支路$e_u$与$e_v$之间的转移阻抗是由比值$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})/\det\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}'$给出，即由于在$e_u$的电流信号源用$e_u$来作为参考方向，则在支路$e_v$上的电压在$e_v$的箭头处带有参考十号。

**定理6.** 一个网络的网络函数，在回路电流或割集电压选为变量时，它相对于参考系的转换是保持不变的。

**5. 拓扑公式的简单推导**

令图2表示一个无互感的无源双口网络$N$，输入节点为1与1′，输出节点为2与2′。仿照Seshu和Reed在[9]中的表示法，令$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y})$表示树支导纳乘积之和。$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y})$表示2-树导纳乘积之和，下标所表示的节点需要在$N_1$的不同部分。令$C[\boldsymbol{W}^*(\boldsymbol{Z})]$是$N$中2-树阻抗乘积$\boldsymbol{W}^*(\boldsymbol{Z})$的补的和。注意到$\boldsymbol{W}_{2,2'}(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{W}_{2,2'}^*(\boldsymbol{Z})$。

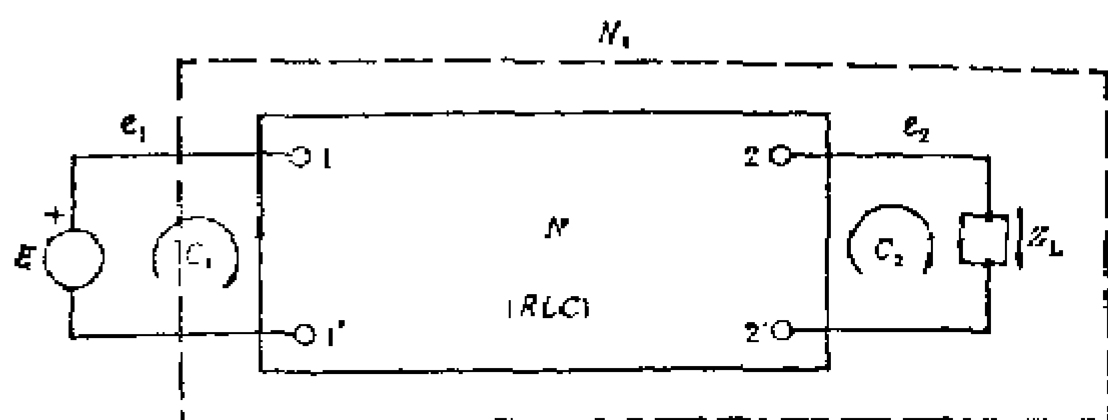



图2 约定了参考方向的双口网络。节点1′用于表示节点系统的参考点

下面，我们将证明，利用前面建立的恒等式，所有拓扑公式可较容易地从节点导纳矩阵$\boldsymbol{Y}_n$的行列式来导出。*而这些行列式是可以较简单地建立的。为方便起见，令

$$\Delta^n=\det\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}'\text{以及}\Delta_{ij}^n=(-1)^{i+j}\det\boldsymbol{A}_{-i}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}'_{-j},$$

此处$\boldsymbol{Y}_b=\boldsymbol{X}$。大家知道如果节点1′用来作为参考节点，那么[见[9]]

---

* 基尔霍夫定律简单的线性代数证明是由Nerode及Shank在[16]中给出。

$$\Delta^{c} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y})\text{以及}\Delta_{ij}^{c} = \boldsymbol{W}_{ij,1'}(\boldsymbol{Y})$$

**推论24.** $\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{A}) = \Delta_{12}^{c} - \Delta_{12'}^{c} = \boldsymbol{W}_{12,1'2'}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{W}_{12',1'2}(\boldsymbol{Y})$

证明：因为$\Delta_{12}^{c} = \boldsymbol{W}_{12,1'}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{W}_{12,1'2'}(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{W}_{122',1'}(\boldsymbol{Y})$以及

$$\Delta_{12'}^{c} = \boldsymbol{W}_{12',1'}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{W}_{12',1'2}(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{W}_{122',1'}(\boldsymbol{Y}),$$

该推论立即得到。

**推论25.** 如果支路$e_1$与$e_2$分别地仅包含在割集1与2中，并且与割集的方向相同地指向，则在割集导纳矩阵$\Delta^{c}$中第(1, 2)元素的余子式$\Delta_{12}^{c}$由下式给出：

$$\Delta_{12}^{c} = k(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{A}) = k(\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{W}_{12,1'2'}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{W}_{12',1'2}(\boldsymbol{Y}))$$

证明：该推论直接从$\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{Q})$的定义与定理4中得到。

**推论26.** 如果支路$e_1$和$e_2$分别地仅包含在回路1与2中，那么在回路阻抗矩阵行列式$\Delta^{m}$的第(1, 2)元素的余子式$\Delta_{12}^{m}$由下式给出：

$$\Delta_{12}^{m} = k(\boldsymbol{B})(C[\boldsymbol{W}_{12,1'2'}^{*}(\boldsymbol{Z})] - C[\boldsymbol{W}_{12',1'2}^{*}(\boldsymbol{Z})])$$

鉴于这一方程，指出了[9]中定理(7—13)的错误论述。在那个定理中k($\boldsymbol{B}$)项丢失了。这一错误是因为一般说来非零主子行列式具有的值并不是1的缘故。

证明：因为从$\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{B})$的定义$\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{B}) = -\Delta_{12}^{m}$,

利用定理5我们有

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{B}) &= k(\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{W}_{11,22})\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{A}) \\
&= k(\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{W}_{11,22})(\boldsymbol{W}_{12,1'2'}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{W}_{12',1'2}(\boldsymbol{Y})) \\
&= k(\boldsymbol{B})(C[\boldsymbol{W}_{12,1'2'}^{*}(\boldsymbol{Z})] - C[\boldsymbol{W}_{12',1'2}^{*}(\boldsymbol{Z})]),
\end{aligned}$$

此处$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Z}_b$。推论证毕。

推论26是众所周知的适用于网孔系统的基尔霍夫规则，它的证明是由 Obermeyer 在[9]中给出的。但是，其证明冗长而麻烦。在文献中(见[9])，总是假定仅当譬如说第$i$个回路或割集至少有一个元素不在任何其它的回路或割集中，对于这种网络的余子式才是感兴趣的。实际上这一点并不必要，正如在下列推论中所见。当然这一假设会使问题大大地简化。

**推论27.** 如果采用广义割集与广义回路时，那么

$$\boldsymbol{M}_{12}(Q) = k(\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{W}_{12,1'2'}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{W}_{12',1'2}(\boldsymbol{Y}))$$

$$-\boldsymbol{M}_{12}(\boldsymbol{B}) = k(\boldsymbol{B})(C[\boldsymbol{W}_{12,1'2'}^{*}(\boldsymbol{Z})] - C[\boldsymbol{W}_{12',1'2}^{*}(\boldsymbol{Z})])$$

**6. 不变性与关联函数**

前面，我们已经研究了广义网络矩阵的行列式及其广义余子式相对于给定有向图在选取回路与割集时呈现不变性的问题。

在本节中我们将研究这些行列式相对于一个图的关联函数呈现不变性的相应问题[见[15]46及177—186]。

对于一个有向图$G$来说，$G$的各边的取向（箭头方向）可用所谓$G$的边集合的关联函数来描述。在本节中我们将证明，如果$G$的关联函数改变时，广义网络矩阵$\boldsymbol{BWB}'$与$\boldsymbol{QXQ}'$的行列式及其广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$与$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$，一般说来不能保持不变。但是，如果矩阵$\boldsymbol{W}$和$\boldsymbol{X}$分别是一个电网络的支路阻抗矩阵与支路导纳矩阵时，这些行列式与余子式对于网络图的关联函数的选取是保持不变的。具体讲，我们将证明，在[15]中 Slepian 的关于相对一个电阻性网络的关联函数的不变性可很容易地通过前面几节所讨论的方法来导出。

作为一个例子，研究如图3(a)中所示的有向图$G$。令$\boldsymbol{B}$是$G$的相应于两个窗口的$G$的回路矩阵，除了$w_{15}$(它为$w_6$)之外，令$w_{ii} = w_i$及$w_{ij} = 0$, $i \neq j$，其中$\boldsymbol{W} = [w_{ij}]$及$i$, $j = 1$, 2,

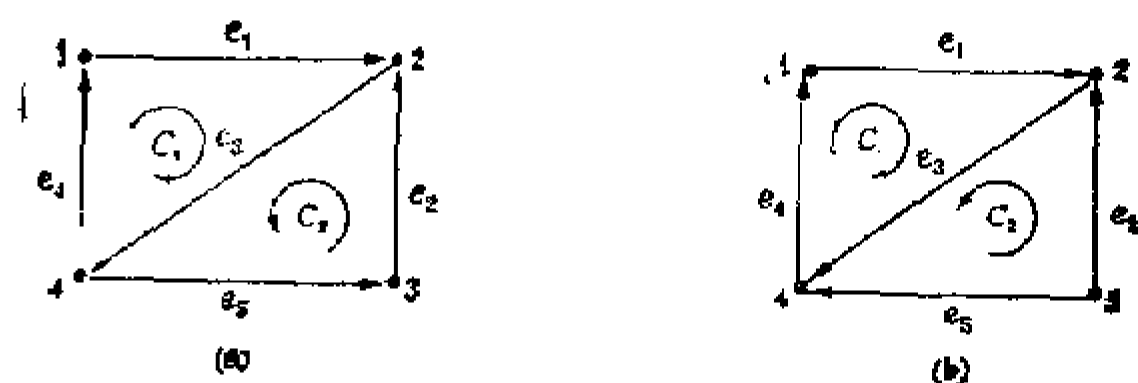



图3 (a) 有向图$G$ (b) 将$G$中$e_5$的指向改变时所得到的有向图$G_1$

3，4，5。那么我们有

$$\boldsymbol{BWB}'=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1&0&0&0&0\\0&w_2&0&0&0\\0&0&w_3&0&w_6\\0&0&0&w_4&0\\0&0&0&0&w_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}w_1+w_2+w_4 & w_3+w_6\\ w_3 & w_2+w_3+w_5+w_6\end{bmatrix},$$

$$\det\boldsymbol{BWB}'=(w_1+w_4)(w_2+w_3+w_5+w_6)+w_3(w_2+w_5)$$

现在，如果我们把$G$中$e_6$边的指向倒过来，我们得到图3(b)中所示的新有向图$G_1$。如果$\boldsymbol{B}_1$是相应于$G_1$中的回路矩阵，那么

$$\det\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{WB}_1'=(w_1+w_4)(w_2+w_3+w_6-w_6)+w_3(w_2+w_5)$$

类似地，$\det\boldsymbol{BWB}'$与$\det\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{WB}_1'$的广义余子式$\boldsymbol{M}_{21}(\boldsymbol{B})$与$\boldsymbol{M}_{21}(\boldsymbol{B}_1)$分别由下式给出：

$$\boldsymbol{M}_{21}(\boldsymbol{B})=-(w_3+w_6)\text{以及}\boldsymbol{M}_{21}(\boldsymbol{B}_1)=-(w_3-w_6)$$

因此，我们可以断定广义网络矩阵的行列式及其广义余子式一般说来对于此图改变关联函数的选取时，它们不能保持不变。但是它们在一定的条件下，并且对于最一般的最重要的表示电网络的图，它们则保持不变。

对于一个给定图$G$，令$G_1$是从$G$利用改变$G$中某些边的方向而得到的图。如果$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}_1$分别是$G$与$G_1$的回路矩阵（阶数为$n\times e$，秩为$n$），它们分别对应于$G$与$G_1$中相同的回路集合，那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}$$

此处$\boldsymbol{D}$是$e\times e$阶的对角线矩阵，其第$i$个元素$d_{ii}$对应于$G$（或$G_1$）的边$e_i$，如果$G$中$e_i$边的方向与$G_1$中$e_i$的方向相同时，$d_{ii}=1$，否则$d_{ii}=-1$。加以稍微的推广，若$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}_1$是相应于$G$与$G_1$中两种不同的回路集合，由此得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CB}_1\boldsymbol{D},$$

此处C是$n\times n$阶非奇异矩阵。

现在我们来研究某些充分条件，在这些条件下，广义网络矩阵的行列式及其广义余子式的行列式相对于所选的关联函数变化时，它保持不变。但这一特性的一般问题尚未解决。

**推论28.** 如果矩阵$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$是对角线的，则与一个有向图$G$关联的广义网络矩阵$\boldsymbol{BWB}'$和$\boldsymbol{QXQ}'$的行列式及其广义余子式$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{B})$和$\boldsymbol{M}_{uv}(\boldsymbol{Q})$相对于$G$的所选关联函数变化时，它们保持不变。

证明：我们仅研究回路的情况，因为其它情况可完全类似地加以证明。在我们的场合下，充分性是证明：如果$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}_1$分别是相应于$G$与$G_1$中相同回路集合的回路矩阵，那么

$$\det \boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}' = \det \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1',$$

此处所有其它符号如上面定义。这是显然的，因为

$$\det \boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}' = \det \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{B}_1' = \det \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1'$$

该推论便从$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'$是$e$阶单位矩阵的这一事实而直接得到。

因此，在[15]中 Slepian 关于电阻性网络相对于所选网络的关联函数的变化，其行列式的不变性可从上述推论而直接得到。事实上，我们将证明，如果$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{X}$是一般电网络的支路阻抗矩阵与支路导纳矩阵，则网络行列式将如同电阻性网络那样即保持不变。

对于一个给定的电网络$N$，令$G$与$G_1$是$N$的两个关联有向图(仅仅表现出各支路的互相连接，而未表示出支路电压与电流的各种关系)，$G$与$G_1$对应于支路电流或支路电压的两种不同的参考方向的选取。按照习惯，我们假设在每个支路电压上的参考正号是在支路电流参考箭头的尾部。不失一般性地我们假设$G$与$G_1$是选取相同的回路集合。利用上面对于$G$与$G_1$所定义的符号，我们有$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}$。令$\boldsymbol{I}_b(\boldsymbol{I}_b'')$及$\boldsymbol{V}_b(\boldsymbol{V}_b'')$分别是$G(G_1)$中相应的支路电流与支路电压。那么

$$\boldsymbol{V}_b = \boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{I}_b \text{及} \boldsymbol{V}_b'' = \boldsymbol{Z}_b''\boldsymbol{I}_b''$$

此处$\boldsymbol{Z}_b$与$\boldsymbol{Z}_b''$分别是对应于$N$的$G$与$G_1$中支路电流与支路电压在两种不同选择方向时的支路阻抗矩阵。因为

$$\boldsymbol{V}_b = \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_b'' \quad \boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{D}\boldsymbol{I}_b''$$

由此得到，经过简单的代换并考虑到$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'$是单位矩阵，我们有

$$\boldsymbol{Z}_b'' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{D}'$$

因此，一般网络的回路阻抗矩阵相对于所选的关联函数变化时，其行列式的不变性可容易地如下得到：

$$\det \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{B}' = \det \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}_1' = \det \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{D}')\boldsymbol{B}_1' = \det \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Z}_b''\boldsymbol{B}_1'$$

这对于一般网络割集导纳矩阵的行列式以及这些行列式的广义余子式也是类似地成立的。

**定理7**、一个一般电网络行列式及其广义余子式相对于所选该网络的关联函数的变化则保持不变。

## 结　　论

我们已经证明了许多网络行列式的不变性，是从图论的研究来推导而不是从物理论证上来推导的。因此，它们不仅适用于电网络而且还适用于其它系统。因为一般说来余子式相对于回路或者割集的变换来说是保持不变的。它们的值可仅通过某些精确地定义并称为广义余子式来叙述。已经证明虽然广义行列式及广义余子式对于回路与割集的一般系统不是保持不变的，而是通过一个仅仅决定于回路与割集的选择的实常数来建立联系；对于绝大多数以及重要的表示型式——如基本回路系统与基本割集系统、由平面图的窗口形成的网孔以及关联割集的集合，它们都是保持不变的。也已证明，广义网络矩阵的行列式与其一个广义余子式之比以及两个广义余子式之比相对参考系的一般变换来说，它们是保持不变的。尤其是，网络函数对于一般参考系的变化是保持不变的，因为它们总可以表示成上述两种类型的比值。换句话说，我们已经证明许多的网络不变性是网络拓扑的自然结果，而不是网络支路特性的结果。

利用所建立的恒等式，我们已经证明，网络拓扑公式可很容易从一种公式而导出另一种公式。因此所得结果为文献中许多现存的结果的统一化提供了一种透彻的理解。

我们已经证明广义网络矩阵的行列式及其广义余子式，虽然它们对于图的选定关联函数不是保持不变的，但是对于一般电网络则保持不变。

## 参 考 文 献


[1] J. Jeans, *The mathematical theory of electricity and magnetism* (Cambridge University Press, Cambridge, 1948).

[2] W. S. Percival, 'Improved matrix and determinant methods for solving networks', *Proc. IEE (London)* 101 (1954) 258-65.

[3] J. Shekel, 'Two network theorems concerning change of voltage reference terminal', *Proc. IRE*, 42 (1954) 1125.

[4] N. F. Tsang, 'On electrical network determinants', *J. Math. Phys.* 33 (1954) 185-93.

[5] S. Seshu, 'The mesh counterpart of Shekel's theorem', *Proc. IRE*, 43 (1955) 342.

[6] S. Okada, 'On node and mesh determinants', ibid. 43 (1955) 1527.

[7] I. Cederbaum, 'Invariance and mutual relations of electrical network determinants', *J. Math. Phys.* 35 (1956) 236-44.

[8] C. Saltzer, 'The second fundamental theorem of electrical networks', *Quart. Appl. Math.* 11 (1953) 119-23.

[9] S. Seshu and M. B. Reed, *Linear graphs and electrical networks* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961).

[10] N. R. Malik and H. W. Hale, 'Relationships between nonzero determinants formed from vertex and circuit matrices', *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-13 (1966) 196.

[11] A. C. Aitken, *Determinants and matrices*. 9th ed. (Interscience, New York, 1962).

[12] G. Kron. *Tensor analysis of networks* (Wiley, New York, 1939).

[13] D. P. Brown, 'Topological properties of resistance matrices', *SIAM J. Appl. Math.* 16 (1968) 387-94.

[14] I. Cederbaum, 'On network determinants', *Proc. IRE*, 44 (1956) 258-9.

[15] P. Slepian, *Mathematical foundations of network analysis* (Springer-Verlag, New York, 1968).

[16] A. Nerode and H. Shank, 'An algebraic proof of Kirchhoff's network theorem', *Amer. Math. Monthly*, 68 (1961) 244-7.

# 十六、一个有向图的子图及其度数序列


## 摘　要

本文提出了一个给定具有规定度数的有向图存在一个 $(p,s)$ 子图的充要条件。证明了一个有向图的子图问题，一个有向图的度数序列问题，一个无向图的子图问题以及一个无向图的度数序列问题可以用系统的方法来加以处理，因此可以统一现有的许多结果，并且对较复杂的情况提供了一种透彻的理解。


**1.引言**

在不同的文章中出现的一个问题是对于一个给定的具有规定度数的有向图存在子图的充要条件建立一般性的准则。这一问题已由许多作者〔1-9〕作了广泛的研究，并由Ore〔1〕给出了一个完整的解答。该问题的一种特殊情况是确定一个具有规定出度与入度的有向图存在的充要条件。在〔10,11,12〕中已经研究了这种特殊情况的各种情形，并且对这些结果作了总结。

本文的目的是给出存在具有规定度数的 $(p,s)$ 子图的准则以推广 Ore 的结果〔1〕，同时指出这一结果如何地统一现有的许多条件。

**2.预备知识**

一个有向图$G(V,E)$是由集合$V$与集合$E$所组成，$V$中的元素称为节点，$E$中的元素是形如$(i,j)_t$的有序节偶并称为边，此处$i,j\in V$，$t$是一个正整数，当$i=j$时称为自环。在$t=1,2,\cdots,k\geqslant 2$时，若对所有的$t$，$(i,j)_t\in E$，则边$(i,j)_t$称为$G$的并列边。节点$i$称为起始节点，节点$j$称为终止节点。对于每一个$i\in V$来说，符号$d^+(i)$及$d^-(i)$分别表示以$i$作为起始节点与终止节点的$G$的边数，它们也称为在$i$处的$G$的出度与入度。一对$[d^+(i),d^-(i)]$称为节点$i$的度对。对于$X\subseteq V$来说，$\gamma(X)$($\gamma^*(X)$)表示$G$（具有在$X$中的起始（终止）节点的各边的终止（起始）节点的集合。为简便起见，在$t=1$时，我们写成 $(i,j)_t=(i,j)$。$(i,j)$还用来表示并列边$(i,j)_t\in E$中的任何一条。

给定一个有向图$G(V,E)$，假设每一个节点$i\in V$与一个非负的整数$g(i)$相对应，每一条边$(i,j)\in E$与一个非负整数$h(i,j)$相对应。函数$g$是从$V$到非负整数定义的，函数 $h$ 是从 $E$到非负整数定义的。为了简化记号，我们采用下列约定：如果$X$与$Y$是$V$的子集，则 $(X,Y)$ 表示所有方向从$x\in X$指向$y\in Y$的边 $(x,y)$ 的集合；并且，对于任意一个在$V$与 $E$ 上定义的函数$g$或$h$来说，可写成：

$$g(X)=\sum_{x\in X}g(x) \tag{1}$$

$$h(X,Y)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)}h(x,y) \tag{2}$$

我们用一个单元素来表示含有一个元素的集合。* 于是如果$X$仅包含一个元素$x$,我们写成$(x,X)$,$g(x)$,$h(x,Y)$,等等。对于一个有限集合 $S$, 其元素数目用$|S|$来表示。因此$|X|$表示$X$中的节点数, $|(X,Y)|$表示在 $(X,Y)$ 中的边数。

一个 $(p,s)$ 有向图是一个有向图 $G(V,E)$, 其中在所有 $i\neq j$时, $|(i,j)|\leqslant p$, $i,j\in V$; 在所有$i=j$时, $|(i,j)|\leqslant s$, 此处 $(i,j)\in E$, $|(i,j)|$ 表示$G$中从节点$i$到节点$j$的并列边数, $p$与$s$是给定的非负整数。一个 $(p,p)$ 有向图简称为$p$–有向图。

### 3.子图问题

给定一个有向图 $G(V,E)$, 与每一个 $x\in V$ 对应的四个非负整数 $a(x)$, $a'(x)$,$b(x)$与$b'(x)$, 满足

$$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x) \tag{3a}$$

$$0\leqslant b(x)\leqslant b'(x) \tag{3b}$$

问题是求取一个充要条件, 在此条件下$G$具有一个成为生成子图$H$的 $(p,s)$ 有向图, 其出度$d_H^+(x)$与入度$d_H^-(x)$ 满足

$$a(x)\leqslant d_H^+(x)\leqslant a'(x) \tag{4a}$$

$$b(x)\leqslant d_H^-(x)\leqslant b'(x) \tag{4b}$$

为了确定上述条件, 我们把该问题转换为流的问题。

首先从 $G(V,E)$ 构成一个有向二分图 $B(V',V'';E)$ 对于每一个$x\in V$, 有相应的两个节点$x'\in V'$与$x''\in V''$。当且仅当 $(x,y)$ 是$G$的一条边时, 边 $(x',y'')$ 是在边的集合$E$中。我们记住并列边在现在的情况中无需考虑。如果在$G$中从$x$到$y$有并列边, 则相应地有一条边$(x',y'')\in E'$。因此, $B(V',V'';E')$ 是一个与 $G(V,E)$ 对应的 $(1,0)$ 有向图。假设每一条边 $(x',y'')\in E'$与一个非负的整数 $c(x',y'')$ 相对应。我们称$c(x',y'')$ 为边 $(x',y'')$ 的容量。从$E'$ 到非负整数的函数$c$是容量函数, 并由下式定义:

$$c(x',y'')=\min[|(x,y)|,p],\quad x\neq y \tag{5a}$$

$$=\min[|(x,y)|,s],\quad x=y \tag{5b}$$

$B$中的一个整数流$f$是一个从$E'$到非负整数的一个函数, 并施加的约束为:

$$f(x',y'')\leqq c(x',y''),\ (x',y'')\in E'. \tag{6}$$

我们现在可以叙述下列结果, 它是由Fulkerson[7]给出的较一般结果的一个特殊情况。

下列约束

$$a(x')\leqq f(x',V'')\leqq a'(x'),\qquad x'\in V', \tag{7a}$$

$$b(x'')\leqq f(V',x'')\leqq b'(x''),\qquad x''\in V'', \tag{7b}$$

$$0\leqq f(x',y'')\leqq c(x',y''),\qquad (x',y'')\in E', \tag{7c}$$

是可行的充要条件是:

$$c(S',\overline{S}'')\geqq b(\overline{S}'')-a'(\overline{S}') \tag{8a}$$

$$c(S',\overline{S}'')\geqq a(S')-b'(S'') \tag{8b}$$

对所有的$S'\subseteq V'$与$S''\subseteq V''$均成立。此处$\overline{S}'$和$\overline{S}''$分别表示在$V'$与$V''$中$S'$与$S''$的补。很清楚, 当且仅当$f(x',y'')\neq 0$时, 把子图$H$中的 $(x,y)$ 乘上$f(x',y'')$, 在$B$中从$V'$到$V''$的一个可行整数流得到一个满足 (4) 式的一个 $(p,s)$ 子图$H$, 反之亦然。因此把 (8) 式的条件转换

---

* 就此而论, $(i,j)$ 具有两种不同的意义, 一方面, 它表示所有并列边 $(i,j)\in E$ 的一条。另一方面, 它表示从$i$到$j$的并列边$\{\{i\},\{j\}\}$的集合, 如文中将要说明这不应产生任何困难。

为用给定的有向图$G(V,E)$来表示，我们便得到所希望的条件。

**定理1.**

在一个给定的有向图$G(V,E)$中，与每一个$x\in V$有关的四个非负整数$a(x)$，$a'(x)$，$b(x)$与$b'(x)$满足：

$$0\leqq a(x)\leqq a'(x) \tag{9a}$$

$$0\leqq b(x)\leqq b'(x) \tag{9b}$$

并且规定两个非负整数$p$与$s$。则$G$具有一个$(p,s)$子图$H$，它的出度$d_H^+(x)$与入度$d_H^-(x)$满足

$$a(x)\leqq d_H^+(x)\leqq a'(x) \tag{10a}$$

$$b(x)\leqq d_H^-(x)\leqq b'(x) \tag{10b}$$

其充要条件是：

$$\sum_{y\in\Gamma(X)}\min\Big(b'(y),\sum_{x\in X}\min[|(x,y)|,\delta_{xy}(s-p)+p]\Big)\geqq a(X) \tag{11a}$$

$$\sum_{y\in\Gamma^*(X)}\min\Big(a'(y),\sum_{x\in X}\min[|(y,x)|,\delta_{xy}(s-p)+p]\Big)\geqq b(X) \tag{11b}$$

对所有的$X\subseteq V$均成立。式中$\delta_{xy}$是克罗内克$\delta$函数。

证明：充分性是证明条件（8）与（11）是等价的。条件8(a)与8(b)是选取一对$S'$与$S''$的子集来表示的。我们证明条件8(a)与8(b)可简化为仅含有一个子集的选取。例如研究8(b)，对于给定的$S'\subseteq V'$，定义

$$U''=\{y''\in V'':b'(y'')<c(S',y'')\} \tag{12}$$

对于这一对$S'$与$U'$来说，不等式（8b）可以写成

$$c(S',\overline{U}'')+b'(U'')=\sum_{y''\in\Gamma(S')}\min[b'(y''),c(S',y'')]\geqq a(S') \tag{13}$$

对于固定的$S'\subseteq V'$，(13)式的左边在所有的$S''\subseteq V''$时和为最小，正如下面所说明：

$$\begin{aligned}c(S',\overline{U}'')+b'(U'')&=c(S',\overline{U}''\cap S'')+c(S',\overline{S}'')-c(S',U''\cap\overline{S}'')\\&\quad+b'(U''\cap\overline{S}'')+b'(S'')-b'(\overline{U}''\cap S'')\\&\leqq c(S',\overline{S}'')+b'(S'')\end{aligned} \tag{14}$$

因为

$$c(S',\overline{U}''\cap S'')-b'(\overline{U}''\cap S'')\leqq 0 \tag{15a}$$

$$b'(U''\cap\overline{S}'')-c(S',U''\cap\overline{S}'')\leqq 0 \tag{15b}$$

因此，当且仅当（13）式对所有$S'\subseteq V'$成立时，条件8(b)对所有的$S'\subseteq V'$与$S''\subseteq V''$都满足。类似地，条件8(a)简化为

$$\sum_{x'\in\Gamma_*(S'')}\min[a'(x'),c(x',S'')]\geqq b(S'') \tag{16}$$

适用于所有的$S''\subseteq V''$。

为了计算$c(S',y'')$与$c(x',S'')$，$y''\in V''$与$x'\in V'$，令

$$X=\{x\in V:x'\in S'\} \tag{17a}$$

$$Y=\{y\in V:y''\in S''\} \tag{17b}$$

因此从（5）式我们有：

$$c(S',y'')=\sum_{x\in X}\min[|(x,y)|,\delta_{xy}(s-p)+p] \tag{18a}$$

$$c(x',S'')=\sum_{y\in Y}\min[|(x,y)|,\delta_{xy}(s-p)+p] \tag{18b}$$

把（13）与（16）式转为用给定的有向图来表示，连同（18）式一起，给出了条件（11）。定理证毕。

在我们寻求具有规定度数的任意子图的特殊情况时，本定理可简化为推广的 Fulkerson 的结果[7]。

**推论1.** 有向图 $G(V,E)$ 具有一个子图$H$，其出度与入度满足

$$a(x) \leqq d_H^+(x) \leqq a'(x) \tag{19a}$$

$$b(x) \leqq d_H^-(x) \leqq b'(x) \tag{19b}$$

其充要条件是，对于所有的 $X \subseteq V$，我们有：

$$\sum_{y \in \Gamma(X)} \min[b'(y), |(X,y)|] \geqq a(X) \tag{20a}$$

$$\sum_{y \in \Gamma^*(X)} \min[a'(y), |(y,X)|] \geqq (bX) \tag{20b}$$

证明：在（11）式中令 $s = p = max_{(x,y) \in E}|(x,y)|$。本推论在下面的考察中而直接得出。

$$|(X,y)| = \sum_{x \in X} |(x,y)| = \sum_{x \in X} \min[|(x,y)|, p] \tag{21a}$$

$$|(y,X)| = \sum_{x \in X} |(y,x)| = \sum_{x \in X} \min[|(y,x)|, p] \tag{21b}$$

在出度与入度严格确定的情况下，我们令 $a(x) = a'(x), b(x) = b'(x)$ 并得到以下推论。

**推论2.** 有向图$G(V,E)$具有一个 $(p,s)$ 子图$H$，其出度与入度满足下列条件：

$$d_H^+(x) = a(x) \geqq 0 \tag{22a}$$

$$d_H^-(x) = b(x) \geqq 0 \tag{22b}$$

其充要条件是：

$$a(V) = b(V) \tag{23}$$

且对于$X \subseteq V$来说，下两式成立：

$$\sum_{y \in \Gamma(X)} \min\Big(b(y), \sum_{x \in X} \min[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p]\Big) \geqq a(X) \tag{24}$$

$$\sum_{y \in \Gamma^*(X)} \min\Big(a(y), \sum_{x \in X} \min[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p)+p]\Big) \geqq b(X) \tag{25}$$

证明：为使子图$H$存在，必要性是 $a(V) = b(V)$。为了完成证明，充分性是要证明（23）与（24）式蕴含着（25）式，且（23）与（25）式蕴含（24）式。

正如前面所提到，（24）与（25）式在$a(x) = a'(x)$与$b(x) = b'(x)$时完全等效（8）式。把（8）中所定义的符号用到$B(V',V'';E)$上，我们首先说明（23）式与（8$b$）式蕴含着（8$a$）式，如下所述：

$$\begin{aligned} a(\bar{S}') + c(S', \bar{S}'') &\geqq a(\bar{S}') + a(S') - b'(S'') \\ &\geqq a(V') - b(S'') = b(V'') - b(S'') = b(\bar{S}'') \end{aligned} \tag{26}$$

相似地，我们能证明（23）式与（8a）式蕴含着（8b）式：

$$\begin{aligned} b(S'') + c(S', \bar{S}'') &\geqq b(S'') + b(\bar{S}'') - a'(\bar{S}') \\ &\geqq b(V'') - a(\bar{S}') = a(V') - a(\bar{S}') = a(S') \end{aligned} \tag{27}$$

推论证毕。

在（24）式中利用（21）式，我们可把Ore[1]的一条定理叙述为以下推论。

**推论3.** 有向图$G(V,E)$具有一个子图$H$，其出度$d_H^+(x)$与入度$d_H^-(x)$ 满足下列条件：

$$d_H^+(x) = a(x) \geqq 0 \tag{28a}$$

$$d_H^-(x) = b(x) \geq 0 \tag{28b}$$

其充要条件是：

$$a(V) = b(V) \tag{29}$$

且对于所有的$X \subseteq V$,

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min[b(y), |(X,y)|] \geq a(X) \tag{30a}$$

或

$$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min[a(y), |(y,X)|] \geq b(X) \tag{30b}$$

如果一个有向图，若对于其每一个节点其出度与入度均具有相同的值$n$，则称为$n$度的规则有向图。一个有向图$G(V,E)$的$n$-因子$H(V,E_n)$是一个$n$度的规则的生成子图，$E_n \subseteq E$。我们将应用上述结果导出当一个有向图具有1-因子的一条准则。

在推论 3 中，令$a(x) = b(x) = 1$，适用于每一个$x \in V$。那么我们有：

$$a(X) = |X| \tag{31}$$

同时（30a）的左边变为$\gamma|X|$。我们得到Tutte的一条定理〔6〕。

**推论4.** 一个有向图$G(V,E)$具有一个1-因子的充要条件是对于每一个$X \subseteq V$,

$$|\gamma(X)| \geqslant |X| \tag{32}$$

$$\gamma^*(X) \geqslant |X|. \tag{33}$$

因此，每一个规则有向图，若它是$n$度的规则有向图时，它具有1-因子，并且可以分解为$n$个1-因子之和。事实上，上述结果是König与Hall的定理〔15,16〕用于有向二分图对集(matching)的情况。

一个有向二分图$B(V_1, V_2; E_1)$的对集是$E_1$的边的集合$S$，使得没有$S$的两条边有一个公共节点。如果一个对集定义在集合$X \subseteq V_1$与集合$Y \subseteq V_2$之间的一一对应关系，则我们可说把$X$对集到$Y$上或把$X$对集到$V_2$中。

**推论5.** 在一个有向二分图$B(V_1, V_2; E_1)$中，当且仅当$|\gamma(X)| \geqslant |X|$，适用于每一个$X \subseteq V_1$时，$V_1$可以对集到$V_2$中。

我们注意到$|V_1|$与$|V_2|$无需是相同的。

### 4.有向图序列

一个$n$个非负整数对的序列

$$\pi = \{(a_i, b_i) : i = 1, 2, \cdots, n\} \tag{34}$$

如果存在一个（$p,s$）有向图$G(V,E)$（具有$\pi$作为其节点的度对），称为（$p,s$）有向图序列，并且这个有向图称为$\pi$的一种实现。研究这个问题的在于一个具有规定出度与入度的有向图的存在，等效于一个非负整数方阵（具有规定的行和与列和）的存在。另一个理由是这一结果的潜在的应用。例如，在计算具有给定的碳原子数的饱和碳氢化合物$C_nH_{2n+2}$的同份异构体，这一问题等效于列出在每一个节点上具有度数是1或4的所有树。事实上，有机化学化合物中的同份异构现象导致了Senior〔17〕研究了这个问题。在本节中，我们说明这个问题可以利用以前的理论来解决。

研究这一问题的下列推广。给定一个四元的$n$个非负整数序列

$$\pi' = \{(a_i, a_i'; b_i, b_i') : a_i \leqslant a_i', b_i \leqslant b_i', i = 1, 2, \cdots, n\} \tag{35}$$

问题是求取一个存在$n$个节点的（$p,s$）有向图$G(V,E)$的充要条件，此图的度对$[d^+(i), d^-$

$(i)]$，$i\in V$，满足以下式子：

$$a_i\leqq d^+(i)\leqq a_i' \tag{36a}$$

$$b_i\leqq d^-(i)\leqq b_i' \tag{36b}$$

这种有向图称为$\pi'$的一种实现，并且$\pi'$称为可用（$p,s$）有向图表示的序列。

为了便于我们的讨论，令

$$S_a=\{a_i:i=1,2,\cdots,n\} \tag{37a}$$

$$S_{a'}=\{a_i':i=1,2,\cdots,n\} \tag{37b}$$

$$S_b=\{b_i:i=1,2,\cdots,n\} \tag{38a}$$

$$S_{b'}=\{b_i':i=1,2,\cdots,n\}. \tag{38b}$$

为了将前面的理论用到现在的问题上，我们令 $|(x,y)|=\infty$，适用于定理 I 中的所有 $x,y$。（11a）式的左边简化为：

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in Y(X)}\min\left[b'(y),\sum_{x\in X}\delta_{xy}(s-p)+p\right]\\&=\sum_{y\in X}\min\left[b'(y),\sum_{x\in X}\delta_{xy}(s-p)+p\right]+\sum_{y\in\bar{X}}\min\left[b'(y),\sum_{x\in X}\delta_{xy}(s-p)+p\right]\\&=\sum_{y\in X}\min[b'(y),(|X|-1)p+s]+\sum_{y\in\bar{X}}\min[b'(y),|X|p]\\&=\sum_{b_i'\in X_{b'}}\min[b_i',(|X_{b'}|-1)p+s]+\sum_{b_i'\in\bar{X}_{b'}}\min[b_i',|X_{b'}|p]\end{aligned} \tag{39}$$

此处$X_{b'}$是相应于$X$的$S_{b'}$的一个子集，$\bar{X}_{b'}$表示在$S_{b'}$中$X_{b'}$的补。对于每一个$X_{b'}\subseteq S_{b'}$，当且仅当$b_i'\in X_{b'}$时，有一个相应的（具有$a_i\in X_a$性质）$X_a\subseteq S_a$。这对于（37）式与（38）式的其它集合是类似成立的。由此（11a）式的右边可以写成：

$$a(X)=\sum_{a_k\in X_a}a_k \tag{40}$$

类似的关系可从（11b）式得到。上述结果可总结成一条定理。

**定理2．** 一个序列$\pi'=\{(a_i,a_i';b_i,b_i':a_i\leqslant a_i',b_i\leqslant b_i')\}$是可用$(p,s)$有向图表示的序列，其充要条件是对于每一个非空的$X_a\subseteq S_a$，

$$\sum_{b_j'\in X_{b'}}\min[b_j',(|X_a|-1)p+s]+\sum_{b_i'\in\bar{X}_{b'}}\min[b_i',|X_a|p]\geqq\sum_{a_k\in X_a}a_k \tag{41a}$$

以及对于每一个非空的$X_b\subseteq S_b$，

$$\sum_{a_j'\in X_{a'}}\min[a_j',(|X_b|-1)p+s]+\sum_{a_i'\in\bar{X}_{a'}}\min[a_i',|X_b|p]\geqq\sum_{b_k\in X_b}b_k \tag{41b}$$

此处$X_a$与$X_{b'}$是对应于$S_a$与$S_{b'}$的子集，$X_{a'}$与$X_b$是对应于$S_{a'}$与$S_b$的子集；$\bar{X}_{b'}$与$\bar{X}_{a'}$分别表示在$S_{b'}$与$S_{a'}$中的$X_{b'}$与$X_{a'}$的补。集合$S_a,S_{a'},S_b$与$S_{b'}$是在（37）式与（38）式中所定义的。

在$a_i=a_i'$与$b_i=b_i'$的特殊情况下，我们得到Chen[18]的一个结果。

**推论6．** 一个序列$\pi=\{(a_i,b_i)\}$是可用（$p,s$）有向图表示的序列，其充要条件是：

$$\sum_{a_i\in S_a}a_i=\sum_{b_j\in S_b}b_j \tag{42}$$

且对于每一个非空的 $X_a\subseteq S_a$，

$$\sum_{b_j\in X_b}\min[b_j,(|X_a|-1)p+s]+\sum_{b_i\in\bar{X}_b}\min[b_i,|X_a|p]\geqq\sum_{a_k\in X_a}a_k \tag{43}$$

或

$$\sum_{a_j \in X_a} \min[a_j, (|X_b|-1)p+s] + \sum_{a_i \in \bar{X}_a} \min[a_i, |X_b|p] \geq \sum_{b_k \in X_b} b_k \qquad (44)$$

此处$X_a$与$X_b$是$S_a$与$S_b$的相应的子集合，第二个条件（43）式或（44）式由$2^{n-1}$个不等式组成，$n$是$\pi$中的整数对，对某些序列可以简化为一组$n$个不等式。

**推论7.** 在一个给定的序列$\pi=\{(a_i,b_i):i=1,2,\cdots,n\}$，如果$(a_i,b_i)$的下标能够改变，使得对于所有的$i$，有$a_i \geq a_{i+1}$与$b_i \geq b_{i+1}$，$\pi$是（$p,s$）有向图（$p \geq s$）序列，其充要条件是：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (45)$$

且对于$k=1,2,\cdots,n-1$，

$$\sum_{j=1}^{k} \min[a_j,(k-1)p+s] + \sum_{i=k+1}^{n} \min[a_i,kp] \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (46a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \min[a_j,(k-1)p+s] \geq \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (46b)$$

对于要使序列$\pi$实现为（1,0）有向图序列的条件（43）式或（44）式，如果$\pi$的各元素作适当的编排，它将简化为一组$n$个不等式。

**推论8.** 研究一个序列$\pi=\{(a_i,b_i):i=1,2,\cdots,n\}$其中如果有必要的话，利用改变下标，使$b_i \geq b_{i+1}$，同时若$b_i=b_{i+1}$，则对于所有的$i$，$a_i \geq a_{i+1}$。当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (47)$$

且对于$k=1,2,\cdots,n-1$，

$$\sum_{i=1}^{k} \min[a_i,k-1] + \sum_{i=k+1}^{n} \min[a_i,k] \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (48a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i,n-1] \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (48b)$$

那么该序列$\pi$是（1,0）有向图序列。

我们注意到若（47）式成立，则当且仅当$a_i \leq n-1$（适用于所有的$i$）时，（48b）才能得到满足。因此（48b）可用下列条件来代替，

$$a_i \leq n-1, \quad i=1,2,\cdots,n \qquad (49)$$

现在可以得到适用于各种$p$与$s$值时的推论6的方便的结果。这些结果已在[18]中讨论过，这里不作重复。

**5．对称的（$p,s$）有向图**

一个（$p,s$）有向图$G(V,E)$，若对它每一个$(i,j)\in E$，$(j,i)$也在$E$中，使得在$i \neq j$时，$|(i,j)|=|(j,i)|$，在$i=j$时，$|(i,j)|=2e$，此处$e$是一个非负整数，则称其为对称有向（$p,s$）图。所谓$G$的一个对称的（$p,s$）子图，意指也是一个对称的（$p,s$）有向图。因为把每一个无向边用一对方向相反的有向边来代替，则一个无向图可以转换为一个对称有向图，反之亦然。把一个对称的（$p,2s$）有向图称为（$p,s$）有向图是方便的。一个（$\infty,\infty$）图称作图。（下面的）问题是求取一个给定的有向图具有对称的（$p,s$）子图的充要条件。

令$G(V,E)$是一个给定的有向图，令$G_s(V,E_s)$是$G$的最大对称子图。与每一个$x\in V$对应的两个非负整数$a(x)$与$a'(x)$满足(9$a$)。则 $G$ 具有一个对称的 $(p,s)$ 子图$H$，其出度$d_H^+(x)$与入度$d_H^-(x)$满足（10$a$）式，其充要条件为$H$是$G_s$的一个子图。因此仅需研究对称有向图或简单图已足够了。

研究$G$的两个$(p,s)$子图$H_1$与$H_2$的情况。如果它们有相同的节点度数对的集合，我们称其为$d$-不变的。如果在$G_1$中有两条边 $(i_1,i_2)$与$(j_1,j_2)$，$i_1\neq j_1$与$j_1\neq j_2$，使得

$$|(i_1,j_2)|<p,\quad i_1\neq j_2 \tag{50a}$$

$$|(i_1,j_2)|<s,\quad i_1=j_2 \tag{50b}$$

$$|(j_1,i_2)|<p,\quad j_1\neq i_2 \tag{50c}$$

$$|(j_1,i_2)|<s,\quad j_1=i_2 \tag{50d}$$

利用边$(i_1,j_2)$与$(j_1,i_2)$代替$(i_1,i_2)$与$(j_1,j_2)$的运算称为$G$的初等的$(p,s)d$-不变的变换。显然，这种类型的变换将从$G$而得到一个 $d$-不变的$(p,s)$有向图。一个初等$(\infty,\infty)d$-不变的变换称为初等$d$-不变的变换。

令$G(V,E)$是一个有向图。如果 $G$具有这种特性——任意两个长度为奇数的有向回路或者有一个公共节点，或者在连接这两个有向回路存在一条边，则我们将说$G$满足奇数回路的条件。特别地若$G$是二分图或者它是一个完备图，则$G$显然满足奇数回路条件。

**定理3.** 令$G(V,E)$是一个无自环并使其满足奇回路条件的对称有向图。与每一个 $x\in V$相对应的是一个非负整数$a(x)$。那么$G$具有对称的$(p,0)$子图$H$，它的出度$d_H^+(x)$与入度$d_H^-(x)$满足

$$d_H^+(x)=d_H^-(x)=a(x) \tag{51}$$

的充要条件是所有的$a(x)$的和为整数，且对所有的$X\subseteq V$，

$$\sum_{y\in \Gamma(X)}\min\left[a(y),\ \sum_{x\in X}\min[|(x,y)|,p]\right]\geq a(X) \tag{52}$$

**证明：** 令 $d_H^+(x)=d_H^-(x)=d_H(x)$。如果 $H$ 是对称的，它包含偶数条边。此数等于所有$d_H(x)$的和且所有$a(x)$ 的和必须是偶数。(52) 式的必要性是直接从推论2得到的——在推论2中对每一个$x\in V$，令$a(x)=b(x)$与$s=0$，且注意到

$$\min[|(x,y)|,\ (1-\delta_{x,y})p]=\min[|(x,y)|,p] \tag{53}$$

为了证明充分性，我们从推论2看出，存在一个$(p,0)$子图$K$，其出度$d_K^+(x)$与入度$d_K^-(x)$满足

$$d_K^+(x)=d_K^-(x)=a(x) \tag{54}$$

于是$K$是有向回路作边不相接的并[10]。令$K_s$是$K$的最大对称子图。如果 $K-K_s=\phi$，即为零图，证毕。假设$K-K_s\neq\phi$，可分为三种情况：

**情况1.** 在$K-K_s$中，有一个长度为$2m$的有向回路。

$$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_{2m-1},i_{2m}),(i_{2m},i_1) \tag{55}$$

那么一系列初等$d$-不变的变换将使(55)式变换成

$$(i_2,i_3),(i_3,i_2);\ (i_4,i_5),(i_5,i_4);\cdots;(i_{2m},i_1),(i_1,i_{2m}) \tag{56}$$

它是对称的且是$G$的一个$(p,0)$子图。

**情况2.** 在$K-K_s$中，有两个长度为奇数的且具有一个公共节点$i_1$的有向回路。不失一般回路是性地令两个有向

$$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_{2m-1},i_1);\ (i_1,j_2),(j_2,j_3),\cdots,(j_{2q-1},i_1)。 \tag{57}$$

那么一系列初等$d$-不变的变换将使(57) 式转换为如下$G$的对称$(p,0)$子图：

$$(i_2,i_3),(i_3,i_2);(i_4,i_5),(i_5,i_4);\cdots;(i_{2m-2},i_{2m-1}),(i_{2m-1},i_{2m-2});$$
$$(i_1,j_2),(j_2,i_1);(j_3,j_4),(j_4,j_3);\cdots;(j_{2q-1},i_1),(i_1,j_{2q-1}) \tag{58}$$

**情况3**．在$K-K_s$中，有两个长度为奇数的且两个节点不相接的有向回路，它可表示为：

$$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_{2m-1},i_1);(j_1,j_2),(j_2,j_3),\cdots,(j_{2q-1},j_1) \tag{59}$$

由假设，在$G$中有一条连接两个回路的边。不失一般性地令这一条边是$(i_1,j_1)$。如果$(i_1,j_1)$不在$K_s$中，那么一系列初等$d$-不变的变换将使(59)式变为$G$的一个对称的$(p,0)$子图：

$$(i_2,i_3),(i_3,i_2);(i_4,i_5),(i_5,i_4);\cdots;(i_{2m-2},i_{2m-1}),(i_{2m-1},i_{2m-2});$$
$$(i_1,j_1),(j_1,i_1);\ (j_2,j_3),(j_3,j_2);\ (j_4,j_5),(j_5,j_4);\cdots;$$
$$(j_{2q-2},j_{2q-1}),(j_{2q-1},j_{2q-2}) \tag{60}$$

如果$(i_1,j_1)$在$K_s$中，那么由(59)式的各边与$(i_1,j_1)$与$(j_1,i_1)$所组成的子图。这种子图利用一系列的初等$d$-不变的变换得到一个如下形式的对称$(p,0)$子图：

$$(i_1,i_2),(i_2,i_1);(i_3,i_4),(i_4,i_3);\cdots;(i_{2m-1},i_1),(i_1,i_{2m-1});$$
$$(j_1,j_2),(j_2,j_1);(j_3,j_4),(j_4,j_3);\cdots;(j_{2q-1},j_1),(j_1,j_{2q-1}) \tag{61}$$

重复地利用上面三种类型的变换，并且注意到因所有$d_K^+(x)=a(x)$的和是偶数，故长度为奇数的有向回路的数目是偶数，我们断定通过一系列有限的初等$d$-不变的变换可以把$K$转换成对称的$(p,0)$子图。定理证毕。

现在可以把这一定理叙述成不同的形式，同前，一个图$G(V,E)$，如果它的任意两个长度为奇数的回路，或者有一个公共点，或者有一条边相连，我们将说该图满足奇数回路的条件。

**推论9**． 令$G(V,E)$是一个无环且满足奇数回路的图。与每一个$x\in V$相对应的是一个非负整数$a(x)$。则$G$具有一个$(p,0)$子图$H$，其度数满足

$$d_H(x)=a(x) \tag{62}$$

其充要条件是所有$a(x)$的和为偶数且对于所有的$X\subseteq V$，

$$\sum_{y\subset V}\min\left[a(y),\ \sum_{x\in X}\min[|(x,y)|,p]\right]\geq a(X) \tag{63}$$

为了得到具有规定度数的子图存在的充要条件，我们令$p=\infty$，并得到下列推论。

**推论10**． 令$G(V,E)$是一个无自环且满足奇数回路条件的子图。与每一个$x\in V$对应的是一个非负整数$a(x)$，则$G$具有一个子图$H$，其度数满足

$$d_H(x)=a(x) \tag{64}$$

其充要条件是所有的$a(x)$为偶数，且对于所有的$X\subseteq V$，

$$\sum_{y\in V}\min[a(y),|(X,y)|]\geq a(X) \tag{65}$$

**6．无向图序列**

一个$n$个非负整数的序列，

$$\pi=\{a_i:i=1,2,\cdots,n\} \tag{66}$$

如果存在一个$(p,s)$图，其节点度数为$\pi$，则称为可用$(p,s)$无向图表示的序列，并这个图为$\pi$的一种实现

在推论10中令图$G(V,E)$是一个$p$阶完备图，即是一个无自环的图且具有这一性质——每一个节偶有$p$条边且仅有$p$条边与它们相连。显然G满足奇数回路条件且$G$的每一个子图是$(p,0)$图。因此，我们有

**推论11**． 一个序列$\pi=\{a_i\}$，当且仅当所有$a_i$的和是偶数，且对每一个非空的$X_s\subseteq\{a_i\}$，

$$\sum_{a_i \in \bar{X}_a} \min[a_i, |X_a|p] + \sum_{a_j \in X_a} \min[a_j, (|X_a|-1)p] \geqq \sum_{a_k \in X_a} a_k \tag{67}$$

此处$\bar{X}_a$表示$\{a_i\}$中$X_a$的补，则序列$\bar{\pi}=\{a_i\}$为$(p,0)$无向图序列。

**证明：** 这一结果可直接从推论10（令$G(V,E)$是一个$p$阶完备有向图），以及(65)式的左边

$$\sum_{y \in \bar{X}} \min[a(y), |(X,y)|] + \sum_{y \in X} \min[a(y), |(X,y)|]$$

$$= \sum_{a_i \in \bar{X}_a} \min[a_i, |X_a|p] + \sum_{a_j \in X_a} \min[a_j, (|X_a|-1)p] \tag{68}$$

而得到。此处当且仅当$y \in X$，$a_y \in X_a$故得出此推论。

(67) 式是由$2^{n-1}$个不等式所组成，$n$是$\bar{\pi}$的元素数目。如果象推论7那样，$\bar{\pi}$的各元素排好次序，则可简化为一组$n$个不等式。

**推论12.** 一个序列

$\bar{\pi}=\{a_i\}$，$a_i \geqslant a_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$

为$(p,0)$无向图序列的充要条件是所有的$a_i$之和为偶数且

$$\sum_{j=1}^{k} \min[a_j, (k-1)p] + \sum_{i=k+1}^{n} \min[a_i, Kp] \geqq \sum_{j=1}^{k} a_j \tag{69a}$$

$k=1,2,\cdots,n-1$以及

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, (n-1)p] \geqq \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{69b}$$

没有自环及并列边且具有规定度数的图存在是相当重要的，我们可从上述推论令$p=1$而直接得到。对此，我们定义如下。对于一个给定的序列$\bar{\pi}=\{a_i; i=1,2,\cdots,n\}$且对于$k=1,2,\cdots$，令

$$a_k'' = |I_k| + |J_k| \tag{70a}$$

此处

$$I_k = \{i: i<k,\ a_i \geqq k-1\} \tag{70b}$$

$$J_k = \{i: i>k,\ a_i \geqq k\} \tag{70c}$$

在这种情况下，推论12变成[21]。

**推论13.** 一个序列

$\bar{\pi}=\{a_i\}$，$a_i \geqslant a_{i+1}$ $i=1,2,\cdots,n-1$

为(1,0)图序列的充要条件是所有$a_i$之和为偶数且满足下列三个条件

$$\sum_{i=1}^{k} a_i'' \geqq \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{71}$$

$k=1,2,\cdots,n$；

$$x(x-1) + \sum_{i=x+1}^{n} \min[a_i, x] \geqq \sum_{j=1}^{x} a_j \tag{72}$$

$k=1,2,\cdots,n-1$；或

$$k(x-1) + \sum_{i=x+1}^{n} a_i \geqq \sum_{j=1}^{k} a_j \tag{73}$$

适用于所有的$k$, $1\leqslant k\leqslant x\leqslant n$，在$x=n$时，第一个和式为零。

条件(72)式首先由 Erdös 与 Gallai[22]导出，条件(73)式首先由 Fulkerson 等[14]导出。推论11的其它简便结果也可令$p$的各种值而得到，这里从略。

最后，我们提到如果$\{G\}$是从$G$得到的所有度数不变的$(p,s)$有向图的集合，那么它们元素中的任意两个可利用有限次的基本$(p,s)d$-不变的变换序列而互相转变。这对于$d$-不变的$(p,s)$无向图的集合也类似成立。这种互相转换所需的最小转换次数可在 Chen的论文[19]中找到。其它有关的工作可在[13]，[20]以及[23—27]中找到。

## 结　论

在本文中，我们已经给出了一个具有规定度数的给定有向图存在$(p,s)$子图的充要条件，因此推广了 Ore 与 Fulkerson 的结果。该问题的一种特殊情况是确定具有规定的入度与出度的$(p,s)$无向图存在的实现条件。还给出了存在一个对称子图（具有规定度数、无自环的有向图）的充要条件，因此使得一个非负整数序列来表征$(p,0)$无向图的度数序列。给出的这些条件能使现有的结果统一化，并对较复杂的情况提供了一种透彻的理解。

## 参 考 文 献


[1] O. Ore, "Studies in directed graphs, I, II, III", *Ann. Math.*, Vol. 63, pp. 383-406, 1956; Vol. 64, pp. 142-153, 1956; and Vol. 68, pp. 526-549, 1958.

[2] O. Ore, "Graphs and subgraphs, I, II", *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 84, pp. 109-136, 1957; and Vol. 93. pp. 185-204, 1959.

[3] O. Ore, "Conditions for subgraphs of directed graphs", *J. de Math.*, Vol. 37, pp. 321-328, 1958.

[4] W. T. Tutte, "The factorization of linear graphs", *J. Lond. Math. Soc.*, Vol. 22, pp. 107-111, 1947.

[5] W. T. Tutte, "The factors of graphs", *Can. J. Math.*, Vol. 4, pp. 314-328, 1952.

[6] W. T. Tutte, "A short proof of the factor theorem for finite graphs", *Can. J. Math.*, Vol. 6, pp. 347-352, 1954.

[7] D. R. Fulkerson, "A network-flow feasibility theorem and combinatorial applications", *Can. J. Math.*, Vol. 11, pp. 440-451, 1959.

[8] J. Edmonds, "Paths, trees, and flowers", *Can. J. Math.*, Vol. 17, pp. 449-467, 1965.

[9] L. Lovász, "Valencies of graphs with 1-factors", *Periodica Math. Hungar.*, Vol. 5, pp. 149-151, 1974.

[10] W. K. Chen, "Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks", Chap. 6, Amsterdam, The Netherlands, North-Holland, 1976, 2nd revised edition.

[11] S. L. Hakimi and E. F. Schmeichel, "Graphs and their degree sequences: A survey", in *Theory and Applications of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 642, pp. 225-235, New York, Springer, 1978.

[12] R. B. Eggleton and D. A. Holton, "Graphic sequences", in *Combinatorial Mathematics IV*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 748, pp. 1-10. New York. Springer, 1979.

[13] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, "Flows in Networks", Princeton, N. J., Princeton University Press, 1962.

[14] D. R. Fulkerson, A. J. Hoffman and M. H. McAndrew, "Some properties of graphs with multiple edges", *Can. J. Math.*, Vol. 17, pp. 166-177, 1965.

[15] D. König, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", New York, Chelsea, 1950.

[16] P. Hall, "On representatives of subsets", *J. Lond. Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 26-30, 1935.

[17] J. K Senior, "Partitions and their representative graphs", *Am. J. Math.*, Vol. 73, pp. 663-689, 1951.

[18] W. K. Chen, "On the realization of a $(p, s)$-digraph with prescribed degrees"; *J. Franklin Inst.*; Vol. 281, pp. 406–422, 1966.
[19] W. K. Chen, "On $d$-invariant transformations of $(p, s)$-digraphs", *J. Franklin Inst.*, Vol. 291, pp. 89–100, 1971.
[20] L. Lovász, "Subgraphs with prescribed valencies"; *J. Combinatorial Theory*; Series B, Vol. 8, pp. 391–416, 1970.
[21] W. K. Chen, . "On equivalence of realizability conditions of a degree sequence"; *IEEE Trans. Circuit Theory*; Vol. CT-20, pp. 260–262, 1973.
[22] P. Erdös and T. Gallai; "Gráfok előírt fokú pontokkal"; *Mat. Lapok*; Vol. 11, pp. 264–274, 1960.
[23] W. T. Tutte, "Spanning subgraphs with specified valencies"; *Discrete Math.*; Vol. 9, pp. 97–108, 1974.
[24] E. Mahmoodian, "On factors of a graph", *Can. J. Math.*; Vol. 29, pp. 438–440, 1977.
[25] T. Gallai; "On factorisation of graphs", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*; Vol. 1, pp. 133–153, 1950.
[26] W. T. Tutte, "The 1-factors of oriented graphs"; *Proc. Am. Math. Soc.*; Vol. 4, pp. 922–931, 1953.
[27] D. Bauer, "Line-graphical degree sequences"; *J. Graph Theory*; Vol. 4, pp. 219–232, 1980.

# 十七、论线性有源网络的唯一解


## 摘　要

本文给出了可包含所有类型受控源的一般线性有源网络唯一解的充要条件。还给出了说明性的例子。


**1.引言**

电子电路、信号与系统的研究与设计是基于各种各样的模型。因为我们涉及和分析的模型是诸如电感器、电容器、电阻器和信号源那样一些理想物理元件的互连，所以我们不能肯定它们的解总是存在和唯一的。因此，对于一个电网络来说，讨论能得到唯一解的条件是重要的。在计算机辅助网络分析中，当一个数值解不收敛时，这些条件尤其有用。它们能帮助区分倒底是网络没有唯一解呢还是积分技术中发生故障。我们注意到即使一个网络响应是不稳定时，却存在着数值解。因此当一个数值解不收敛时，区分出网络的不稳定性，或者是由于不合适的数值积分而发生的发散，或者是由于没有唯一解而引起的发散，这是重要的。

基尔霍夫〔1〕首先证明了一个电阻性网络解的存在。Weyl〔2〕及 Eckmann〔3〕对他的证明作过详细说明，他们对此问题有一个透彻的理解。对于具有互感和独立电源的 RLC 网络，Seshu 和Reed〔4〕也给出了存在唯一解的充要条件。企图包括更为一般的情况，Roth〔5〕应用了代数拓朴理论，并且导出了一个充分条件，Chen〔7〕对该条件作了详细说明。Malik和Hale〔8〕推广了 Seshu 与Reed 的结果，给出了网络还包含有非由短路电流控制的受控电压源以及非由开路电压控制的受控电流源的充要条件。最近，Purslow〔9〕利用得到网络的状态方程，通过简化步骤来着手处理这个问题，并且得到了有源网络具有唯一解的充要条件。但是，为了得到所需矩阵而进行的简化过程却长而麻烦。此外，我们所必须计算的行列式的矩阵是一个阶数等于受控源的数目加上相应无源元件的状态变量数。因而这并不是一件容易的工作。

本文的目的是导出一种网络有唯一解的较简单的充要条件，该网络包含有电阻器、电感器、电容器、晶体管、独立源，所有类型的受控源以及其它的可由这些元件建立模型的线性器件。

**2.预备知识与符号**

为了简化我们的讨论，同时不失一般性，我们假设修正网络 $N_m$ 是从一个给定的有源网络$N$，利用下列变换而得到的网络。

1）变压器以及其它诸如回转器以及阻抗转换器的线性器件用其等效的受控源来替代。

2）进行控制的短路电流（或开路的节点对电压）作为一个具有零阻抗（或导纳）的支路电流（或电压）来考虑。每一个受控电压源的控制短路（或开路）支路用两个电阻（1Ω和－1Ω）的串联（或并联）来替代，它们仍然作为一个单一支路。

3）每一个受控源由不同的无源支路控制（无源支路是电阻器$R$、电感器$L$和电容器$C$）。这一假设并不认为是一个限制，因为例如一个由两个以上无源支路电流控制的电流源可以用几个并联的等效电流源来替代，其每一个电流源是由不同的无源支路电流来控制。

4）每一个由非零有限值阻抗支路的支路电压（或电流）控制的受控电流（或电压）源通过欧姆定律用等效的电流控制电流源（或电压控制电压源）替代。

因此，修正网络$N_m$可用图1的符号来描述。

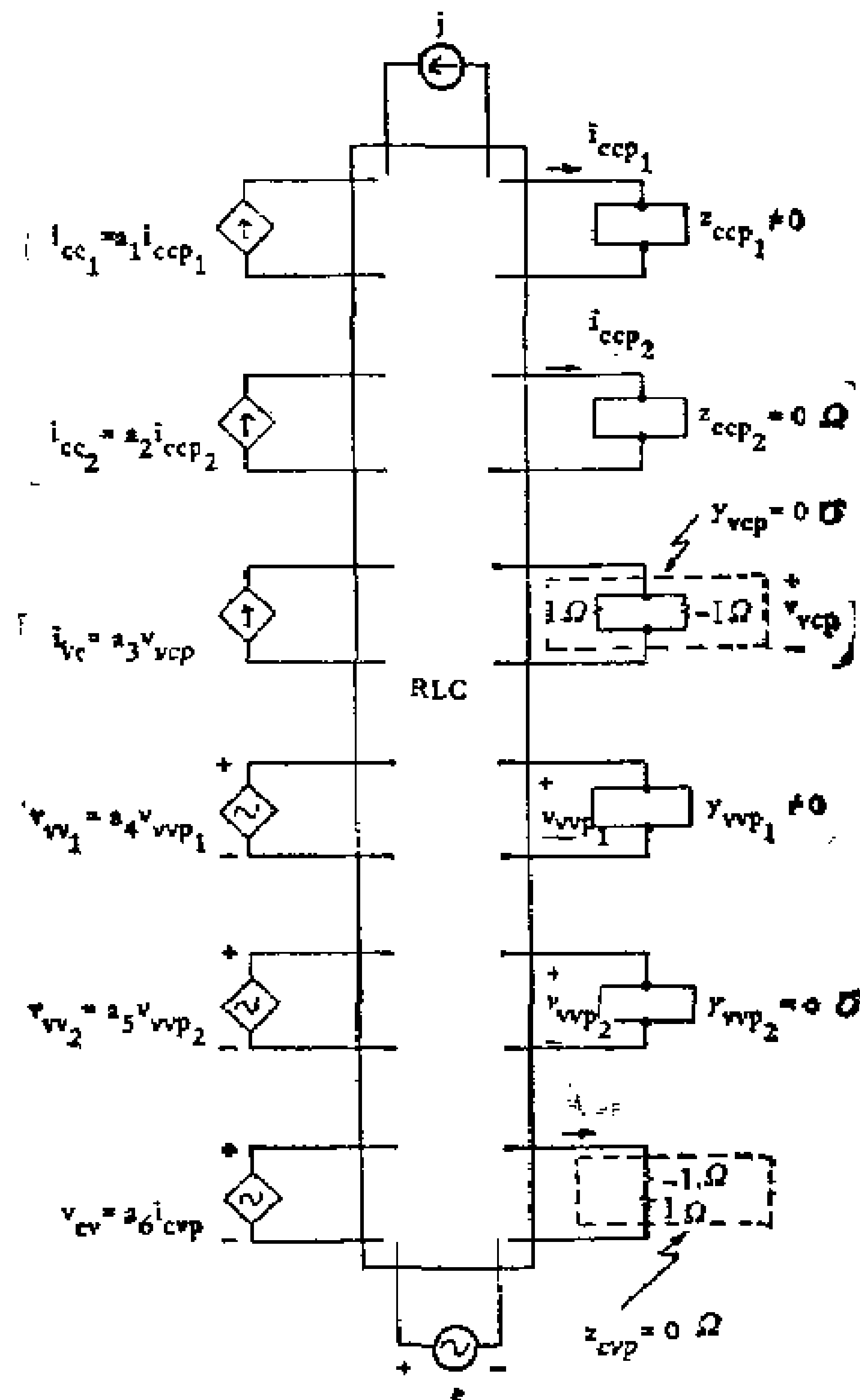


图1　修正网络$N_m$

下面，我们将$N_m$的支路电流和支路电压分为各种类型。为了简化这些记号，我们用带有下列下标的$I$和$V$分别表示各种类型的支路电流矢量和支路电压矢量。

$j$：独立电流源，

$cc$：电流控制电流源，

$vc$：电压控制电流源，控制支路是±1$S$导纳并联而组成，

$ccp$：电流控制电流源的控制支路，

$vcp$：电压控制电流源的控制支路，

$p$：非控制的无源支路，

$vv$：电压控制电压源，

$cv$：电流控制电压源，控制支路是由±1$\Omega$阻抗串联而组成，

$vvp$：电压控制电压源的控制支路，

$cvp$：电流控制电压源的控制支路，

$e$：独立电压源。

因此 $I_{cc}$ 表示在电流控制电流源中的支路电流矢量，$V_{vvp}$ 表示了电压控制电压源的控制支路的电压矢量。这些符号推广到其它类型的支路是直截了当的，无需作进一步说明。

利用刚才所定义的符号，修正网络 $N_m$ 的支路电流矢量$I$和支路电压矢量$V$可以分割地写为：

$$I' = [I_j' I_{cc}' I_{vc}' I_{ccp}' I_{vcp}' I_p' I_{cvp}' I_{vvp}' I_{cv}' I_{vv}' I_e'] \tag{1a}$$

及 $$V' = [V_j' V_{cc}' V_{vc}' V_{ccp}' V_{vcp}' V_p' V_{cvp}' V_{vvp}' V_{cv}' V_{vv}' V_e'] \tag{1b}$$

式中一撇表示矩阵的转置。

$N_m$的无源支路特性可用下列方程表示：

$$V_{ccp} = Z_{ccp} I_{ccp} \tag{2a}$$

$$V_{cvp} = Z_{cvp} I_{cvp} \tag{2b}$$

$$I_{vvp} = Y_{vvp} V_{vvp} \tag{2c}$$

$$I_{vcp} = Y_{vcp} V_{vcp} \tag{2d}$$

$$V_p = Z_p I_p \tag{2e}$$

式中各个$Z$和各个$Y$表示支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵。注意实际上 $Z_{cvp}$ 和 $Y_{vcp}$ 是零矩阵；它们之所以写成这种形式是为了后面进一步论述的需要。受控源可用下列方程组来描述：

$$I_{cc} = A_{cc} I_{ccp} \tag{3a}$$

$$I_{vc} = A_{vc} V_{vcp} \tag{3b}$$

$$V_{vv} = A_{vv} V_{vvp} \tag{3c}$$

$$V_{cv} = A_{cv} I_{cvp} \tag{3d}$$

式中各个 $A$是已知的支路控制参数的非奇异对角线矩阵。

令$B$和$Q$是 $N_m$的基底回路矩阵和基底割集矩阵，它们的列可根据（1）式的各列来进行分割。然后基尔霍夫电压和电流定律可叙述为：

$$BV = 0 \tag{4a}$$

$$QI = 0 \tag{4b}$$

这两个方程组与(2)式及(3)式的方程组作为研究的出发点。首先，我们把三个方程组写成矩阵形式，然后从未知量中分离出已知量，为此，我们令

$$I_j = J \text{和} V_e = E \tag{5}$$

$J$和$E$是独立电流源矢量和独立电压源矢量。然后得到方程组如第203页：

式中各个$U$表示适当阶数的单位矩阵。

当且仅当上述方程组对一组任意适当的激励源以及一组适当的初始条件拥有唯一解时，我们说给定网络$N$或其修正网络$N_m$有唯一解。但是(6) 式的系统当且仅当其系数矩阵为非奇异阵时，有唯一解，它直接导致下列引理。

**引理**

一个有唯一解的线性网络$N$，在其修正网络 $N_m$中存在一个树$t$，使得所有的受控电压源与独立电压源是$t$的树支，以及使得所有的受控电流源和独立电流源是$t$的连支。

证明：如果N有唯一解的话，(6)式的系数矩阵W是非奇异矩阵。这意味着W的各行中的头一组是线性独立的。在这些行中存在一个非奇异的主子矩阵，其各列对应于$N_m$ 的补树

$$
\begin{bmatrix}
B_j & B_{..} & B_{..} & B_{...} & B_{...} & B_{,} & B_{..} & B_{..} & B_{..} & 0 & B_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -U_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -U_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{,} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{,} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{..} & 0 & 0 & A_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{...} & 0 & 0 & 0 & -U_{...} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{..} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{..} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{...} & 0 & Q_{...} & Q_{,} & Q_{...} & Q_{...} & Q_{..} & Q_{..} & Q_{..} & Q_{..} & Q_{,}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
V_{j} \\ V_{..} \\ V_{..} \\ V_{...} \\ V_{...} \\ V_{,} \\ V_{..} \\ V_{..} \\ V_{...} \\ I_{...} \\ V_{...} \\ I_{...} \\ I_{,} \\ I_{...} \\ I_{...} \\ I_{..} \\ I_{..} \\ I_{..} \\ I_{..} \\ I_{.}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-B_{.} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Q_{j}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E \\ J
\end{bmatrix}
\quad (6)
$$

的各连支[7]。$W$ 的非奇异性还意味着子矩阵$[B_j B_{cc} B_{vc}]$的各列是线性独立的。应用 Steinitz 替代定理[10]，我们看到包含有$[B_j B_{cc} B_{vc}]$的 $W$ 各行的头一组中有一个主子矩阵。这相当于在 $N_m$ 中存在一个包含有所有受控电流源与独立电流源的补树$\bar{t}_1$。用类似的方法，利用$W$各行中的最末一行。我们可以证明在 $N_m$中包含有所有的受控电压源与独立电压源的一个树$t_2$。应用文献[7]的定理5.4，我们断定存在一个本引理所述的树，故引理得证。

这是 Malik 和Hale[8]所得结果的一个推广，同样它也是 Seshu和 Reed[4]所给的适用于$RLC$网络的结论的推广。我们注意到这条引理类似于Purslow[9]的定理1。这可以从下面事实中看出，即如果任意修正网络$N_m$ 满足该引理，则原始网络$N$也满足 Purslow 的定理1。

**3.唯一解**

在本节中要给出网络$N$有解的条件。

从引理得，令$t$是一个 $N_m$中包含有所有电压源的树，其补为$\bar{t}$，即为 $N_m$ 的补树，它包含有所有电流源。令 $Q_t$和 $B_t$是 $N_m$ 的由树$t$而定义的基本割集矩阵与基本回路矩阵。为了避免采用多重下标，我们写成 $Q=Q_t$ 和 $B=B_t$。接着我们分别根据$\bar{t}$和 $t$ 中的支路类型用下列的上标按行进行分割。

$j$　$\bar{t}$中的独立电流源；

$cc$　$\bar{t}$中的电流控制电流源；

$vc$　$\bar{t}$中的电压控制电流源；

$\bar{t}$　$\bar{t}$中的非电源支路；

$e$　$t$中的独立电压源；

$vv$　$t$中的电压控制电压源；

$cv$　$t$中的电流控制电压源；

$t$　$t$中的非电源支路。

因此 $B^j_{ccp}$ 表示 $B$ 的子矩阵，其各列对应于电流控制电流源的各控制支路，其各行对应于各独立电流源。$Q^t_{cv}$ 表示 $Q$ 的子矩阵，其各列对应于各电流控制电压源，其各行对应于树$t$中的非电源支路。这些符号用来叙述主定理并进一步地分割(6) 式的系数矩阵。

用$N^*_m$表示从$N_m$导出的网络，即将所有电流源开路（或移去），将并联的 $\pm 1S$ 的导纳中的 $-1\Omega$的电阻器开路，同时短接所有的电压源以及短接串联$\pm 1\Omega$ 阻抗中的$-1\Omega$ 的电阻。于是$N^*_m$是一个由$R,L,C$所组成的无源网络，它可用图2来描述。为方便起见，$N^*_m$的相应于$N_m$ 控制支路的支路仍然称为控制支路，即便它未含有受控源。

利用这些预备知识，现在我们来证明本节的主定理。

**主定理**

一个线性有源网络$N$，当且仅当修正网络$N_m$满足下列约束时，为唯一可解。

1) 存在一个树$t$，使得所有的受控电压源或独立电压源是 $t$ 的树支和所有的受控电流源和独立电流源是 $t$ 的连支。这可等效地叙述为既不存在一个仅含有由受控电压源及独立电压源所构成的回路，也不存在一个仅包含有由受控电流源及独立电流源所构成的割集。

2) 用复频变量$s$表示时

$$\det(\phi^{-1}+HK)\neq 0 \tag{7}$$

式中

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & B^{\bar{t}}_{vv} & B^{\bar{t}}_{cv}-B^{\bar{t}}_{cvp}A^{-1}_{cv} \\ Q^t_{vc}-Q^t_{vcp}A^{-1}_{vc} & Q^t_{cc} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8a}$$

$$
\phi = \begin{bmatrix} A_{vc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{cv} \end{bmatrix} \tag{8b}
$$

$H$ 是转移函数矩阵，它的各行对应于各控制支路的控制变量，它的各列对应于 K 的各行，使 $H$ 的元素$h_{kq}$是$N_n^*$中的转移函数，即建立了相应于 $\phi$ 的第 $k$ 列的控制支路的控制变量（电压或电流）与对应于 K 的第$q$行的支路$b_q$上的激励之间的关系。

1）如果$b_q$是$t$的一个连支，在$b_q$中串入一个电压源，其极性与$b_q$所规定的极性相反。

2）如果$b_q$是$t$的一个树支，把一个电流源与$b_q$相并联，其电流参考方向与$b_q$规定的方向相反。

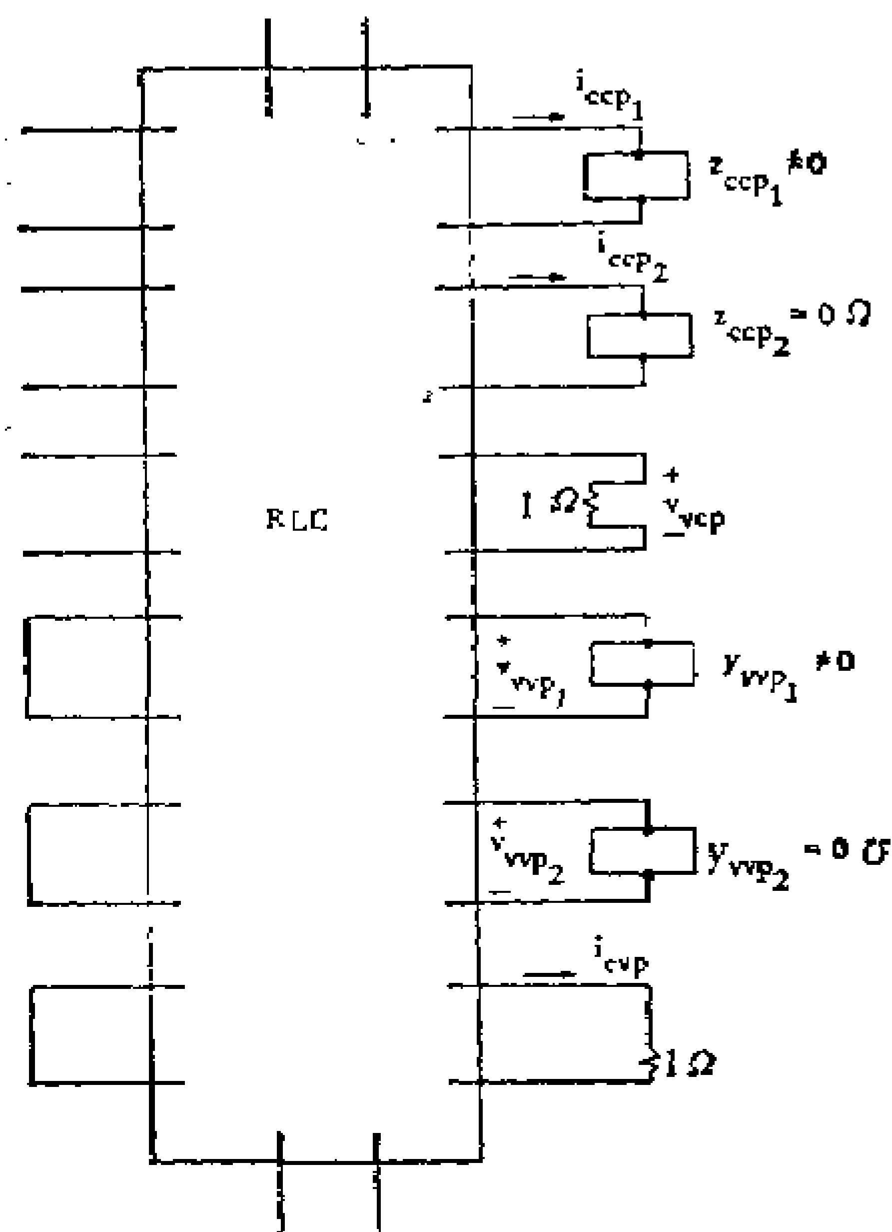



图2　$N_n$的无源网络$N_n^*$。

证明一必要性：条件1）的必要性已在引理中证明。为了证明条件2)，我们进一步根据上面采用的符号，分割(6)式的方程组：

式中各个$U$表示适当阶数的单位矩阵。我们注意 $Q_{cv}$，$Q_{vv}$ 和$Q_c$ 的每个矩阵构成了对应于树支$t$的单位矩阵的一部分，而 $B_j$，$B_{cc}$ 和 $B_{vc}$ 的每个矩阵构成了对应于$\bar{t}$的连支的单位矩阵的一部分。对(9)式进行消去过程，我们得到下列的等效方程组：

因为根据假设网络$N$ 有唯一解，(9)式(即(10)式)的系数矩阵是非奇异的[1]。但是(10)式的系数矩阵的充要条件是下列矩阵为非奇异矩阵。

$$
\begin{bmatrix} B^{\bar{t}}_{vcp} & B^{\bar{t}}_{ccp}Z_{ccp} & B^{\bar{t}}_{vvp} + B^{\bar{t}}_{vv}A_{vv} & B^{\bar{t}}_{ct}A_{cv} + B^{\bar{t}}_{cvp}Z_{cvp} & B^{\bar{t}}_{p}Z_{p} \\ Q^{t}_{vc}A_{vc} + Q^{t}_{vcp}Y_{vcp} & Q^{t}_{ccp} + Q^{t}_{cc}A_{cc} & Q^{t}_{vvp}Y_{vvp} & Q^{t}_{cvp} & Q^{t}_{p} \end{bmatrix} = T + K_1\phi_1 \tag{11}
$$

$$
\begin{bmatrix}
U_f & 0 & 0 & B^f_{ccp} & B^f_{cvp} & B^f_p & B^f_{cv} & B^f_{vv} & B^f_{vcp} & 0 & B^f_{vvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & U_{ss} & 0 & B^{ss}_{ccp} & B^{ss}_{cvp} & B^{ss}_p & B^{ss}_{cv} & B^{ss}_{vv} & B^{ss}_{vcp} & 0 & B^{ss}_{vvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & U_{ss} & B^{ss}_{ccp} & B^{ss}_{cvp} & B^{ss}_p & B^{ss}_{cv} & B^{ss}_{vv} & B^{ss}_{vcp} & 0 & B^{ss}_{vvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & B^{t}_{ccp} & B^{t}_{cvp} & B^{t}_p & B^{t}_{cv} & B^{t}_{vv} & B^{t}_{vcp} & 0 & B^{t}_{vvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -U_{ccp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{ccp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -U_{cvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{cvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{ss} & 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{vcp} & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{vcp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{vvp} & 0 & 0 & 0 & -U_{vvp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{ss} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q^f_{ccp} & 0 & Q^{t}_{cvp} & Q^f_p & Q^f_{vcp} & Q^f_{vvp} & Q^f_{cc} & Q^f_{vc} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q^{ss}_{ccp} & 0 & Q^{ss}_{cvp} & Q^{ss}_p & Q^{ss}_{vcp} & Q^{ss}_{vvp} & Q^{ss}_{cc} & Q^{ss}_{vc} & U_{ss} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q^{ss}_{ccp} & 0 & Q^{ss}_{cvp} & Q^{ss}_p & Q^{ss}_{vcp} & Q^{ss}_{vvp} & Q^{ss}_{cc} & Q^{ss}_{vc} & 0 & U_{ss} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q^{t}_{ccp} & 0 & Q^{t}_{cvp} & Q^{t}_p & Q^{t}_{vcp} & Q^{t}_{vvp} & Q^{t}_{cc} & Q^{t}_{vc} & 0 & 0 & U_t
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
V_f \\ V_{ss} \\ V_{ss} \\ V_{ccp} \\ V_{cvp} \\ V_p \\ V_{ss} \\ V_{ss} \\ V_{vcp} \\ I_{ccp} \\ V_{vvp} \\ I_{cvp} \\ I_p \\ I_{vcp} \\ I_{vvp} \\ I_{ss} \\ I_{ss} \\ I_{ss} \\ I_{ss} \\ I_t
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-B^f_c & 0 \\
-B^{ss}_c & 0 \\
-B^{ss}_c & 0 \\
-B^{t}_c & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & -Q^f_i \\
0 & -Q^{ss}_i \\
0 & -Q^{ss}_i \\
0 & -Q^{t}_i
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-B^f_c E \\
-B^{ss}_c E \\
-B^{ss}_c E \\
-B^{t}_c E \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
-Q^f_i J \\
-Q^{ss}_i J \\
-Q^{ss}_i J \\
-Q^{t}_i J
\end{bmatrix}
\qquad (9)
$$



惠开论文

$$
\begin{bmatrix}
U_l & 0 & 0 & B^l_{ccp} & B^l_{cup} & B^l_p & B^l_{cu} & B^l_{uu} & B^l_{ucp} & 0 & B^l_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & U_{cc} & 0 & B''_{ccp} & B''_{cup} & B''_p & B''_{cu} & B''_{uu} & B''_{ucp} & 0 & B''_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & U_{uu} & B''_{ccp} & B''_{cup} & B''_p & B''_{cu} & B''_{uu} & B''_{ucp} & 0 & B''_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -U_{ccp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{ccp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -U_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{cu} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{cu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{uu} & 0 & 0 & A_{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^t_{ucp} & B^t_{ccp} Z_{ccp} & B^t_{cup} + B^t_{uu} A_{uu} & B^t_{cu} A_{cu} + B^t_{cup} Z_{cup} & B^t_p Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q'_{uu} A_{uu} + Q'_{ucp} Y_{ucp} & Q'_{ccp} + Q'_{cu} A_{cu} & Q'_{cup} Y_{cup} & Q'_{cup} & Q'_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{ucp} & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{ucp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{cup} & 0 & 0 & 0 & -U_{cup} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{cu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{cu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_{uu} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q''_{ccp} & 0 & Q''_{cup} & Q''_p & Q''_{ucp} & Q''_{uup} & Q''_{uu} & Q''_{uc} & U_{ll} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q''_{ccp} & 0 & Q''_{cup} & Q''_p & Q''_{ucp} & Q''_{uup} & Q''_{cc} & Q''_{uc} & 0 & U_{cc} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q'_{ccp} & 0 & Q'_{cup} & Q'_p & Q'_{ucp} & Q'_{uup} & Q'_{cc} & Q'_{uu} & 0 & 0 & U_{uu}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
V_l \\ V_{cc} \\ V_{uu} \\ V_{ccp} \\ V_{cup} \\ V_p \\ V_{cu} \\ V_{uu} \\ V_{ucp} \\ I_{ccp} \\ V_{cup} \\ I_{cup} \\ I_p \\ I_{ucp} \\ I_{cup} \\ I_{cu} \\ I_{uu} \\ I_{ll} \\ I_{cc} \\ I_{uu}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-B^l_c & 0 \\
-B''_c & 0 \\
-B''_c & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
-B^t_c & 0 \\
0 & -Q'_l \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & -Q''_l \\
0 & -Q''_l \\
0 & -Q'_l
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} E \\ J \end{Bmatrix}
\qquad (10)
$$

式中

$$T=\begin{bmatrix} B_{vcp}^{T} & B_{ccp}^{T}Z_{ccp} & B_{vvp}^{T} & B_{cvp}^{T} & B_{p}^{T}Z_{p} \\ Q_{vcp}^{t} & Q_{ccp}^{t} & Q_{vvp}^{t}Y_{vvp} & Q_{cvp}^{t} & Q_{p}^{t} \end{bmatrix} \tag{12a}$$

$$K_{1}=[K \quad O] \tag{12b}$$

$$\phi_{1}=\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & U_{p} \end{bmatrix} \tag{12c}$$

---

1 从（9）式得到(10)式的初等变换如下：

1）将 $B_{vcp}^{T}$乘第5行并把它加到第4行。

2）将 $B_{cvp}^{T}$乘第6行并把它加到第4行。

3）将 $B_{p}^{T}$乘第7行并把它加到第4行。

4）将 $B_{cv}^{T}$乘第8行并把它加到第4行。

5）将 $B_{vv}^{T}$乘第9行并把它加到第4行。

6）将 $Q_{vc}^{t}$乘第13行并把它加到第14行。

7）将 $Q_{cc}^{t}$乘第12行并把它加到第14行。

8）将 $Q_{vvp}^{t}$乘第11行并把它加到第14行。

9）将 $Q_{vcp}^{t}$乘第10行并把它加到第14行。

10）将得到的第4行到第9行进行转置。

11）将得到的第14行到第10行进行转置。

我们注意到在（11）式中 $Y_{vcp}$和 $Z_{cvp}$ 是零矩阵；它们用这种方法表示是为了得到 T 的各元素的物理解释。

现在我们来证明$T$是非奇异的。为达此目的，研究该方程组：

$$TX_{1}=C \tag{13}$$

式中

$$X_{1}'=[V_{vcp} \; I_{ccp} \; V_{vvp} \; I_{cvp} \; I_{p}]' \tag{14a}$$

$$C=\begin{bmatrix} -B_{c}^{T}E \\ -Q_{1}^{t}J \end{bmatrix} \tag{14b}$$

令$M$是一个与$N_{m}^{*}$用相同过程从$N_{m}$导出的网络，只不过我们未移去（开路）独立电流源和短路独立电压源。令$t''$是$M$中的树相应于$N_{m}$中的树。显然，$t''$可以利用$t$把所有对应的受控电压源的支路短路而得到。利用 $t''$写出基尔霍夫电压方程和电流方程连同 $v$-$i$ 的关系一起，不难看出（10）式和(13）式表示了网络$M$用 $X_{1}$ 作变量的状态方程组。因为 $M$是一个仅有独立电源的$RLC$网络，因此由条件1），$N_{m}$和$M$既不包含仅由电压源所构成的回路，也不包含仅由电流源所组成的割集，利用$Seshu$和$Reed$[4] 所证明的定理可知，$M$有唯一解。于是（13）式的系数矩阵$T$是非奇异矩阵。

利用这一插叙，现在我们来着手证明条件2）是必要的。研究非奇异矩阵（$T+K_{1}\Phi_{1}$），它可分解为

$$T+K_{1}\phi_{1}=T(\phi_{1}^{-1}+T^{-1}K_{1})\phi_{1}$$

$$=T\begin{bmatrix} \phi^{-1}+HK & 0 \\ H_{p}K & U_{p} \end{bmatrix}\phi_{1} \tag{15}$$

式中 $$T^{-1}=\begin{bmatrix}H\\ H_p\end{bmatrix} \tag{16}$$

因此，当且仅当用$s$表示的（$\Phi^{-1}+HK$）不恒为奇异矩阵时，则（$T+K_1\Phi_1$）是非奇异矩阵，且(7) 式成立。

最后，我们来讨论$\boldsymbol{H}$的各元素的物理意义，我们已有

$$\begin{bmatrix}V_{vcp}\\ I_{ccp}\\ V_{vvp}\\ I_{cvp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\\ H_{31} & H_{32}\\ H_{41} & H_{42}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-B_c^TE\\ \\ -Q_t^TJ\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中系数矩阵为分块矩阵形式的 $H$。$-E_c^TB$ 的第$k$行的元素$e_k$可以识辨出在$N_m$中，由对应于 $B_c^T$的第$k$行的连支所定义的基本回路中的独立电压源的电压代数和。因为连支是一个无源支路，它在$M$中有一个相应的无源连支。类似地，$-Q_t^TJ$ 的第$k$行的元素$i_k$表示了由$N_m$中与 $Q_t^T$的第$k$行的树支相对应的基本割集中独立电流源的电流代数和。再次地，树支是一个无源支路，它在$M$中有相应的无源树支（对于$t''$）。令$t^*$是$N_m^*$的树，它相应于$M$中的树$t''$。于是$t^*$可由$t''$中将所有电压源支路短路而得到。在$N_m^*$中我们将一个等效的电压源$e_k$插入相对于$t^*$的每一条无源连支中，其极性与连支的极性相反，并且把一个等效的电流源$i_k$并联在每一条无源树支上，其电流参考方向与树支支路的参考方向相反。这样，我们便得到了一个对应于这些等效电源的多端口网络，且用$P$来表示该多端口网络。那么（17）式的 $H$ 是一个混合矩阵，它建立了相应控制支路中的控制变量（电压和电流）与$P$的输入端口激励之间的关系。例如 $H_{11}$的元素是电压控制电流源的控制电压与输入端口的电压（所有的电流源均移去）的比。类似地$H_{32}$的元素是转移阻抗，它建立了电压控制电压源的控制支路的电压与$P$的输入端口电流（所有的电压源均短路）之比。

充分性：条件1）意味着（13）式的系数矩阵$T$是非奇异矩阵[4]。它与（15）式一起表明，如果满足条件2)，则（11）式的矩阵（$T+K_1\Phi_1$）是非奇异矩阵，因此（9）式和(10)式的系数矩阵是非奇异矩阵。从此得到这一定理。定理证毕。

我们注意$\Phi$ 的阶数，即 $H$ 的行数或$K$的列数等于 $N_m$中的受控源的数目，并且$\boldsymbol{H}$的列数或 $K$的行数等于基本回路数加基本割集数，这些基本回路是由非源连支与至少包含有一个受控电压源而形成，而这些割集是由无源树支与至少包含有一个受控电流源所确定的。

**4.说明性的例子**

前节中所讨论的结果在本节中将加以说明。因为具有受非零的有限值阻抗控制的受控源网络已在文献[8]、[9]中研究过，下面我们将致力于研究由短路电流或开路电压控制的受控源。

例1.

研究图3(a)的网络$N$。我们希望确定$N$有唯一解。为了实现这一目的，我们首先导出修正网络$N_m$，它在图3(b)中给出。在$N_m$中令$t$是一个包含支路$v_9$，$R_2$，$L_3$和$Y_4$ 的树。于是定理1的条件满足。因为$N$中的受控源仅仅是由开路电压控制的电流源，则条件(2) 简化为：

$$\det[A_{vc}^{-1}+H_{12}(Q_{vo}^T-Q_{vcp}^TA_{vc}^{-1})]\neq 0 \tag{18}$$

从3(b)，我们有：

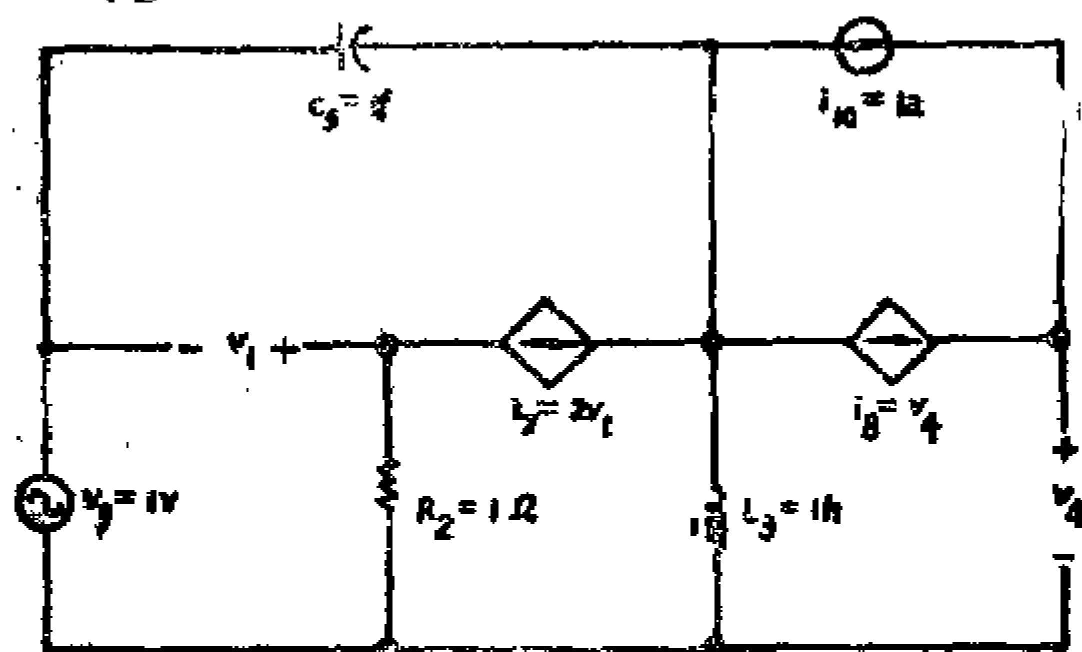
$$
A_{rt}^{-1} = \begin{matrix} & v_1 & v_4 \\ i_7 & \left[\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]^{-1} \\ i_8 & \end{matrix} = \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \tag{19a}
$$

对于树$t$，所希望的基本割集矩阵的子矩阵由下式给出：

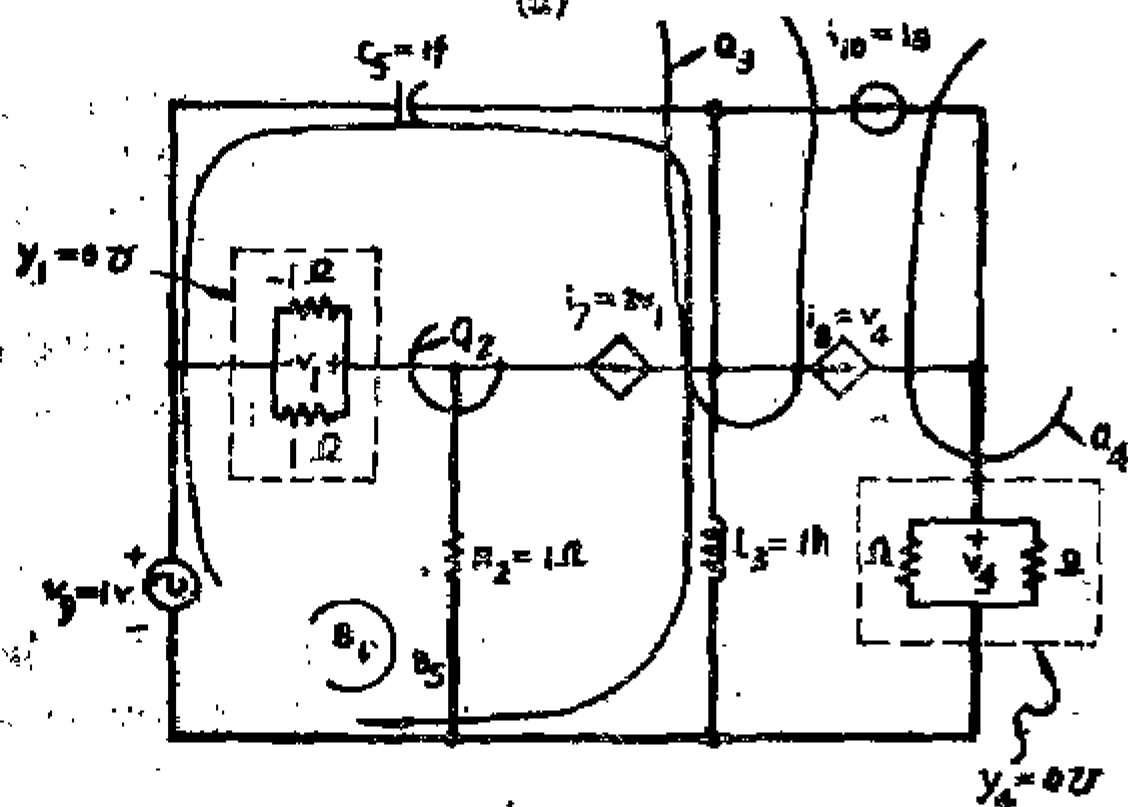
$$
[Q_{sc}^t \; Q_{scp}^t] = \begin{matrix} & i_7 & i_8 & v_1 & v_4 \\ Q_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Q_2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ Q_3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \tag{19b}
$$

$H_{12}$是一个转移阻抗矩阵，它建立了两个1Ω电阻器的控制支路的电压与树支 $v_4'$，$R_2$和$L_3$ 的电流源（如图 3（c）所示）的电流之间的关系，从而得到

$$
H_{12} = \begin{matrix} & j_4 & j_2 & j_3 \\ v_1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \tag{19c}
$$




(a)




(b)

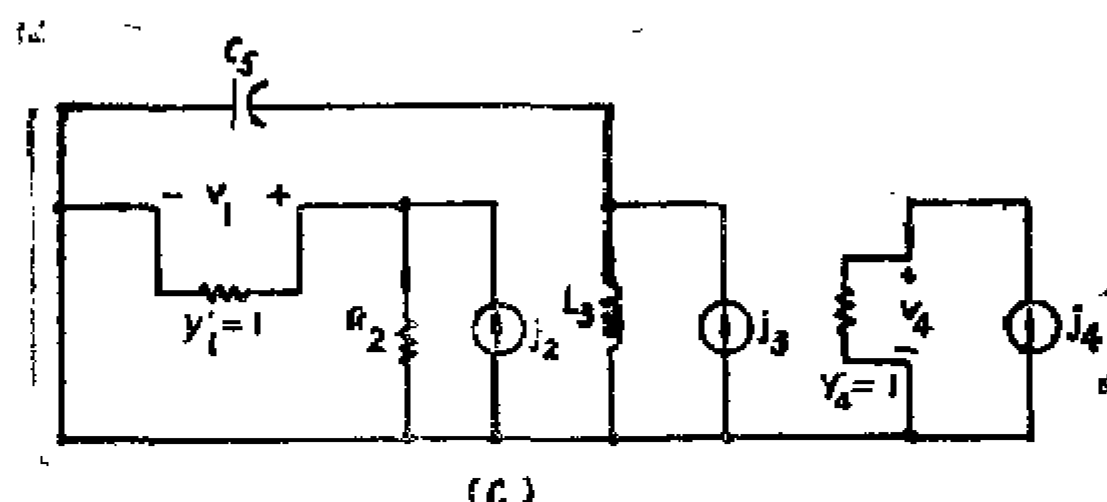



图3 (a)包含有两个电压控制电流源的网络
(b)其修正网络$N_m$。
(c)为得到$H_{12}$各元素的多端口网络

将（19）式代入（18）式并完成所示的运算，我们得到：

$$\det[A_{vc}^{-1}+H_{12}(Q_{vc}^{t}-Q_{vcp}^{t}A_{v}^{-1})]=-\frac{1}{4}\neq 0 \tag{20}$$

它证明条件2）也是满足的。因此我们断定网络$N$有唯一解。

例2.

图4（a）是一个含有两个电流控制电流源的网络N。问题是确定$N$是否有唯一解。首先，我们导出修正网络$N_m$，它在图4(b) 中给出，然后在$N_m$中取一个树，它由支路$R_2$，$L_4$，$R_3$和$U_9$所组成。

因此定理的条件1）是满足的。因为在$N_m$中仅包含了电流控制电流源，条件2)可简化为：

$$\det(A_{cc}^{-1}+H_{22}Q_{cc}^{t})\neq 0 \tag{21}$$

从3(a)，我们有：

$$A_{cc}^{-1}=\begin{matrix} & i_1 & i_4 \\ i_7 & \\ i_8 & \end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{22a}$$

对于选定的树$t$，基本割集矩阵的子矩阵$Q_{cc}^{t}$可直接从$N_m$得到且为：

$$Q_{cc}^{t}=\begin{matrix} & i_7 & i_8 \\ Q_4 & 0 & 1 \\ Q_2 & 1 & 0 \\ Q_3 & 0 & 1\end{matrix} \tag{22b}$$

$H_{22}$是一个电流比矩阵，它建立了控制支路$Z_1$和$L_4$中的电流与树支$L_4$、$R_2$与 $R_3$相连的电流源之间的关系，如图4(c) 所示，并得到

$$H_{22}=\begin{matrix} & j_4 & j_2 & j_3 \\ i_1 & \frac{s^2}{s^2+1} & -1 & 0 \\ i_4 & \frac{1}{s^2+1} & 0 & 0\end{matrix} \tag{22c}$$

我们注意，$H_{22}$的各元素可直接从图4(c)中得到。例如第一列中的各元素对应于当电源$j_4=1$，移去$j_2$和$j_3$时，在$z_1$和$L_4$中的电流。

最后，把（22）式代入（21）式，我们得到：

$$\det(A_{cc}^{-1}+H_{22}Q_{cc}^{t})=0 \tag{23}$$

于是我们断定$N$无唯一解。

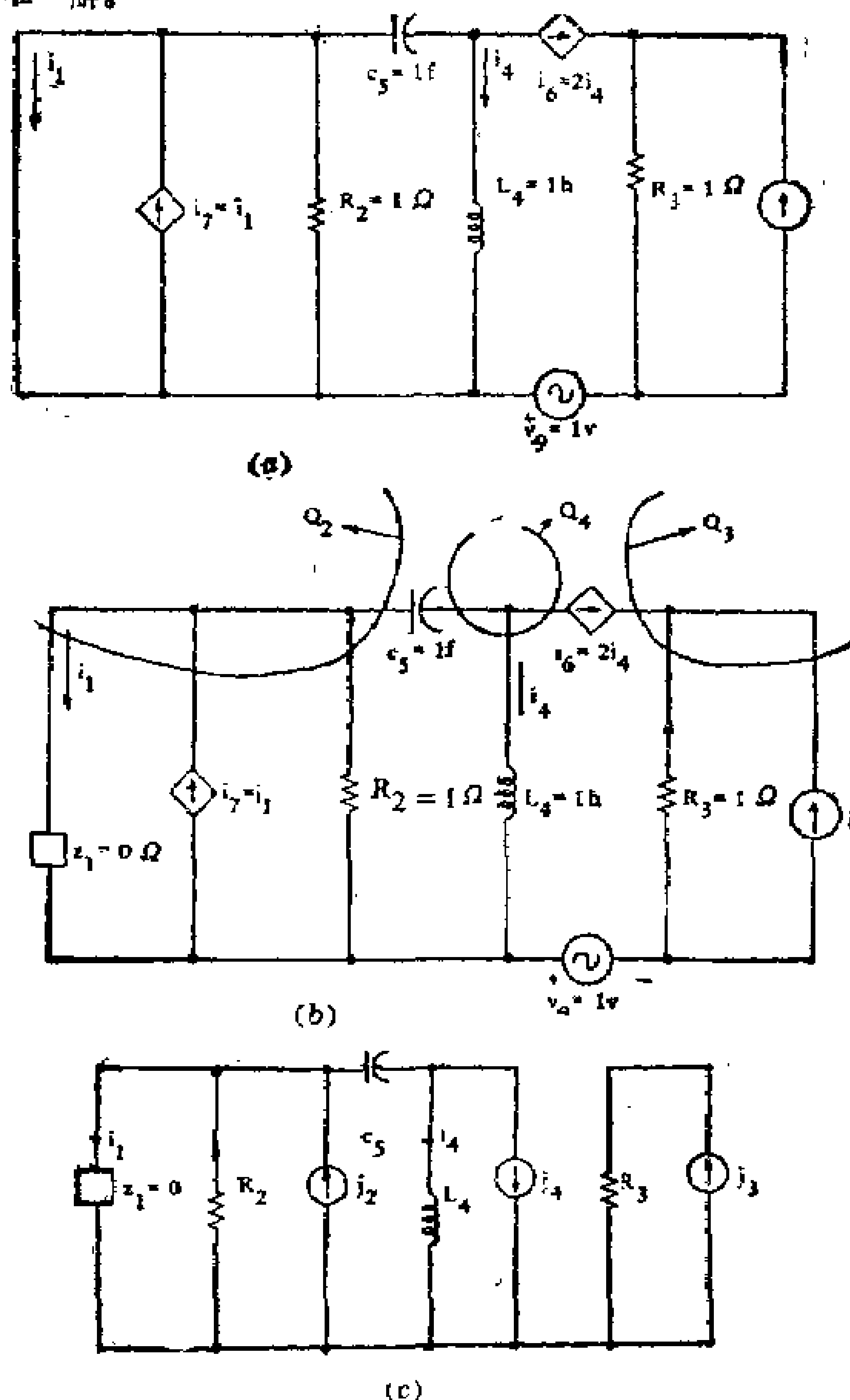



图4 (a)包含有两个电流控制电流源的网络。

(b)其修正网络$N_m$。

(c)为得到$H_{22}$各元素的多端口网络。

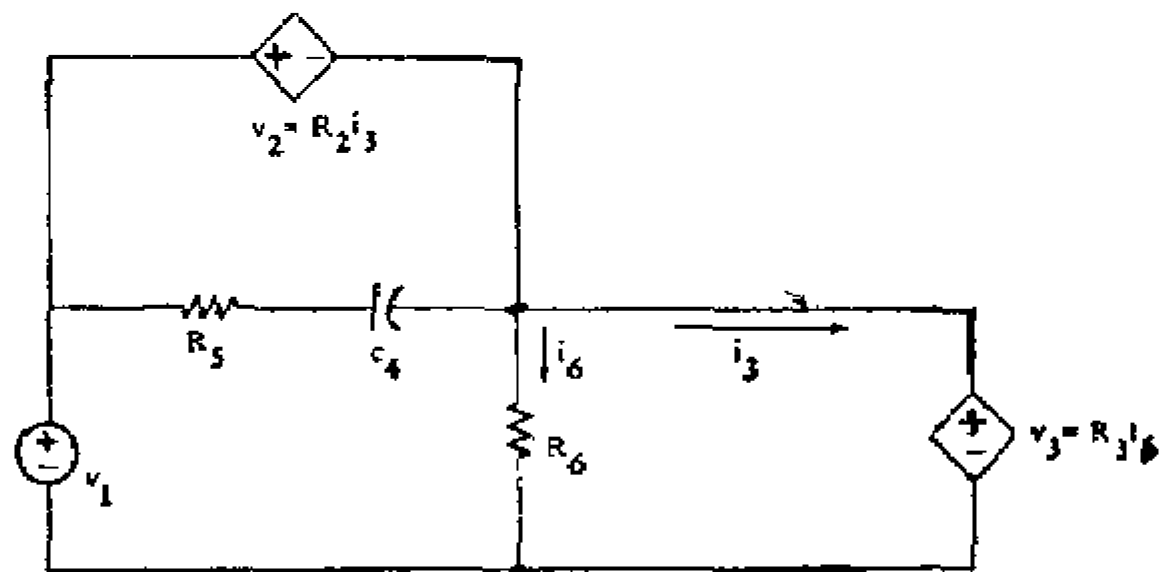
**例3.**

研究图5(a)的网络$N$。我们希望确定为使网络拥有唯一解的$R_5$和$R_8$的值。$N$的修正网络$N_m$在5(b) 中给出。取一个树如图所示（$C_4$，$R_6$，$v_1$，$v_2$，$v_3$）。我们看出条件1)是满足的。条件2) 简化为：

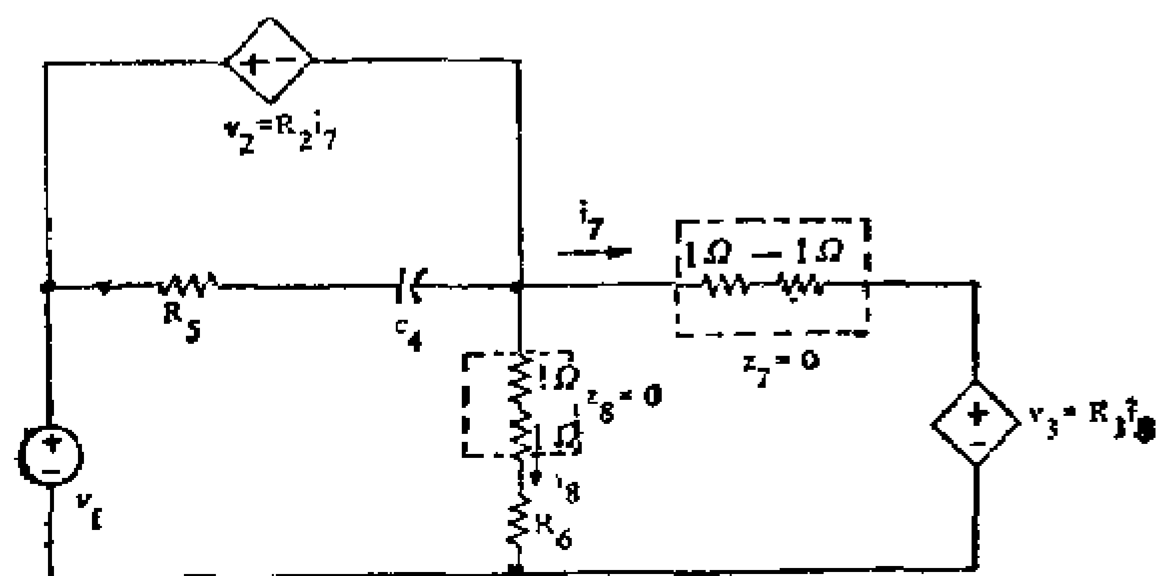
$$\det[A_{cc}^{-1}+H_{ci}(B_{cv}^{t}-B_{cvp}^{t}A_{cc}^{-1})]\neq 0 \tag{24}$$

所需要的矩阵得到如下：

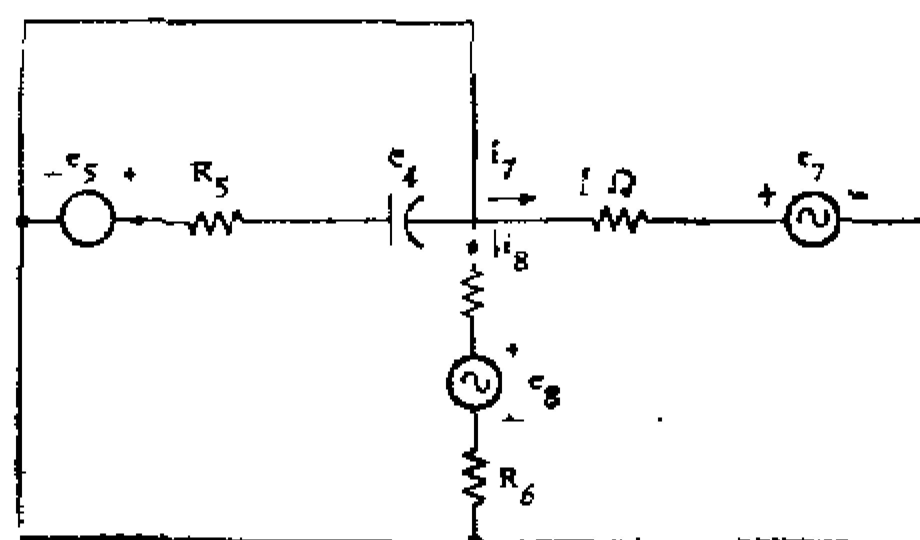
$$A_{cv}=\begin{matrix} & i_7 & i_8 \\ v_2 & R_2 & 0 \\ v_3 & 0 & R_3 \end{matrix} \tag{25a}$$



(a)



(b)



(c)

图5.(a)包含两个电流控制电压源的网络(b) 修正网络$N_m$ (c) 用以得到$H_{41}$各元素的多端口网络

$$
[\,B_{cv}^{T}\quad B_{cvp}^{T}\,] = \begin{array}{c} \\ R_5 \\ z_8 \\ z_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2 & v_3 & z_7 & z_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{25b}
$$

$$
H_{41} = \begin{array}{c} \\ i_7 \\ i_8 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_6 & e_8 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1+R_6} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{25c}
$$

式中$H_{41}$是从图5(c)的网络得到的，把(25) 式代入(24) 式，我们得到：

$$
\det[A_{cv}^{-1} + H_{41}(B_{cv}^{T} - B_{cvp}^{T}A_{cv}^{-1})] = \frac{R_6 - R_5}{R_5(1+R_6)} \tag{26}
$$

因此只要$R_5$和$R_6$没有相同的值，$N$便是有唯一解。

## 结　　论

我们已经给出了一般线性有源网络具有唯一解的充要条件，此种网络可以包含任意数目和任意类型的受控源。在我们的研究中可包含有诸如回转器、阻抗变换器等器件。正如所预料，为了拥有唯一解网络的约束必须由两类约束所组成。一种约束是对电源配置的限制。它可叙述为在修正网络$N_m$中，没有仅含受控电流源及独立电流源的割集以及没有仅由受控电压源和独立电压源所组成的回路。检验这一点是比较简单的。但是单有拓朴结构不足以充分地表征该网络。第二种约束是需要的，它叙述了受控变量与控制变量之间的关系是独立的相似关系，这种关系由于受控源的插入网络而受到影响。这一约束包括了确定一个阶数等于受控源数的矩阵，这与Purslow条件[9]形成对照，该文中矩阵的阶数等于受控源数加上相应的无源网络的状态变量数。因为在大多数网络中受控源的数目是较小的，所以相应的矩阵行列式不会有计算上的困难。这种方法比起仅含有少量的受控源的大网络的常用方法尤其显出其优点。

我们注意，当无受控源时，第二个约束总是满足的，并且它们首先由Seshu和 Reed 导出[4]。

## 参　考　文　献


[1] G. Kirchhoff, "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird," *Poggendorf Ann. Phys.*, vol. 72, pp. 497-508, 1847.

[2] H. Weyl, "Repartition de corriente et uno red conductora," *Rev. Mathmatica*, vol. 5, pp. 153-164, 1923.

[3] B. Eckmann, "Harmonische Funktionen und Randwert Aufgaben in einem Komplex," *Commun. Math. Helvetici*, vol. 17, pp. 240-255, 1944-1945.

[4] S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961.

[5] J. P. Roth, "An application of algebraic topology to numerical analysis: On the existence of a solution to the network problem," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 41, pp. 518-521, 1955.

[6] ——, "An application of algebraic topology: Kron's method of tearing," *Quart. Appl. Math.*, vol. 17, pp. 1-24, 1959.

[7] W. K. Chen, *Applied Graph Theory*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland and New York: Elsevier, 1971, ch. 2.
[8] N. R. Malik and H. W. Hale, "Equations for active networks: Existence of unique solutions," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-14, pp. 37-43, Jan. 1967.
[9] E. J. Purslow, "Solvability and analysis of linear active networks by use of the state equations," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-17, pp. 469-475, Nov. 1970.
[10] F. E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra*. New York: Macmillan, 1958.
[11] N. T. Chan, "On the solvability of linear active networks," Ph. D. dissertation, Ohio Univ., Athens, June 1972.

# 十八、图论应用于网络方面的新进展

### 1.引言

在过去的40年中，我们目睹了图论及其应用的稳步发展，它在近十五年更为兴旺起来，并进入一个非常活跃的新时期。这种迅速发展的某种度量可由大量关于图论及其应用的文献目录的出版[1~4]所显示。最早的与最广博的文献目录是由J. W. Moon与L. Moser汇编(后来由A. A. Zykov扩充)的，发表于1963年6月在捷克斯洛伐克举行的专题讨论会上，并刊登在专题讨论会论文集中[1]。这一文献目录包含了1617篇论文，并且包括了在西方未能迅速得到的一些东欧学者的贡献。A. A. Zykov 的文献目录的短处之一是遗漏了许多有意义的参考文献，而这些被遗漏的文献涉及到图的应用比图的理论为多。

在1969到1971年间，N. Deo[2,3]在加州理工学院喷气推进实验室工作时，汇编了广博的有关图论及其应用的英文文献目录，他的文献目录大约包含了3041篇论文。最近，在美国数学学会下设立的一个由W. G. Brown领导的编辑小组，出版了一部《图论评论》的四卷集[4]。它包括了从1940到1978年间由《数学评论》出版的所有图论评论文献（包括了卷1到56），而涉及到图论应用的外围领域尚未完全包括进去。这些应用如电网络、逻辑网络、理论物理的应用，特别是包含有二分图问题的某些运筹学中的应用以及某些计算机科学中的应用。此外Waterloo 大学研究组合论及优化论之各领域的学者们提出了进一步查阅图论引文的方案，其中包括有应用图论的单独文献目录。这个方案的一个重要特点是它列出了引用某篇论文的所有其它论文。因而，它能帮助作者们识别新的研究领域（其中应用了他们的论文），以及从已知的出版刊物判明在一个给定领域中新近的结果。这种计算机化系统是由 G. Berman[5] 指导的，它将会定期地更新。

当今对图论的浓厚兴趣来自它能模拟在物理科学、工程、社会科学与经济问题中出现的多种系统模型。凡是含有二元关系的任何系统都可用图来表示。可以预测，图论将在一个时期内继续快速地发展。这种发展证实了本文所采用的叙述方法的价值：与其浅薄地介绍图论的较大部分，不如深入地介绍紧密地联系着电网络的应用图论的较小部分，为了使这篇综述论文限制在适当的篇幅之内，本文仅考虑两个领域：即图的分解和混合分析，以及网络流和通信网。

### 2.图的分解与混合分析

图论在物理科学中最重要的应用之一是它在电网络理论中的应用。从抽象的观点看，电网络可用图来表示。它的边至少在某种程度上表示电元件，而权表示元件的特性。这就导致了网络分析的三种分析法，即节点法、回路法、和割集法(可参阅参考文献[6])。在频域中，这些方法是通过把欧姆定律对于所有支路表达成包含导纳或阻抗的形式而导出的。结果，这些方法会失去普遍性，同时在计算机辅助网络设计中会引起截断误差[7]。为了避开这一困难，如果将某些支路用导纳表示，另一些支路用阻抗表示，那将是极其有用的。这就导致了*网络的混合分析法，它由Kron*[8] *首先提出，并由Branin*[9] *与Happ*[10]*作过进一步的阐述。*

在时域中，一类重要的混合方程是状态方程，Bashkow[11] 写出了显式状态方程组，并由Bryant进行了推广[12,13]。

在混合分析中，某些边的电压与另一些边的电流被取作为独立变量。如果它们在不违背基尔霍夫定律的前提下可以任意地赋值，而且它们通过基尔霍夫定律可以确定网络中每一条边的电压或电流，则称其为完备变量集[14]。这种方法是众所周知的节点分析与回路分析的推广。在混合分析中完备变量集的独立变量数被称为混合秩。这个混合秩决定于该网络图边集的划分。Amari[15]首先指出：在某些图中混合秩可能小于秩和零度的最小值。在所有的划分中最小的混合秩称为拓朴自由度，拓扑自由度是一个图的固有性质，且是由其拓朴结构唯一地确定的。

混合分析有许多优点。第一，混合方程的最小数目绝不超过回路方程或节点方程的数目。在电力系统中经常遇到的图1中，该图包括了三个节点组，每个组中有高密度的支路，而各节点之间由两个支路较少的梯形网络相连。可以验证该网络有44个节点方程和50个回路方程。

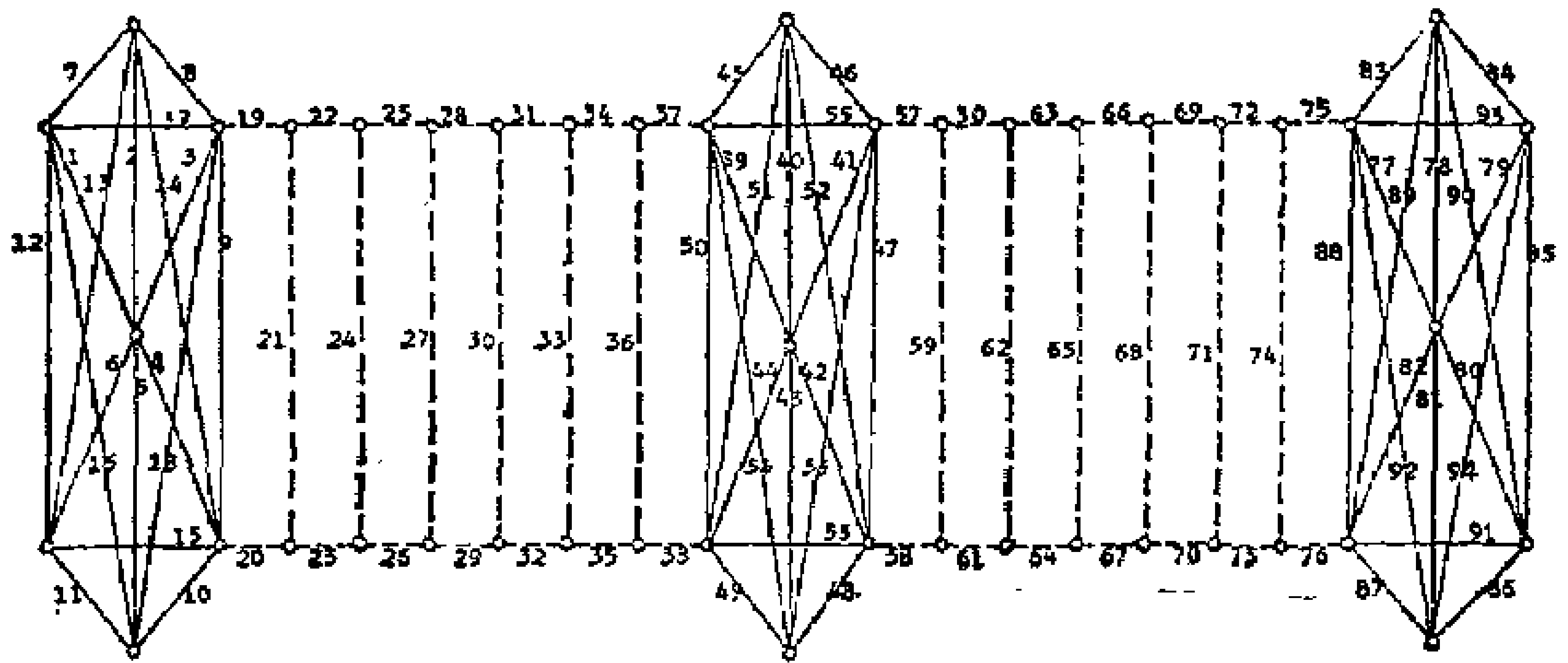



图1 实际例子

但是，仅需建立32个混合方程，在三个组的每个组中有6个电压变量，而在两个组中的每组中有7个电流变量，这些变量如下所示：

电压变量：

1,2,3,4,5,6；39,40,41,42,43,44；77,78,79,80,81,82。

电流变量：

19,22,25,28,31,34,37；57,60,63,66,69,72,75。

由于在解线性联立方程组中所需的计算量约正比于变量数的立方，因此混合分析的计算量为节点分析的$1/2.6(=32^3/44^3)$，而为回路分析的$1/3.8(=32^3/50^3)$。第二，在混合分析中每条边可描述为最合适的形式，因而可以限定系数矩阵中元素值大小的差异，从而减小在求解过程中引入的截断误差[16]。最后，混合表示法可以容易且自然推广到时变与非线性网络。事实上，时变、非线性网络问题的计算机辅助求解几乎总是利用混合法来完成的。

混合分析的主要困难在选取一组完备的变量集。这包括把网络图的边集划分成不同的类别，它与主划分的概念密切相关。图的主划分首先由Kishi与Kajitani[17]，在他们所研究的下列两类问题中提出的：

(i) 求取一个图$G$的边集合$E$的最大子集$S$，使得对于$S$的任意划分$S=S_1\cup S_2$，且$S_1\cap S_2=\phi$，至少存在一个树，它含有$S_1$的边而不含$S_2$的边。于是，如果$|S|$表示$S$的元素数，则$G$的所有树能划分为$2^{|S|}$个非空类型。

(ii) 在$G$的树图中构成一个哈密尔顿回路。因为在问题(i)中子集$S$是一个边的集合。它既不包含回路也不包含割集，该划分可用两个树的差来表示。因而问题(i)可简化为：

(iii) 求取一对距离为最大的树。

从一对给定的树出发，Kishi与Kajitani[18]提出了一个可得出较远距离树对的算法。为证明这一过程能得到一个最大距离树对，他们引进了主划分的概念作为证明方法。利用这一概念，Ohtsuki，Ishizaki与Watanable[19]提出了一个求混合分析的最小完备变量组的方法。他们的方法是基于一个极值树的概念，极值树是这样的树，即它的补图（补树）的秩为最大。他们指出通过主划分可以定义网络图的三类子图。它们对应于采用导纳，阻抗和阻纳的子网络。

主划分的概念并不是新的。Dulmage与Mendelsohn[20, 21]在研究二分图的结构（关于节点覆盖与最大匹配）时，就引入了节点的唯一划分，即所谓$DM$-分解。他们指出了任意一个二分图可以分解为两部分，即一个是不能接纳的(*inadmissble*)部分和另外的一个核心部分。核心部分可进一步分解为不可简化的部分，从而得到二分图的一个规范化化简。从目前截拟阵（transversal matroids)的知识来看，这种划分能推广到拟阵的主划分。因此有些人认为主划分是起源于$DM$-分解。

在1965年，Edmonds[22]把扩大一对树间距离的技术对于拟阵以更一般的形式提出。最大距离的验证可应用Tutte[23]与Nash-William[24]的最小一最大定理来进行。Baron 和 Imrich[25]提出了构造最大距离树对的另一种算法，作为Ore[26]所提问题的一个解法。一旦构成了最大距离树对，那么给定图的边集可划分为三部分$(E_d, E_o, E_t)$。图$G$的主划分是$G$的三子图组$(G_d, G_o, G_t)$，它们由$G$的边集的三划分$(E_d, E_o, E_t)$所唯一确定，且满足条件：它们的零度与秩的比值（密度）分别大于、等于和小于1。Ohtsuki 等人[19]证明实现一个网络拓扑自由度的边集族是与并、交运算密切有关的。Kajitani[27]和Ozawa[129]指出了主划分$(G_d, d_o, G_t)$的中心部分$G_o$可进一步地分解，并且在这些精细结构上可以定义一个偏序。偏序集的单调分析给出了对应网络拓扑自由度的变量集。自从1971年以来主划分的概念已推广到矩阵、拟阵、图对和拟阵对[28-30]。Bruno与Weinberg[28]推广这种划分的途径是，对于任意非负整数值（而不是1）的密度可得到类似的唯一划分。Tomizawa[29]和Narayanan[30]证明了对于任意非负实数密度都可进行这种划分。他们的结果被认为是在主划分意义上的最精细划分，并且包括了Bruno与Weinberg[28]的结果。应该指出：Narayanan[30]的$P$-序列、分子、及原子拟阵分别等效于Tomizawa[29]的不可解的子阵，不可分解的拟阵以及强不可简化的子阵。

作为这些发展的结果，有相当多的基本问题利用主划分作为工具已得到了解决，或者得到了良好的表征。一些已知的例子列举如下：

(a) 香农开关博奕。一个部分解是由Lehman[35]给出的，而全局解是由Bruna与Weinberg[36]给出的。

(b) 通过枢轴变换与一个矩阵相联系的那些矩阵类的最大秩一最小项秩定理(Max. rank Min. term-rank Theorem)——Iri[37]证明了这一定理并指出它可用于表征网络混合分析中的最小完备变量集。后来在[38]中，他把此定理与二分图的Dulmage-Mendelsohn[20]分解结合建立了在组合等价意义下的分解。

(c) 网络的唯一可解性。Roth[39, 40]，Malik和Hale[41]与Chen和Chan[42]研究了判别网络的唯一可解性问题。Ozawa[31]用纯图论的方法，以及Tomizawa[32]与Tomizawa和 Iri[43]借助与拟阵的概念都独立解决了这个问题。Ozawa[44]指出，在有源网络拓扑公式的二图表达式[45, 46]中，存在一个公共树是唯一可解性的图论充要条件。他还指出[47]：在没有公共树的情况下，可得到称为二图主划分的一个划分，通过该划分可以识别导致不可解性的子网络。

(d) 网络的故障诊断——网络故障诊断问题之一是确定为了求得所有的元件值所需测量的电流边和电压边的最小集合。假设在一个网络中区分三类元件，其中仅有电流、仅有电压或二者皆是可测量的。Shinoda[48]指出足以确定所有元件值的最少元件数目在某种限制条件下可以借助于求出一个最大距离树来得出。Tomiza 指出[49]，这一问题可包含在寻求 semi-muoids中的最大距离悬挂基对的问题之中。

(e) 定义在一个图上的新博奕——Kano[50, 51]提出了几类博奕，它们可看作是香农开关博奕的推广。其解答可用图的主划分来描述。

(f) Menger定理的推广——Tomizawa[52]指出：用于拟阵的 Menger 定理可论述成为在某些约束条件下拟阵的最大距离基对方面的一个定理。

(g) 有向图的主划分——Oishi 等人[53]基于最小强连通子图的概念提出了一个唯一划分，称为有向图的主划分。

(h) 中心树——一个图的中心树是这样一个树，它的补树秩在所有补树中为最小。Kajitani与 Kawamoto[54]指出了在混合分析中的最小完备变量集可用图的中心树来得到，并且引入了二阶混合网络分析作为一阶混合网络分析的推广。中心树用主划分来表征的问题已由其他作者进行了研究[55-57]。但是导出一个中心树枚举算法的基本问题尚未解决。

除了主划分之外，网络图可从另一不同的观点来分类与划分[58, 59]。如果一个图的零度与秩的差分别为正数、零或负数，则分别称其为密图，中等密度图或疏图。一个图，如果它不含有密的导出子图，则称为绝对非密图。如果它不含有密的与中等密度的导出子图，则称为绝对疏图。一个图，如果它不含疏的缩减图，则称为绝对非疏图。如果不含有疏的和中等密度的缩减图时，则称为绝对密图。最后，一个图，如果它不含有密的导出子图和疏的缩减图。则称为绝对中等密度图。可用最大距离树[18]，极值树[19]，与互补树[60]来表征这些图如下：

**定理1.** 一个连通图$G$是绝对非疏的充要条件是满足下列条件之一：

(i) 其最大距离树对不含有公共树支；

(ii) 其极值树不含有$G$的割集；

(iii) $G$含有一个互补树对。

**定理2.** 一个连通图是绝对非密图的充要条件是满足下列条件之一：

(i) 其最大距离的补树对不含公共的连支；

(ii) 存在一个不含$G$的回路的极值补树；

(iii) $G$包含有一个互补的补树对。

**定理3.** 一个连通图$G$，当且仅当具备定理1的一个条件与定理2的一个条件时，它是绝对中等密度的。

对于一个给定的图$G$，如果$G_1$是$G$的一个子图，并且$G_2$是从$G$将$G_1$所连接的节点短接，并且将$G_1$的边移去而得到的缩减图，则称$(G_1, G_2)$为$G$的分解。如果$G_1$是绝对非疏的，且$G_2$是绝对非密的时，则称$G$的分解$(G_1, G_2)$是调和的。在网络的混合分析中，问题是选取

一个最小的完备变量集。Gao和Chen[58, 59]指出：如果（$G_1$,$G_2$）是网络$G$的分解，而且如果$T_1$是$G_1$的一个树，$T_2$是$G_2$的一个补树，则当且仅当这一分解为调和分解时，$T_1$的树支电压集合与$T_2$的连支电流集合是一个最小的完备变量集。这一结果的物理意义在于：为了在混合分析中使独立变量数最小，我们应当选取所有绝对密的导出子图的电压变量与所有绝对疏的缩减图的电流变量来作为独立变量。注意即使一个图的调和分解不是唯一的，然而相对于所有的调和分解来说其混合秩是相等的。

**3.网络流和通信网**

当研究通信网时，自然产生如何确定在一个受边容量限制的网络中，从一点到另一点的最大稳态流的问题。这里网络是由节点集合$V$与边集$E$所组成的有向图$G(V,E)$，$E$是$V$中的元素的有序节偶（$i,j$）（称为$G$的边）之集合的子集。另外，$G$的每一条边对应着一个非负实数$c(i,j)$，称为边$(i,j)$的容量。它可以设想为在单位时间内从$i$传输到$j$的最大信息量。从$E$映射到非负实数的函数$c$称为容量函数。

设$s$和$t$是$G$的两个不同的节点。在$G(V,E)$中从$s$到$t$的静态流量$v$是从$E$映射到非负实数的一个函数$f$，它满足于下列约束：

$$0\leqslant f(i,j)\leqslant c(i,j),\ \text{所有的}(i,j)\in E \tag{1a}$$

$$\sum_j f(i,j)-\sum_j f(j,i)=\begin{cases} v, & i=s\\ 0, & i\neq s,t\\ -v, & i=t\end{cases} \tag{1b}$$

我们称节点$s$为源（发）点，节点$t$为汇（收）点，其它节点为中继点。Ford与Fulkerson[61]和Elias，Feinstein和Shannon[62]首先指出从节点$s$到节点$t$的最大流量等于$s$和$t$的所有割的最小割容量。这一结果称为最大流——最小割定理。由Ford与Fulkerson[61]给出的证明是最简单与最明显的，并称之为Ford-Fulkerson标号算法[61]。这一算法有两个不同的特性，第一，该流是通过从源点到汇点的路径来逐步增广的。第二，在求解过程中，除了源点与汇点之外，流总是守恒的。后来出现了对这一算法的几种改进和修改，简述如下：

Edmonds和Karp[63]提出了Ford-Fulkerson标号算法的一种变型，它在每次迭代时产生具有最大可能流增量的增广路径。他们指出：流增广路径的不适当选择会导致严重的计算困难。为了避免这些困难，他们提出了选择的规则并且指出，如果每一个流增广是沿着具有最小边数的增广路径进行的话，那么在一个$n$节点的网络中，在不超过$(n^3-n)/4$次增广后，就会得到最大流，如果每一次流的变化是选取能产生流量的最大增量的话，那么只要容量是整数，经过至多$1+\log_{M/(M-1)}v$次增广，就会确定最大流，此处$v$是最大流的值，$M$是一个割的最大边数。Zadeh[64]证明了，确实存在利用Edmonds-Karp[53]算法需要$O(n^3)$次增广的流问题。他给出了需要$n^3/27$和$n^3/12$次增广的$n$节点网络的例子，他还把由Edmonds和Karp[63]所导出的边界改进为：

$$\min\left(\left(\frac{1}{2}nm-\frac{1}{3}m^{3/2}+4n^2\right),\left[\frac{1}{2}n-1\right](m-n+2)\right) \tag{2}$$

其中$m$是网络的边数。因为扫描节点的次序对于计算效果可能关系重大，两种特殊的排序方法，称为深度优先搜索法[65]和广度优先搜索法[53, 65, 66]已被广泛采用。但是，对于Ford-Fulkerson算法还没有一般明确的排序方法。

Dinic[67]提出了一个不同的改进，它把标号过程限制与从源点到汇点的所有最短路径所形成的子网络中的那些节点上。这种算法对于一个$n$节点和$m$条边的网络需要$O(n^2m)$次

运算。对于整数容量的情况，这种算法象Ford-Fulkerson算法一样，在$O(nm)$次运算内给出一个整数解。如果边的容量均为1，象在许多重要的应用中，则运算次数减少到$O(n^{2/3}m)$。基于这一算法，Nijenhuis与wilf[68]编写了一个FORTRAN程序。此外，几种其它的使标号算法更为有效的对Ford-Fulkerson算法的改进和修改已经研究出来。它们包括：Johnson的三重标号算法[69]，Srinivasan和Thompson的前辈及距离标号算法[70]，以及Lin和Leon[71]的两端标号算法。众所周知，在应用Ford-Fulkerson算法时，大量已被标号的节点中仅有一小部分包括在增广路径中。为了减少这种无用的工作，Lin和Leon[71]推荐了一种两端标号算法，在该算法中扫描是从源点和汇点出发并且沿着两个方向前进。结果，标号节点的集合从单个大树简化为两个较小的树，他们用两个特殊的网络（一个网络有49个节点与196条边，另一个网络有48个节点与72条边)来说明,这种方法比起惯用的单端标号过程,有较好的性能。

除了经典的Ford-Fulkerson算法之外，有一种新的有意义的发展，典型的是Karzanov算法[72]。Karzanov法的不同点在于：（1）流是逐层地通过层（代替了路径）来增大的；（2）流在求解过程中可能是不守恒的，但是由于流的相消而达到最终的流守恒。Karzanov算法需要$O(n^3)$运算。Kioariwala和Rao[73]提出了另一种相似于Karzanov的方法。这种方法是基于在割系列的局部邻域内进行流的转换或重新分配。这种转换过程仅通过追踪已定位的有向路径使流局部地重新分配，而且能沿若干条从源点到汇点的路径来增广流。

除了上述方法之外，这些方法的各种组合也是可能的[74]。Cheung[74]最近研究了8种算法上的比较。其中包括了深度优先搜索法、广度优先搜索算法、Edmonds-Karp算法、Dinic算法、Cheung算法、Karzanov算法、Dinic-Karzanov算法以及Kinariwala-Rao算法。对于含有1500个节点与7960条边的网络进行试验。Cheung的结论是Dinic算法[67]优与所有其它算法。但是，对于最多25个节点与200条边的小规模网络来说，深度和广度优先搜索算法的性能可以与Dinic算法相比较。Edmods-Karp算法是最差的，因为每一次只有一个节点被标号，而且要搜索遍连接已标号点到未标号点的所有边。但是，这种方法在应用路径增广法的头5种方法中需要最少量的流增广。Kinariwala-Rao的算法也是十分令人失望的。他们的方法是分层法与路径法的组合，流的增广是通过层进行的，流的相消是通过路径进行的。在流增广期间，此法比Karzanov法产生更多不平衡的节点，在流的相消期间，消除路径的搜索等效于应用Ford-Fulkerson算法在多源点与多汇点网络中增广路径的搜索。

**4.带增益的最大流与最小费用流**

在通常的流的问题中，假设流通过网络$G(V,E)$的各条通道时是守恒的。但是，在许多实际情况下，在传输过程中流可以是不守恒的，可以增大或衰减。这种特性可以用一个非负实数$k(i,j)$来表征，$k(i,j)$称为边$(i,j)$的流倍数。此外，边$(i,j)$可以对应着费用$a(i,j)$，它是从$i$到$j$通过一个单位流的费用。于是$\sum a(i,j)f(i,j)$是流的总费用，此处和式是遍取所有的$(i,j)\in E$。

带增益的网络$G(V,E)$的最大流问题是使$V(s)$在下列条件下为最大，即

$$\sum_j f(i,j)-\sum_j k(j,i)f(j,i)=\begin{cases} v(s), & i=s \\ 0, & i\neq s,t \\ -v(t), & i=t \end{cases} \tag{3a}$$

$$0\leq f(i,j)\leq c(i,j),\quad 所有(i,j)\in E \tag{3b}$$

此处s是源点，$t$是汇点，$c$是$G(V,E)$的容量函数。

无增益网络$G(V,E)$的最小费用流问题是使$\sum_{(i,j)\in E} a(i,j)f(i,j)$在下列条件下为最小,即

$$\sum_j f(i,j)-\sum_j f(j,i)=\begin{cases} v, & i=s \\ 0, & i\neq s,t \\ -v, & i=t \end{cases} \tag{4a}$$

$$0\leqq f(i,j)\leqq c(i,j),\ 所有(i,j)\in E \tag{4b}$$

众所周知[75],如果$c(i,j)$是整数,(4)式具有最佳的整数解。于是令$v=1$,最小费用流问题可以看成最短路径问题。只要把$a(i,j)$解释为沿$(i,j)$的距离。可以利用两种基本类型构成最短路径算法:(i)构成从$s$到所有其它节点之最短路径的树生长算法,(ii)枚举每一对节点之间的最短路径的矩阵算法。当所有$a(i,j)$是非负时,Dijkstra的树生长算法[76]可用来求取网络中从$s$到所有其它节点的最短路径。他的算法至多需要$3n^2$次运算,这里每次运算或者是数的相加或者是数的比较,$n$是$G(V,E)$的节点数。当$a(j,i)$允许为不导致负环的负数时,矩阵算法[77—79]可用来求得所有节点对之间的最短路径。这里负环是这样的一种回路,使对应该回路的费用和是负的。矩阵算法需要$n^3$运算。

已经提出了求解最小费用流问题的算法:Busacker和Gowen算法[80]以及Klein算法[81],两种算法都采用最短路径算法作为一个子算法。

Busacker-Gowen算法是由求解一系列最短路径问题所组成的。其中沿边的距离是该网络中现有流的函数。最初所有的流都设为零,流是先从$s$到$t$的最短路径传输的,这里把$a(i,j)$沿各条边的距离。根据该网络中目前的流,新的修改了的费用$a^*(i,j)$可如下地定义:

$$a^*(i,j)=\begin{cases} a(i,j), & f(i,j)<c(i,j) \\ \infty, & f(i,j)=c(i,j) \\ -a(j,i), & f(j,i)>0 \end{cases} \tag{5}$$

利用这些新距离,使最大的流量沿着一条最短路径传输。这一过程一直重复到从$s$到$t$的流量达到$v$为止。

对于Klein算法,方法有点相似。首先不管费用,应用已知的任何算法求从$s$到$t$的流$v$。然后,像在Busacker-Gown算法中一样,按照上面定义修改的费用$a^*(i,j)$。把这些新费用解释为距离,检查负环的存在,如果存在一个负环,则给它加上一个环流,同时修改的费用$a^*(i,j)$必须重新定义。这一过程继续进行到不存在负环为止。那么目前的流就是所希望的最佳流。这两种算法是建立在以下定理的基础上的。

**定理4.** 当且仅当无负的自环时,流是最优化的。

这一结果包含在Jewell[82]和Minty的论文[83]中,并且由Busacker与Saaty[84]明显地进行了叙述。这些算法是有效的,因为他们利用了最大流和/或最短路径算法。上述两种算法的简述和网络流中的其它有关问题可在$H_u$的论文[85]中找到。

带增益网络中的最大流的问题已在许多论文[82, 86—92]中研究过。最小费用流问题(4)也在其它论文[63, 75, 83, 81, 84, 93—96]中进行研究。多年来对这两种问题的每一种,都已研究出一些定理与算法。Truemper指出:[97]在两个问题间存在着一个基本关系。这一结果统一了该理论并给出了一种问题的算法与定理变换为另一种问题的算法与定理的变换规则。对于各种算法及定理的详细比较,读者可参阅Truemper的论文[97]。值得注意,Onaga[91],Mcwhite与Ratliff[89],Malek-Zavarel与Aggarwal[96]也觉察到这两种问题的相似性。

**5. 多商品流**

在通信网络中，很可能许多商品要在多对源点与汇点之间同时进行传输。每一个流有它自己的源点与汇点，所有的流共用一个边容量$f_k(i,j$，这意味着所有商品$f_k(i,j)$之和不能超过$c(i,j)$，此处$f_k$是第$k$个商品的流。这就是所谓多商品流问题。在这一方面通常出现两个问题：(i) 使流$f_k$的总和为最大，(ii) 确定每一个的预给下限值是否是可行的。问题(i) 称为多商品流问题，问题(ii) 称为可行性问题。

对于无向网络中2-商品流的这一情况，$H_u$[99]通过证明一个类似于单商品的最大流、最小割定理的定理解决了这个问题，并且提出了适用于构成最大2-商品流的标号算法。Rothschild和Whinston[100]指出了在要求网络为准对称的情况下，条件$c(i,j)=c(j,i)$ 可以减弱。如果一个网络，从一个节点射出的边数总是等于射入该节点的边数，则它是准对称的，最近Seymour[101]给出了$H_u$氏定理的简短证明。

Ford与Fulkerson[102]最先把一般最大多商品流问题描述成一个线性规划问题。同样的方法可以应用到可行性问题上。从那时候起，许多研究者已经寻求了可行性问题的网络表征[103—106]，他们仅在发现猜测与反例方面获得成功。最后，Onaga[107, 108]得出了多商品流的图论解。他的解是非构造性的，并且利用广义割$K$和最小容量消耗$R(K)$的新概念把他的解叙述成闭合形式。

**定理5.** 当且仅当网络中任意广义割的容量不小于该割的最小容量消耗时，带需求的多商品流问题才是可行的。

更加特殊地，本定理叙述了在一个具有容量函数 $c$ 的网络 $G(V,G)$ 中，给定源点-汇点对$(s_i,\ t_i)$和需求$r_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，当且仅当供应-消耗不等式

$$\sum_{i=1}^{k} r_i d_i \leqq \sum_{(x,y)\in E} c(x,y)w(x,y), \qquad (x,y)\in E \tag{6}$$

对于任意非负整数权函数(从$E$到非负整数)都满足时，这一问题是可行的，此处$d_i$是指从$G(V,E)$ 中$s_i$到$t_i$的距离，而且权$w(x,\ y)$解释为沿$(x,y)$的距离。

之后不久，$I_{ri}$[109]利用线性规划给出了定理5的另一种证明。他还指出：供-消不等式(6)的检验是有限的，可行需求的范围是一个有限的凸多面体。Even, Itai与Shamir[110]说明了多商品整数流问题是一个$NP$完全问题，即使商品数限制为2也如此。这一点无论对于有向网络或无向网络的情况都是正确的。在源点与汇点均位在无界网孔内的平面无向网络的情况下[111]，对于无向的和偶容量的欧拉网络中的2-商品流[112]和任意的具有整数边容量的网络中的单商品流，可以得到多项式时间算法。

虽然在电话变换与 VLSI 设计中有许多应用，但对一般网络的整数多商品流的实现问题相对说来，尚未被探索。Tsujii与Kurosawa[113]在通信网络的布线策略方面研究过该问题。他们的方法是重复一系列的增量的分配与松弛，然而他们寻找路径的判据并不有效地反映多商品流分配的干涉机理。最近，Onaga，Marumato和 Arimoto[114]提出了一种启发式算法，它在每一步，为了路径的连接，搜索在源点与汇点之间以最少的交叉数目越过源-汇并须的最短路径。在HITACH-200（与IBM3031等价，10MIPS-每秒执行1000万条指令，10兆比特）上研制出一个FORTRAN程序。该程序能构成整数多商品流，以满足多至600个节点、1800条边，以及100源-汇对网络的要求。重新构成原定的连接方法进行精度试验看来是满意的，精度达到大于96%的数量级。

Rothfarb等人[115—116]研究了一种特殊类型的网络，其中有$k$个源点，每个源点表示一个

不同商品的源点，而且有一个共同的汇点。每一个商品对应有一个非增函数 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$，他们提出了一种算法，该算法产生这样一个流，使得

$$Z=\sum_{i=1}^{k}\int_{0}^{v_i}a_i(x)dx \tag{7}$$

为最大。此处$v_i$是第$i$个商品的流值。$\int_0^{v_i}a_i(x)dx$项可解释为传输商品$i$的$v_i$个单位的利润。总利润$Z$是每一个$v_i$的凹形函数。

最后，我们要提到把多商品流问题变换为单商品流问题的可能性。Soun和 Tremper[117]建立了一些充要条件，在这些条件下多商品流的线性约束可以变换为单商品网络的线性约束。他们提出了检验这些条件是否被满足的方法。如果被满足，接着就构造出等价的单商品网络。变换校验要求$O(m)$次运算（加和减），此处$m$是原来网络的边数。

与多商品流有关的综合问题更为复杂。对于预给的一组作为时间函数的流需求下界，该问题是寻求一个满足所有技术要求的最小费用网络，Comory 和Hu[118]提出了两个应用单形法或对偶单形法解决这个问题的算法，但是在这一领域仍需做很多的工作。

**6.通信网中的多端流**

通信网是一种网络，其中每一对节点看作源点与汇点，而所有其它节点则作为中继节点，这里流是守恒的。这也称为多端流问题，它不同于多商品流问题，在多商品流中不同种类的流可在该网络中同时存在。关于通信网络中的多端流通常提出两个问题：(i) 确定所有节点对的最大流，(ii) 综合一个通信网，使其满足所有最大流值的规定下界同时总网络容量最小。

问题(i) 等价于构成一个给定通信网$G(V,E)$的最大流矩阵F（一行与一列对应于 $G$ 的一个节点）。对于$i\neq j$，元素$f_{ij}$是从$i$到$j$的最大流的值。对于$i=j$，$f_{ij}$定义为无限大。根据最大流——最小割定理，最大流矩阵F也是$G$的端点容量矩阵T，其第$i$行第$j$列的元素 $t_{ij}$是在$G$中从$i$到$j$的最小割容量。显然，F或T可通过解$n(n-1)$个单个最大流问题来构成，此处$n$是$G$的节点数。Schnorr[119]指出这个数目可显著地减少。他指出：第 $ij$元素为 $\min(f_{ij}, f_{ji})$ 的矩阵，可以通过求解$n\log 2n$个单一最大流问题来完成。注意对于 $n$，Mayeda[120, 121] 阐明了，可以构成一个其矩阵T中具有$(n-1)(n+2)/2$个不同数值元素的网络。

在无向网络或对称网络的情况下，即 $c(i,j)=c(j,i)$，所有$i,j\in V$，Gomy 与 Hu[122]指出：$n(n-1)/2$个最大流值$f_{ij}$可通过解$n$-1个最大流问题来求得。如果感兴趣的是寻求含有 $q$个节点的子集中各节点间的最大流值，那么$q$-1个最大流值就足以确定 $q(q-1)/2$ 个最大流值。Gupta[123]推广了这些结果，指出了条件$c(i,j)=c(j,i)$可由于要求网络是准对称的而得到减弱。我们还记得一个网络，如果从一个节点射出的边数总等于射入该节点的边数的话，则是准对称的。结果，能构成一个树，其端点容量矩阵与原来的无向网络的端点容量矩阵相等。

Mayeda[124]首先提出无向网络端点容量矩阵的综合问题。Gomory 和 Hu[118]给出了一个最小费用的实现。至于非对称的情况，Frisch与Sen[126]给出了综合端点容量矩阵的一般算法。

最后，我们提到：在所有边具有单位容量的无向网络的情况下，Shiloach[127]给出了一个$O(n^2m+n^3)$ 的算法，此算法产生所有节点对之间的全部$n(n-1)/2$个最大流，此处$m$表示该网络中的边数。注意，如果采用Gomory和Hu[122]的算法，可用$O(m^{5/3}+n^{8/3})$ 的计算时间求得所有$n(n-1)/2$个最大流。这个特殊的整数流的问题通常是与寻求一个图的两个节点间的最大数目边不相接或点不相交的路径问题相联系，而且表示许多其它在运输、电路及布线中发现的问题。

## 结论

本文叙述了图论在网络中的应用。涉及两个领域：图的分解和电网络的分析，以及通信网络中的流。

前部分讨论的意义在于，不同于其他许多在西方研究并发展了的领域，主划分的诞生和成熟首先是在日本。事实上，大多数成果已用日文写出和发表，用英文的不易得到。因为主划分与表征和求解许多网络的基本问题密切相关，所以系统地总结这些已知的成果给西方学者，对这一领域的进展已经产生并将继续产生深远影响。

尽管在网络流方面已做了大量工作，许多问题相对说来尚未进行探索。一般网络的整数多商品流实现问题以及和多商品流有关的综合问题就是两个例子。它们的解决对于运输、布线、电话转换和VLSI设计都将有重要影响。

## 参考文献


〔1〕*Theory of Graphs and Its Applications*, M. Fiedler, Ed., New York: Academic Press. pp. 171-234, 1964.

〔2〕N. Deo, "An extensive English-language bibliography on graph theory and its applications." *Tech. Report* 32-1413, Jet Propulsion Lab., Pasadena, CA., Oct. 1969.

〔3〕N. Deo, "Supplement 1—an extensive English-language bibliography on graph theory and its applications," *Tech. Report* 32-1413, Jet Propulsion Lab., Pasadena, CA, April 1971.

〔4〕*Reviews in Graph Theory*, W. G. Brown, Ed., Providence. RI: American Math. Society (four-volume set), 1980.

〔5〕G. Berman, Forward Citations in Graph Theory, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada.

〔6〕W. K. Chen. *Applied Graph Theory—Graphs and Electrical Networks*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 2nd revised ed., 1976.

〔7〕F. F. Kuo, "Network analysis by digital computer." *Proc. IEEE*. vol. 54, pp. 820-829, 1966.

〔8〕G. Kron, "A set of principles to interconnect the solutions of physical systems," *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 965-980. 1953.

〔9〕F. H. Branin, Jr., "The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis," *Matrix and Tensor Quart.*, vol. 12, pp. 62-105, 1962.

〔10〕H. H. Happ, *Diakoptics and Networks*, New York: Academic Press, 1971.

〔11〕T. R. Bashkow, "The A matrix, new network description." *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-4, pp. 117-119, 1957.

〔12〕P. R. Bryant, "Problems in Electrical Network Theory," Ph. D. dissertation, Cambridge University, Cambridge, England, July 1959.

〔13〕P. R. Bryant, "The explicit form of Bashkow's A matrix." *IRE Trans. Circuit Theory*. CT-9, pp. 303-306, 1962.

〔14〕R. K. Brayton and J. K. Moser, "A theory of nonlinear networks—I," *Quart. Appl. Math.*, vol. 22, pp. 1-33 and 81-104, 1964.

〔15〕S. Amari, "Topological foundation of Kron's tearing of electrical networks," *RAAG Memoirs*, vol. 3, pp. 322-349, 1962.

〔16〕G. Bracchi and M. Somalvico, "Topological properties and optumum application of the mixed method of network analysis," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, pp. 228-232, 1971.

〔17〕G. Kishi and Y. Kajitani, "On maximally distinct trees," *Proc. 5th Allerton Conf. Circuit and Syst. Theory*, pp. 635-643, 1967.

〔18〕G. Kishi and Y. Kajitani, "Maximally distant trees and principal partition of a linear

graph," *IEEE Trans. Circuit Theory*. CT-16, pp. 323-330, 1969.
[19] T. Ohtsuki, Y. Ishizaki, and H. Watanabe. "Topological degrees of freedom and mixed analysis of electrical networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-17, pp. 491-499, 1970.
[20] L. Dulmage and N. S. Mendelsohn, "Covering of bipartite graphs," *Can. J. Math.*, vol. 10, pp. 517-534, 1958.
[21] L. Dulmage and N. S. Mendelsohn, "A structural theory of bipartite graphs of finite exterior dimension," *Trans. Roy. Soc. Can.*, 3rd series, sec. III, vol. 53, pp. 1-13, 1959.
[22] J. Edmonds, "Minimum partition of a matroid into independant subsets," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Sect. B., Mathematics and Mathematical Physics, vol. 69B, pp. 67-72, 1965.
[23] W. T. Tutte, "On the problem of decomposing a graph into n-connected factors," *J. London Math. Soc.*, vol. 36, pp. 224-230, 1961.
[24] St. J. A. Nash-Williams, "Edge-disjoint spanning trees of finite graphs," *J. London Math. Soc.*, vol. 36, pp. 445-450, 1961.
[25] G. Baron and W. Imrich, "On the maximal distance of spanning trees," *J. Combinatorial Theory*, Series B, vol. 5, pp. 378-385, 1968.
[26] O. Ore, *Theory of Graphs*, Providence, R. I.: American Math. Society, 1962.
[27] Y. Kajitani, "A few properties concerning the principal partition of a graph," *Joint Conv. Rec. Four Inst. Elect. Eng.*, Basic Theory 54, Japan, 1970.
[28] J. Bruno and L. Weinberg, "The principal minors of a matroid," *Linear Algebra and Its Appl.*, vol. 4, pp. 17-54, 1971.
[29] N. Tomizawa, "Strongly irreducible matroids and principal partition of a matroid into strongly irreducible minors," *Trans. IECEJ**, vol. 59A, pp. 83-91, 1976.
[30] H. Narayanan, "Theory of Matroids and Network Analysis," Ph. D. dissertation, Indian Inst. of Tech., Bombay, Feb. 1974.
[31] T. Ozawa, "Common trees and partition of two graphs," *Trans. IECEJ*, vol. 57A, pp. 383-390, 1974.
[32] M. Iri and N. Tomizawa, "A practical criterion for the existence of the unique solution in a linear electrical network with mutual couplings," Trans. *IECEJ*, vol. 57A, pp. 599-605, 1974.
[33] T. Ozawa, "Common trees of two graphs," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST73-47, pp. 1-8, 1973.
[34] M. Iri and N. Tomizawa, "A unifying approach to fundamental problems in network theory by means of matroids," *Trans. IECEJ, Vol. 58A, pp. 33-40*, 1975.
[35] A. Lehman, "A solution of the Shannon switching game," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 12, pp. 687-724, 1964.
[36] J. Bruno and L. Weinberg, "A constructive graph-theoretic solution of the Shannon switching game," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-17, pp. 74-81, 1970.
[37] M. Iri, "A min-max theorem for the ranks and term-ranks of a class of matrices—an algebraic approach to the problem of the topological degree of freedom of a network," *Trans. IECEJ*, vol. 51A, pp. 180-187, 1968.
[38] M. Iri, "Combinatorial cannonical form of a matrix with applications to the principal partition of a graph," *Trans. IECEJ*, vol. 54A, pp. 30-37, 1971.
[39] J. P. Roth, "An application of algebraic topology to numerical analysis: on the existence of a solution to the network problem," *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U. S.*, vol. 41, pp. 518-521, 1955.
[40] J. P. Roth, "An application of algebraic topology: Kron's method of tearing," *Quart. Appl. Math.*, vol. 17, pp. 1-24, 1959.
[41] N. R. Malik and H. W. Hale, "Equations for active networks: existence of unique solutions," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-14, pp. 37-43, 1967.
[42] W. K. Chen and F. N. T. Chan, "On the unique solvability of linear active networks," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-21, pp. 26-35, 1974.
[43] N. Tomizawa and M. Iri, "An algorithm for determining the rank of a triple matrix product AXB with application to the problem of discerning the existence of the unique

solution in a network," *Trans. IECEJ*, vol. 57A, pp. 834-841; 1974.

[44] T. Ozawa; "On the existence of common trees in the two-graph method," *Trans. IECEJ*, vol. 56A; pp. 371-372, 1973.

[45] W. Mayeda, "Topological formulas for nonreciprocal networks and networks with transformers," *Proc. Natl. Electron. Conf.*, vol. 14; pp. 631-643; 1958.

[46] C. L. Coates, "General topological formulas for linear network functions," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-5; pp. 30-42, 1958.

[47] T. Ozawa, "Topological conditions for the solvability of linea active networks," *Intl. J. Circuit Theory and Appl.*; vol. 4; pp. 125-136, 1976.

[48] S. Shinoda; "A minimization problem in network diagnosis," *Trans. IECEJ*; vol. 53A, pp. 569-570; 1970.

[49] N. Tomizawa, "An algorithm for determining the maximally suspended pair of bases in a semi-muoid with applications to the diagnosis of networks," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST74-80, pp. 19-22, 1974.

[50] M. Kano; "Cycle games and cycle cut games—games which are solved by using principal partition," *Papers of Tech. Group on Circuits Syst. of IECEJ*; CAS79-85, pp. 71-76, 1979.

[51] M. Kano, "Generalized Shannon switching game," *Papers of Tech. Group on Circuits Syst. of IECEJ*; CAS79-148; pp. 13-18, 1979.

[52] N. Tomizawa, "An algorithm for determining the maximally distant pair of bases with matroidal constraints—generalized versions of Menger's theorem for matroids," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST74-33, pp. 17-24, 1974.

[53] S. Oishi, T. Aikyo, and T. Ohtsu, "Partition of directed graphs by making use of minimal connected graphs," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST78-155, pp. 41-48, 1978.

[54] Y. Kajitani and T. Kawamoto, "Graph theoretical degree of freedom in network analysis and all-central-tree graphs," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST76-94; pp. 65-70, 1976.

[55] T. Kawamoto, Y. Kajitani; and S. Shinoda, "New theorems on central trees described in connection with the principal partition of a graph," *Papers of Tech. Group on Circuit Syst. Theory of IECEJ*, CST77-109, pp. 63-68, 1977.

[56] T. Kawamoto and S. Shinoda, "Theorems on central trees in connection with the principal partition of a graph," *Papers of Tech. Group on Circuits Syst. of IECEJ*, CAS80-49, pp. 41-45, 1980.

[57] T. Kawamoto; Y. Kajitani, and S. Shinoda, "Eccentricity of the tree set," *Proc. IEEE Int'l. Symp. Circuits Syst.*, Paper R 14-1, 1981.

[58] S. Gao and W. K. Chen, "The hybrid method of network analysis and topological degree of freedom," *Proc. IEEE Intl. Symp. Circuits Syst.*; pp. 158-161, 1982.

[59] S. Gao and W. K. Chen, "On graph classification with application," *Proc. 25th Midwest Symp. Circuits Syst.*, pp. 244-218, 1982.

[60] P. M. Lin; "Complementary trees in circuit theory," *IEEE Trans. Circuits Syst.*; CAS-27, pp. 921-928, 1980.

[61] L. R. Ford, Jr.; and D. R. Fulkerson, "Maximal flow through a network." *Can. J. Math.*; vol. 8, pp. 399-404; 1956.

[62] P. Elias, A. Feinstein, and C. E. Shannon, "Note on maximum flow through a network," *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-2, pp. 117-119; 1956.

[63] J. Edmonds and R. M. Karp, "Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 19; pp. 248-264, 1972.

[64] N. Zadeh, "Theoretical efficiency of the Edmonds-Karp algorithm for computing maximal flows," *J. Ass. Comput. Mach.*; vol. 19, pp. 184-192, 1972.

[65] A. V. Aho; J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman; *The Design and Analysis of Computer*

* IECEJ stands for "The Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan."

Algorithms, Reading, MA: Addison-Wesley, 1975.
[66] G. Bayer, "Algorithm 324: maxflow," *Commun. Ass. Comput. Mach.*, vol. 11, pp. 117-118, 1968.
[67] E. A. Dinic, "Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation," *Soviet Math. Dokl.*, vol. 11, pp. 1277-1280, 1970.
[68] A. Nijenhuis and H. S. Wilf, *Combinatorial Algorithms*, New York: Academic Press, 1975. pp. 148-151.
[69] E. L. Johnson, "Networks and basic solutions," *Oper. Res.*, vol. 14, pp. 619-623, 1966.
[70] V. Srinivasan and G. L. Thompson, "Accelerated algorithms for labeling and relabeling trees, with applications to distribution problems," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 19, pp. 712-726, 1972.
[71] P. M. Lin and B. J. Leon, "Improving the efficiency of labeling algorithm for maximum flow in networks," *Proc. IEEE Intl. Symp. Circuits Syst.*, pp. 162-166, 1974.
[71] A. V. Karzanov, "Determining the maximal flow in a network by the method of preflows," *Soviet Math. Dokl.*, vol. 15, pp. 434-437, 1972.
[73] B. Kinariwala and A. G. Rao, "Flow switching approach to the maximum flow problem: I," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 24, pp. 630-645, 1977.
[74] T. Y. Cheung, "Computational comparison of eight methods for the maximum network flow problem," *ACM Trans. Math. Software*, vol. 6, pp. 1-16, 1980.
[75] L. R. Ford, Jr., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1962.
[76] E. W. Dijkstra, "A note on two problems in connection with graphs," *Numer. Math.*, vol. 1, pp. 269-271, 1959.
[77] R. W. Floyd, "Algorithm 97: shortest path," *Commun. Ass. Comput. Mach.*, vol. 5, p. 345, 1962.
[78] T. C. Hu, "Revised matrix algorithms for shortest paths in a network," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 15, pp. 207-218, 1967.
[79] S. Warshall, "A theorem on Boolean matrices," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 9, pp. 11-12, 1962.
[80] R. G. Busacker and P. J. Gowen, "A Procedure for Determining a Family of Minimal-Cost Network Flow Patterns," ORO Tech. Rep. 15, Operations Res. Office, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, 1961.
[81] M. Klein, "A primal method for minimal cost flows," *Management Sci.*, vol. 14, pp. 205-220, 1967.
[82] W. S. Jewell, "Optimal flow through networks with gains," *Oper. Res.*, vol. 10, pp. 476-499, 1962.
[83] G. J. Minty, "Monotone networks," *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, vol. 257, pp. 194-212, 1960.
[84] R. G. Busacker and T. L. Saaty, *Finite Graphs and Networks*, New York: McGraw-Hill, 1965.
[85] T. C. Hu, "Recent advances in network flows," *SIAM Review*, vol. 10, pp. 354-359, 1968.
[86] T. Fujisawa, "Maximum flows in a lossy network," *Proc. Allerton Conf. on Circuit Syst. Theory*, pp. 385-393, 1963.
[87] R. C. Grinold, "Calculating maximal flows in a network with positive gains," *Oper. Res.*, vol. 21, pp. 528-541, 1973.
[88] J. J. Jarvis and A. M. Jezior, "Maximal flow with gains through a special network," *Oper. Res.*, vol. 20, pp. 678-688, 1972.
[89] P. B. McWhite and H. D. Ratliff, "Modeling Mining Attrition Using Networks with Gains," Res. Rep. 73-4, Industrial and Systems Eng. Dept., Univ. of Florida, Gainesville, FL, 1973.
[90] K. Onaga, "Dynamic programming of optimum flows in lossy communication nets," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-13, pp. 282-287, 1966.

[91] K. Onaga, "Optimal flows in general communication networks," *J. Franklin Inst.*, vol. 283, pp. 308-327, 1967.
[92] K. Truemper, "Optimal Flows in Networks with Positive Gains," Ph. D. dissertation, Case Western Reserve Univ., Cleveland, OH, 1973.
[93] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.
[94] D. R. Fulkerson, "An out-of-kilter method for minimal cost flow problems," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 9, pp. 13-27, 1961.
[95] M. Iri, "A new method of solving transportation-network problems," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 3, pp. 27-87, 1960.
[96] E. L. Johnson, "Programming in Networks and Graphs," working paper ORC 65-1, Oper. Res. Center, Univ. of Calif., Berkeley, CA, 1965.
[97] K. Truemper, "On max flows with gains and pure min-cost flows," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 32, pp. 450-456, 1977.
[98] M. Malek-Zavarei and J. K. Aggarwal, "Optimal flow in networks with gains and costs," *Networks*, vol. 1, pp. 355-365, 1972.
[99] T. C. Hu, "Multicommodity network flows," *Oper. Res.*, vol. 11, pp. 340-360, 1963.
[100] B. Rothschild and A. Whinston, "On two commodity network flows," *Oper. Res.*, vol. 44, pp. 377-388, 1966.
[101] P. D. Seymour, "A short proof of the two-commodity flow theorem," *J. Combinatorial Theory*, Series B, vol. 26, pp. 370-371, 1979.
[102] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, "A suggested computation for maximal multicommodity network flows," *Management Sci.*, vol. 5, pp. 97-101, 1958.
[103] S. L. Hakimi, "Simultaneous flows through a communication network," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-9, pp. 169-175, 1962.
[104] T. C. Hu, "On the feasibility of simultaneous flows in a network," *Oper. Res.*, vol. 12, pp. 359-360, 1964.
[105] D. T. Tang, "Comments on feasibility conditions of simultaneous flows in a network," *Oper. Res.*, vol. 13, pp. 143-146, 1965.
[106] M. Naniwada, "Multicommodity flows in a communication network," *Trans. IECEJ*, vol. 52A, pp. 143-150, 1969.
[107] K. Onaga, "A multicommodity flow theorem," *Trans. IECEJ*, vol. 53A, pp. 350-356, 1970.
[108] K. Onaga and O. Kakusho, "On feasibility conditions of multicommodity flows in networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, pp. 425-429, 1971.
[109] M. Iri, "On an extension of the maximum-flow minimum-cut theorem of multicommodity flows," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 13, pp. 129-135, 1970.
[110] S. Even, A. Itai, and A. Shamir, "On the complexity of timetable and multicommodity flow problems," *SIAM J. Comput.*, vol. 5, pp. 691-703, 1976.
[111] K. Matsumoto, T. Nishizeki, and N. Saito, "A polynomial time algorithm for finding multicommodity flows in planar graphs," *Papers of Tech. Group on Circuits Syst. of IECEJ*, CAS82-116, 1982.
[112] T. Shintani, T. Nitta, and T. Okada, "On two-commodity network flows with integer flow," *Trans. IECEJ*, vol. 62A, pp. 817-824, 1979.
[113] S. Tsujii and K. Kurosawa, "A heuristic algorithm for multicommodity flow problem in communication networks," *Trans. IECEJ*, vol. 62A, pp. 825-842, 1979.
[114] K. Onaga, S. Marumoto, and A. Arimoto, "Heuristic algorithm for assigning multicommodity flows of given demands under strong integrality constraints," *Proc. IEEE Intl. Symp. Circuits Syst.*, pp. 989-992, 1982.
[115] B. Rothfarb, N. P. Shein, and I. T. Frisch, "Common terminal multicommodity flow," *Oper. Res.*, vol. 16, pp. 202-205, 1968.
[116] B. Rothfarb and I. T. Frisch, "Common terminal multicommodity flow with a concave objective function," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 489-502, 1970.
[117] Y. Soun and K. Truemper, "Single commodity representation of multicommodity networks,"

*SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, vol. 1, pp. 348-358, 1980.

[118] R. E. Gomory and T. C. Hu, "Synthesis of a communication network," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 12, pp. 348-359, 1964.

[119] C. P. Schnorr, "Multiterminal network flow and connectivity in unsymmetrical networks," *Lecture Notes in Computer Science*, New York: Springer-Verlag, vol. 62, pp. 425-439, 1978.

[120] W. Mayeda, "On oriented communication nets," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-9, pp. 261-267, 1962.

[121] F. Jelinek and W. Mayeda, "On the maximum number of different entries in the terminal capacity matrix of an oriented communication net," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-10, pp. 308-309, 1963.

[122] R. E. Gomory and T. C. Hu, "Multi-terminal network flows," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 9, pp. 551-570, 1961.

[123] R. P. Gupta, "On flows in pseudosymmetric networks," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 14, pp. 215-226, 1966.

[124] W. Mayeda, "Terminal and branch capacity matrices of a communication net," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-8, pp. 260-269, 1960.

[125] D. K. Sen, "Synthesis of Oriented Communication Nets," Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley, CA, 1966.

[126] I. T. Frisch and D. K. Sen, "Algorithms for synthesis of oriented communication nets," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-14, pp. 370-379, 1967.

[127] Y. Shiloach, "Multi-terminal 0-1 flow," *SIAM J. Comput.*, vol. 8, pp. 422-430, 1979.

[128] S. Even and R. E. Tarjan, "Network flow and testing graph connectivity," *SIAM J. Comput.*, vol. 4, pp. 507-518, 1975.

[129] T. Ozawa, "On the minimal graphs of a certain class of graphs," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, p. 387, 1971.

# 第二部分　量纲分析

## 十九、量纲分析

量纲分析是一种处理支配自然现象一般形式方程的方法。它提供了一种把与物理现象有关的变量进行合理地分组的方法，以形成这些变量的无量纲的乘积，因此，描述物理现象的方程可较容易地通过试验来确定而不失去这种关系的一般性。它指导试验者选择能够得到足够信息的试验且避免多余的试验（还可参看试验设计）。当问题涉及到大量的变量时，这种方法特别有用。在这种场合下，量纲分析揭示了不管难以得出的最后解的形式如何，它的某些特性是受约束的。这种技巧已经有效地用于工程造型（即构造模型）中[1]~[7]。

量纲分析的方法并不是新的，它可追溯到牛顿，他在当时把力学奠基为科学的一个重要分支。这种方法的正确性是建立在正确地描述一个物理现象的任何方程必须是量纲齐次的这一前提下。量纲齐次性的原理，它说的是不同类型的量不能在一起相加，这是量纲分析中最重要的基础，曾首先由付里叶在1822年出版的经典著作《弦的理论分析》一文中进行过阐述。他不仅提出了量纲齐次性的见解，而且还提出了今天称为量纲公式的概念。1914年，Buckingham[8] 以他著名的$\pi$定理作出了重大的贡献，此定理促使 Lord Rayleogh[9] 在以后观察到，"常常有这种情况，以精心设计的实验而得到"定律"形式的结果，作为新东西而提出来，实际上却已经被仅需几分钟的思考就预言过了"。不用说，付里叶与 Buckingham 的著作已被许多人引用，详细描述和推广。对这方面的兴趣反映在由Higgin[10]~[11]、Sloan以及 Happ[12]所做作的三篇综述性文献目录中，其中引用的文献约有600多篇。

**1.单位和量纲**

用以描述自然现象的概念是基于量（物理量）的精确测量。任何物理量的测量是得到与另一个同类型的值相比较而产生的数字。如果要使该数字有意义，必须规定在进行比较中所采用量的大小。"一辆汽车的长度是6m"，这一叙述意味着我们选取了一个命名为1m的长度，并且汽车的长度与所选的长度的比值为6。选取的大小，诸如1m，称为测量单位。测量的结果是用一个数后面跟上一个单位（测量中所采用的）的名字来表示（见单位）。一个房间的面积为30m²的说法指出了测量单位是1m²。因此，对于每一种物理量对应于一种合适的单位类型。诸如长度、面积与时间这些物理概念叫做量纲，而不同于单位。一辆汽车的长度为6m，它等于19.7英尺或6.56码。

经典物理学是以运动定律为基础的。当时人们感觉所有学科都建筑在经典力学定律的基础之上，进一步的工作无疑地想使电磁学也成为力学的一个分支。在这种情况下，把长度$l$，质量$m$以及时间$t$作为基本的、首要的或者参考的量纲是很自然的。但是这种方法导致了量纲的混淆点在于：两个互不相同的概念都拥有着相同的量纲。这种量纲制用于力学相当好。最显著的混淆便是能量与力矩有着相同的量纲。然而，在电磁学中情况就不好了。经典的方案

用到静电制与电磁制上，相同的概念可以导出不同的量纲。例如，静电制中电容与长度具有相同的量纲，同时在电磁制中电感与长度没有量纲上的区别。在热学中，熵与质量[13]，或者温度与长度的倒数出现了混淆，这里取决于对某些常数量纲所作的假设。这并不意味着量纲混淆是一个天然的事实；它只不过指出了用我们人为所规定的基本方案中的一个不完善点。

若干年来，物理学中参考量纲的数目从原来包含的3个扩展到4个、5个、然后逐渐减少到绝对必须的1个，以后，由于认识到虽然仅仅1个是绝对必要的，但按照所研究的问题而采用3个、4个或5个参考量纲可带来很大的方便，于是量纲数目又有增加[1],[6]～[7],[15]～[20]。Bridgman[1] 强调了这一事实，即关于参考量纲的数目并不是神圣不可侵犯的东西，并且强调了量纲分析只不过是可任意地运算的一种人为的工具。虽然有人仍然断定参考量纲是"真正的量纲"，但是参考量纲的自由选取的原理已被广泛地接受。因此，量纲分析关键的一步就是用以下的方法来选取参考量纲，即其它量纲(亦称为间接量纲或导出量纲)能用参考量纲来表示，参考量纲与导出量纲的关系一般地或者通过基本物理定律或者通过支配现象的方程或者通过定义来确定。当长度、质量与时间取作参考量纲时，例如速度的量纲就是长度的量纲除以时间的量纲，或用符号 $v = lt^{-1}$。同样，通过牛顿运动定律，它建立了力、质量与加速度的关系为：

$$力 = 常数 \cdot 质量 \cdot 加速度 \tag{1}$$

表1　力学中各量的量纲指数

| 物理量 | $m$ | $l$ | $t$ | $f$ | $l$ | $t$ | $f$ | $m$ | $l$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 加速度 | 0 | 1 | −2 | 0 | 1 | −2 | 0 | 0 | 1 | −2 |
| 角加速度 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | −2 |
| 角速度 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| 面积 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 动量矩 | 1 | 2 | −1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | −1 |
| 密度 | 1 | −3 | 0 | 1 | −4 | 2 | 0 | 1 | −3 | 0 |
| 能量，功 | 1 | 2 | −2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 力 | 1 | 1 | −2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 频率 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| 长度 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 线加速度 | 0 | 1 | −2 | 0 | 1 | −2 | 0 | 0 | 1 | −2 |
| 线动量 | 1 | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | −1 |
| 线速度 | 0 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 0 | 0 | 1 | −1 |
| 质量 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 惯性矩 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 功率 | 1 | 2 | −3 | 1 | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 | −1 |
| 压力 | 1 | −1 | −2 | 1 | −2 | 0 | 1 | 0 | −2 | 0 |
| 压强 | 1 | −1 | −2 | 1 | −2 | 0 | 1 | 0 | −2 | 0 |
| 表面张力 | 1 | 0 | −2 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |
| 时间 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 绝对粘度 | 1 | −1 | −1 | 1 | −2 | 1 | 1 | 0 | −2 | 1 |
| 动力粘度 | 0 | 2 | −1 | 0 | 2 | −1 | 0 | 0 | 2 | −1 |
| 体积 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |

力的量纲必定是质量-长度/时间$^2$或$f=mlt^{-2}$。象$v=lt^{-1}$与$f=mlt^{-2}$这样的表达式称为量纲公式。物理量量纲指数是用以表示它的参考量纲的幂，因此力的量纲指数：质量为1，长度为2，时间为-2。如果力、长度、与时间选为参考量纲，那么，质量就为导出量纲。在这两种参考量纲的选取中，牛顿定律的常数是无量纲的。但是如果力、质量、长度与时间选为参考量纲时，该常数就不再是无量纲的量了，并且其单位一般选取使之在数值上等于标准的重力加速度。表1列出了在力学中一些常用的变量分别在绝对量纲制、重力量纲制以及工程制中相对于三种参考量纲的选取时的量纲指数。

为了消除电学与磁学两个学科中的混淆点，把电荷$q$加到传统的$l$、$m$与$t$的力学量纲上以形成参考量纲是方便的。在许多情况下用介电常数$\varepsilon$或导磁系数$\mu$来代替电荷。对于热学问题，温度$T$作为一个参考量纲。表2与表3列出了在电磁学与热力学中的一些常用物理量的量纲指数。

其它的一些量纲制已经发展到用于特殊场合中，它们可在技术文献中查到。事实上为了

表2　电磁学中各量的量纲指数

| 物理量 | $l$ | $m$ | $t$ | $q$ | $l$ | $m$ | $t$ | $\varepsilon$ | $l$ | $m$ | $t$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 电荷 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3/2 | 1/2 | -1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 | -1/2 |
| 电容 | -2 | -1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 |
| 电流 | 0 | 0 | -1 | 1 | 3/2 | 1/2 | -2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| 电场密度 | 1 | 1 | -2 | -1 | -1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 | 1/2 | 1/2 | -2 | 1/2 |
| 电位差 | 2 | 1 | -2 | -1 | 1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 | 3/2 | 1/2 | -2 | 1/2 |
| 电通量 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3/2 | 1/2 | -1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 | -1/2 |
| 电通密度 | -2 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | 1/2 | -1 | 1/2 | -3/2 | 1/2 | 0 | -1/2 |
| 电感 | 2 | 1 | 0 | -2 | -1 | 0 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 磁场密度 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1/2 | 1/2 | -2 | 1/2 | -1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| 磁通 | 2 | 1 | -1 | -1 | 1/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | 3/2 | 1/2 | -1 | 1/2 |
| 磁通密度 | 0 | 1 | -1 | -1 | -3/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -1/2 | 1/2 | -1 | 1/2 |
| 磁势 | 0 | 0 | -1 | 1 | 3/2 | 1/2 | -2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| 导磁率 | 1 | 1 | 0 | -2 | -2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 介电常数 | -3 | -1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 2 | -1 |
| 电阻 | 2 | 1 | -1 | -2 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 |

表3　热学中各量的量纲指数

| 物理量 | $l$ | $m$ | $t$ | $T$ | $f$ | $l$ | $t$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 热胀系数 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 熵 | 2 | 1 | -2 | -1 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| 温度 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 热能 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 热功率 | 2 | 1 | -3 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| 导热系数 | 1 | 1 | -3 | -1 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| 发热系数 | 2 | 0 | -2 | -1 | 0 | 2 | -2 | -1 |

增加量纲分析的效能，区分径向长度与切线方向是有利的[13]。在这样处理后就可消除能量与力矩，以及正应力和剪应力的概念上的混淆点[13]。

**2.量纲矩阵与无量纲乘积**

一组适当的、独立的参考量纲可以这样选取，使得包含在一种物理现象中的每一个变量的量纲可通过这些参考量纲来表示。为了在量纲分析中应用代数方法，用一个矩阵来表示度量的量纲是方便的。这一矩阵称为变量的量纲矩阵并且用符号$\boldsymbol{D}$表示。$\boldsymbol{D}$的每一列表示了所考虑的一个变量，$\boldsymbol{D}$的每一行表示了一个参考量纲。$\boldsymbol{D}$的第$i$行与第$j$列的元素表示了对应于第$j$列变量的量纲公式中，相应于$\boldsymbol{D}$的$i$行的参考量纲的指数。作为一个示例，研究牛顿运动定律，力$F$、质量$M$与加速度$A$的关系式：

$$F=\text{常数}\cdot MA \tag{2}$$

如果长度$l$、质量$m$与时间$t$选作参考量纲，从表1，变量$F$、$M$与$A$的量纲公式可表示如下：

| 变量 | 量纲公式 |
|---|---|
| $F$ | $m^1l^1t^{-2}$ |
| $M$ | $m^1l^0t^0$ |
| $A$ | $m^0l^1t^{-2}$ |

与牛顿运动定律对应的量纲矩阵可得到：

$$\boldsymbol{D}=\begin{matrix} m \\ l \\ t \end{matrix}\overset{\begin{matrix} F & M & A \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}} \tag{3}$$

在此例中，在变量$F$的量纲公式中，量纲是1、1、$-2$。因此第一列为（1、1、$-2$）。同样，$\boldsymbol{D}$的第2列与第3列对应于变量$M$与$A$的量纲公式中的量纲指数。

正如前面已指出的，量纲分析方法是基于这样的前提，即任何正确地描述一个物理现象的方程在量纲上必须是齐次的。如果一个方程的每一项都具有相同的量纲指数，则称该方程在量纲上是齐次的。当然这种方程与采用的单位制无关，此单位制与规定的单位与方程的量纲一致。用一个列矢量（也称为量纲矢量，它表示了量纲矩阵中该变量所对应的列）来表示一个变量的量纲指数是方便的。在(3)式中力$F$的量纲矢量是$[1,1,-2]'$，这里一撇表示矩阵的转置。

假设包含在一个物理现象中有$n$个变量$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_n$，其量纲矢量分别为$\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$，…，$\boldsymbol{D}_n$。这一现象一般地可用下式表示：

$$f(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)=0 \tag{4}$$

当建立或假设了这种函数，不管用何种方法将各变量相乘，这一函数依然存在。这意味着该方程中的每一个变量可以与该方程的其它变量合并以形成无量纲的乘积，其量纲矢量是零矢量。(4)式可以转换成如(5)式的无量纲形式

$$f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)=0, \tag{5}$$

式中，无量纲乘积$\pi_i(i=1,2,\cdots,n)$一般地表示为如下式所示的带幂的乘积：

$$\pi_i=Q_1^{x_{1i}}Q_2^{x_{2i}}\cdots Q_n^{x_{ni}}。 \tag{6}$$

令$R_1$，$R_2$，…，$R_m$是选取的一组参考量纲。那么变量$Q_i$的量纲公式由下式给出：

$$R_1^{d_{1i}}R_2^{d_{2i}}\cdots R_m^{d_{mi}} \tag{7}$$

式中量纲的指数是用下式所示的量纲矢量来表示：

$$\boldsymbol{D}_i' = [d_{1i},\ d_{2i},\ \cdots,\ d_{mi}] \qquad i = 1,2,\cdots,n。 \tag{8}$$

对于(6)式的$\pi_i$，利用(7)式的量纲公式可以写出下式：

$$(R_1^{d_{11}}R_2^{d_{21}}\cdots R_m^{d_{m1}})^{x_{1i}}(R_1^{d_{12}}R_2^{d_{22}}\cdots R_m^{d_{m2}})^{x_{2i}}\cdots(R_1^{d_{1n}}R_2^{d_{2n}}\cdots R_m^{d_{mn}})^{x_{ni}} \tag{9}$$

因为$\pi_i$是在零矢量处有量纲矢量的无量纲乘积，因此$R_j(j=1,2,\cdots,m)$的指数相加必须为零，从而得到：

$$\begin{aligned} d_{11}x_{1i}+d_{12}x_{2i}+\cdots+d_{1n}x_{ni}&=0\\ d_{21}x_{1i}+d_{22}x_{2i}+\cdots+d_{2n}x_{ni}&=0\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ d_{m1}x_{1i}+d_{m2}x_{2i}+\cdots+d_{mn}x_{ni}&=0 \end{aligned} \tag{10}$$

用(8)式中的量纲矢量表示时，(10) 式可写成：

$$[\boldsymbol{D}_1,\ \boldsymbol{D}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{D}_n]\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{X}_i' = [x_{1i},\ x_{2i},\ \cdots,\ x_{ni}]$ (12)

或更为简洁地写成

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}=0 \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_i, i=1,2,,\cdots,n$，因此当且仅当这些变量的指数是齐次线性代数方程(13)式的解时，这一组变量的乘积是无量纲的。如果$\boldsymbol{X}$是(13)式的解，那么这里假设它是$\boldsymbol{D}$的一个$\boldsymbol{B}$矢量。与$\boldsymbol{B}$矢量的变量有关的相应的无量纲乘积称为$\boldsymbol{B}$-数目[21, 22]。许多作者常常也使用$\pi$—数目这一术语。因为这是在1914年由Buckingham首先提出的[8]，他使用符号$\pi$作为无量纲的乘积(或群)。事实上，这一名字更能表示出他对量纲分析的贡献，并称为Buckingham $\pi$定理。因为$\pi$有可能与通用常数$\pi=3.14159$相混淆，所以用他名字的字头$\boldsymbol{B}$来代替$\pi$。

以下面的例子说明上述方法。

例1． 此问题是求悬挂于真空中在重力影响下的单摆周期($P$)。为了写出周期的方程，第一步是研究影响周期的物理量。基于这一点，很明显单摆周期决定于摆锤的质量$M$，悬挂摆锤细绳的长度 $L$，当然还有重力加速度$g$。如前面那样，质量$m$、长度$l$和时间$t$选作为参考量纲，亦即$R_1=m$、$R_2=l$以及$R_3=t$。从表1得到变量$M$、$L$、$P$与$g$的量纲公式，并与它们的量纲矢量一起表示如下：

| 变量 | 量纲公式 | 量纲矢量 |
|---|---|---|
| $Q_1=M$ | $m^1l^0t^0$ | $\boldsymbol{D}_1'=[1,0,0]$ |
| $Q_2=L$ | $m^0l^1t^0$ | $\boldsymbol{D}_2'=[0,1,0]$ |
| $Q_3=P$ | $m^0l^0t^1$ | $\boldsymbol{D}_3'=[0,0,1]$ |
| $Q_4=g$ | $m^0l^1t^{-2}$ | $\boldsymbol{D}_4'=[0,1,-2]$ |

因此，(6)式$\pi_i$的量纲公式可以表示为：

$$(m^1l^0t^0)^{x_{1i}}(m^0l^1t^0)^{x_{2i}}(m^0l^0t^1)^{x_{3i}}(m^0l^1t^{-2})^{x_{4i}} \tag{14}$$

其量纲矢量必须是满足下式的零矢量：

$$
\begin{array}{c} \\ m \\ l \\ t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} M & L & P & g \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ x_{4i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}
$$

此系数矩阵就是单摆问题的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$，且$i=1、2、3、4$。求解$x_{1i}$、$x_{2i}$、$x_{3i}$用$x_{4i}$表示，于是得到所求$\boldsymbol{D}$的$\boldsymbol{B}$-矢量：

$$\boldsymbol{X}_i' = [0,\ -x_{4i},\ 2x_{4i},\ x_{4i}], \qquad i=1,2,3,4, \tag{16}$$

式中，$x_{4i} \neq 0$，是任意常数。相应的$\boldsymbol{B}$-数变为：

$$\pi_i = M^0 L^{-x_{4i}} P^{2x_{4i}} g^{x_{4i}} \tag{17}$$

因为这些解$\boldsymbol{X}_i$是通过一个乘法常数而互相相关，因此仅仅有一个线性独立解，并且仅有一个$\boldsymbol{B}$-数。为简单起见，选取$x_{4i}=1$，因为$\pi_i$是常数

(17)式可写成下式：

$$P = 常数\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{18}$$

这一常数的值，人们知道它是$2\pi$，不能由量纲分析法来确定，而必须用试验或解析法求出。

此例说明不是(5)式所有$\boldsymbol{B}$-数$\pi_i$都是线性独立的。如果每一个$\boldsymbol{D}$的$\boldsymbol{B}$-数是该组$\boldsymbol{B}$-数幂的乘积时，则一线性无关的$\boldsymbol{B}$-数称为完备的。为了确定完备的$\boldsymbol{B}$-数集内的元素数目，仅仅需要确立在(13)式中线性无关解的数目。后者的求解是众所周知的，且可在任何矩阵代数的教科书（例如Hohn[31]与Bellman[32]）中查到。因此可以叙述一条定理。

**定理1.** 与一个物理现象有关的$\boldsymbol{B}$-数的完备集合的乘积项数等于$n-r$，式中$n$是包括在该现象中的变量的数目，$r$是关联量纲矩阵的秩。

这一结论首先由Buckingham进行过讨论[8]，并且由Langhaar叙述过[23]。它说的是当且仅当一个方程可简化为一个$\boldsymbol{B}$-数完备集的一种关系时，则该方程在量纲上是齐次的。Buckingham的结果[8]原来叙述为定理2。

**定理2.** 一个方程$f(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)=0$在量纲上是齐次的，其充要条件是它应能化简为$g(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_r)=0$的形式。式中各个$\pi$是各个变量$Q$的$\boldsymbol{B}$-数完备集。

这条定理虽然不能从给定的一组变量中预计到$\boldsymbol{B}$-数的完备集中的乘积是多少，然而它说明了一个有$n$个量的物理现象可用一个$\boldsymbol{B}$-数的完备集来严格而精确地加以描述。在一个$\boldsymbol{B}$-数完备集中的乘积项数可由另一条规则来确定，它与定理1等价。这条规则（即定理3）首先由Van Driest给出[24]。

**定理3.** 一个$\boldsymbol{B}$-数完备集中乘积的项数等于其变量的总数减去不能形成无量纲乘积的变量的最大数目。

为了证明定理1与定理3的等价性，仅需说明不形成无量纲乘积的最大变量数等于量纲矩阵$\boldsymbol{D}$的秩即可。

利用线性矢量空间的表示法，Buckingham定理（即定理2）简单说明了量纲矩阵的零维具有固定的维数，因此Van Driest规则（定理3）确定了量纲矩阵的零度（维）。求取$\boldsymbol{B}$-数完备集的问题就等价于计算(13)式的基础解系（称为$\boldsymbol{B}$-矢量的完备集）。为简单起见，由$\boldsymbol{B}$-矢量完备集而构成的矩阵称为完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。

还可说明参考量纲的选取不会影响到$\boldsymbol{B}$-数[22]。

**定理4.** 若参考量纲认为是独立的，并且这些参考量纲的数目是不变的，则与一个物理现象有关的$\boldsymbol{B}$-数相对于参考量纲的选取是不变的。

这条定理的重要意义在于：在计算无量纲乘积的完备集或在计算与一个物理现象有关的$\boldsymbol{B}$-数中，只要量纲的集合是独立的且其数目不变，则选取什么样的参考量纲是无关紧要的。

在例1中，单摆问题涉及到4个变量。量纲矩阵$\boldsymbol{D}$由(15)式给出。因为$\boldsymbol{D}$的秩为3，根据定理1，正如所预计到的，仅有$n-r=4-3=1$个独立的$\boldsymbol{B}$-数。

现在假设将力$f$、长度$l$与时间$t$选为参考量纲。从表1知，新的量纲矩阵$\boldsymbol{D}''$变为：

$$\boldsymbol{D}''=\begin{array}{c}\\ f\\ l\\ t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}M & L & P & g\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\end{array} \tag{19}$$

把$\boldsymbol{D}''$变换为$\boldsymbol{D}$的矩阵$\boldsymbol{D}^*$是变量力、长度与时间相对于参考量纲 $m$，$l$，$t$的量纲矩阵，再次从表1中得到：

$$\boldsymbol{D}^*=\begin{array}{c}\\ m\\ l\\ t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}f & l & t\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array} \tag{20}$$

很容易证实$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}''$。因为$\boldsymbol{D}^*$是非奇异的，所以$\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{D}''\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$是等价的，它们有相同的$\boldsymbol{B}$-数集。

显然，应用量纲分析，首先必须能辨识一个特定物理现象的变量。支配变量的选取需要具有特定物理学分支的一些预备知识，这些知识可能是基于分析研究、试验观察或兼有二者所获得，不管这些预备知识的来源如何，直观判断或有根据的推测必须能基于这些知识。

为了说明量纲分析的效能，在着手更复杂的问题之前，讨论一下计算$\boldsymbol{B}$-数完备集的一种系统化算法。

**3.完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的系统化计算法**

一旦已经建立了量纲矩阵以及确定了$\boldsymbol{B}$-数完备集中乘积的数目，就必须计算$\boldsymbol{B}$-矢量，为此目的，下面给出一种系统化的方法。

令$\boldsymbol{D}$是与一个物理现象有关的一组变量的$m\times n$阶量纲矩阵，$m$是所选参考量纲的数目，$n$是该集合的变量数目。不失一般性，可以假定$n\geqslant m$。研究增广矩阵：

$$[\boldsymbol{D}' \quad \boldsymbol{I}_n] \tag{21}$$

正如以前那样，式中一撇表示矩阵的转置，$\boldsymbol{I}_n$是一个$n$阶的单位矩阵。假定$\boldsymbol{D}$的秩是$r$。那么(21)式经过有限次的初等行运算，可得到等价矩阵(例如见Hohn[31])：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & \boldsymbol{C}_{13}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_{23}\end{bmatrix} \tag{22}$$

式中，$\boldsymbol{D}_{11}$是$r$阶非奇异的上三角阵，$\boldsymbol{D}_{12}$，$\boldsymbol{C}_{13}$与 $\boldsymbol{C}_{23}$ 分别是 $r\times(m-r)$ 阶，$r\times n$ 阶及$(n-r)\times n$阶矩阵。

**定理5.** $\boldsymbol{C}_{23}$的转置$\boldsymbol{C}'_{23}$是(13)式的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。

正如Buckingham所指出[8]，此定理的优点在于如果每个非独立变量或者可调整其变量仅在一个无量纲乘积中出现，就可以最容易地确定出这些无量纲乘积间的函数关系，例如，如果速度在实验中是很容易改变的，那么速度应仅仅是一个独立无量纲变量(的乘积中出现)。换句话说，有时希望某些特定的变量在一个$\boldsymbol{B}$-矢量中而且仅在一个$\boldsymbol{B}$-矢量中出现。另外，对于一个完备的$\boldsymbol{B}$-矩阵来说，怎样知道是否还有另一个具有这种性质的变量存在呢?如果一个需要的变量确实存在，那么如何能得到它而不必穷举所有可能的线性组合？这个问题的解决包含在下列的定理中：

**定理6.** 令$\boldsymbol{A}_1$是一个与一组变量有关的给定的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵，当且仅当在$\boldsymbol{A}_1$中(相应于一些特定变量的)各行是线性无关时，则存在一个这种特定变量组成的完备$\boldsymbol{B}$矩阵$\boldsymbol{A}_2$，使得每个这种特定变量仅在$\boldsymbol{A}_2$的一个$\boldsymbol{B}$-矢量中出现。

利用下列例子来说明上面的方法。

例2. 一个投影面积为$\boldsymbol{A}$的光滑球体，以速度$v$通过一个密度为$\rho$与粘滞系数为$\mu$的流体，要确定该球所遇到的总阻力。很清楚，总阻力$\delta$是$v$、$A$、$\rho$与$\mu$的函数。如以前那样，选取质量$m$、长度$l$与时间$t$为参考量纲。从表1，其量纲矩阵为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{array}{c} \\ m \\ l \\ t \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\delta & v & A & \rho & \mu\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\end{array} \tag{23}$$

为了计算完备$\boldsymbol{B}$-矩阵，研究增广矩阵

$$[\boldsymbol{D}' \quad \boldsymbol{I}_5] \tag{24}$$

它由下式给出：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{25}$$

目的是应用一系列初等行运算(见Hohn[31])(25)式，使其成为(22)式的形式。因为$\boldsymbol{D}$的秩是3，矩阵$\boldsymbol{C}_{23}$的阶数是$(n-r)\times n=2\times 5$。下面一系列初等行运算将得到所要求的形式：

新的第4行＝第4行－第1行≡(命名为)$4'$行；

新的第5行＝第5行－第1行≡(命名为)$5'$行；

新的第3行＝第3行－2×第2行＝$3'$行；

新的第4行＝第$4'$行＋4×第2行≡$4''$行；

新的第5行＝第$5'$行＋2×第2行≡$5''$行；

新的第4行＝第$3'$行＋$4''$行≡$4'''$行；

新的第5行＝第$5''$行＋$\frac{1}{2}$×$3'$行≡$5'''$行。

相应的矩阵可以分割成由下式给出的形式：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{C}_{13} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{23} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中，$\boldsymbol{D}_{12}$是零矩阵。这就得到：

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{C}_{23} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \delta & v & A & \rho & \mu \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (27)$$

根据定理5，$\boldsymbol{C}_{23}$的转置是一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。因为有5个变量并且$\boldsymbol{D}$的秩是3，定理1揭示了在完备的$\boldsymbol{B}$-数集合中有两个无量纲的乘积，它们中的每一个对应于$\boldsymbol{C}_{23}$的一行。这样得到了两组$\boldsymbol{B}$-数之间的一个函数关系为：

$$f(v^2 A\rho/\delta,\ v\mu A^{1/2}\delta) = 0, \quad (28)$$

式中，$\pi_1 = v^2 A\rho/\delta$，$\pi_2 = v\mu A^{1/2}/\delta$，或为另一种形式：

$$v^2 A\rho/\delta = f_1(v\mu A^{1/2}/\delta) \quad (29)$$

因为$\delta$出现在两个乘积之中，所以这一关系并不是计算阻力的最好形式。因此必须改变两个独立的$\boldsymbol{B}$-数，使$\delta$仅在一个$\boldsymbol{B}$-数中出现。为达此目的，我们令$\boldsymbol{M}$是一个包含有对应于$\delta$行的2阶非奇异子矩阵$\boldsymbol{C}'_{23}$。于是，选取$\boldsymbol{C}'_{23}$的第1行及第5行（因为$\delta$在第1行，则第1行必须选取，而另一行是任选的），并给出为：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

其伴随矩阵由下式给出（见Hohn[31]）：

$$\boldsymbol{M}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

那么矩阵乘积

$$\boldsymbol{C}'_{23}\boldsymbol{M}_a = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \delta \\ v \\ A \\ \rho \\ \mu \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

是一个所要求的$\boldsymbol{B}$-矩阵。相应的$\boldsymbol{B}$-数得到为：$\pi_1 = A\rho v^2/\delta$，$\pi_2 = v\rho A^{1/2}/\mu$，得到一个函数关系为：

$$\delta/A\rho v^2 = f_2(v\rho A^{1/2}/\mu) \quad (33)$$

令$d$是该球的直径。则$A = \pi d^2/4$，$\pi_2 = \pi^{\frac{1}{2}} v\rho d/2\mu$。无量纲乘积$v\rho d/\mu$，是首先由 Osborne

Reynolds导出的，即为熟知的雷诺数，记作$Re$。现在(33)式可表示为：

$$\delta=(A\rho v^2/2)f_3(Re) \quad (34)$$

用下式定义一个阻力系数：

$$\delta=C_\delta(A\rho v^2/2) \quad (35)$$

我们有

$$C_\delta=f_3(Re) \quad (36)$$

于是，可把该阻力问题简化为仅包含有两个无量纲乘积$C_\delta$与$Re$的一个方程。从实验数据可作出阻力系数$C_\delta$为雷诺数的函数的图形。当已知球的速度时，(34)式加上阻力系数，是目前直接确定阻力(见流变学的计量)的最好形式。

另一方面，当阻力给定要求速度时，(33)式或(34)式是不方便的。两个独立的$\boldsymbol{B}$-数必须再次地改变，使得速度$v$仅在两个$\boldsymbol{B}$-数的一个中出现。为此目的，令$\boldsymbol{M}$是一个包含有相应$v$的一行的2阶$\boldsymbol{C}_{23}'$的非奇异子矩阵。因此，选取(27)式转置的第2行与第5行(第2行必须选取，而第5行任意选)，并给出

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (37)$$

那么矩阵乘积(38)式是所要求的$\boldsymbol{B}$-矩阵：

$$-\boldsymbol{C}_{23}'\boldsymbol{M}_a=-\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 1/2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{matrix}\delta\\ v\\ A\\ \rho\\ \mu\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\\ -1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \quad (38)$$

式中，$\boldsymbol{M}_a$是$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵。相应的$\boldsymbol{B}$-数变为$\pi_1=\delta/A\rho v^2$与$\pi_2=\delta\rho/\mu^2$，并得到：

$$\delta/A\rho v^2=f_4(\rho\delta/\mu^2) \quad (39)$$

从(35)式很容易证明：

$$v\rho d/\mu=Re=(8\rho\delta/C_\delta\pi)^{1/2}\mu, \quad (40)$$

并且(39)式可表示为：

$$C_\delta=f_5(\rho\delta/\mu^2) \quad (41)$$

可以作出阻力系数为无量纲乘积$\rho\delta/\mu^2$的函数的图形。因此一旦阻力已知时，(40)式与(41)式是直接确定速度的合适形式。

例3. 被一个晶体点阵散射的电子的平均自由程已知与温度$\theta$、能量$E$、弹性常数$c$、普朗克常数$h$、玻尔兹曼常数$k$、以及电子质量$M$(例如见 Shockley(25))有关。问题是在这些变量中导出一个普遍方程。

再次把长度$l$、质量$m$、时间$t$与温度$T$选为参考量纲。那么对应的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{matrix}l\\ m\\ t\\ T\end{matrix}\overset{\begin{matrix}P_m & C & E & h & k & Q & M\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}} \quad (42)$$

为了计算完备的$\boldsymbol{B}$矩阵，研究增广矩阵：

$$[\boldsymbol{D}' \quad \boldsymbol{I}_7] \tag{43}$$

它由下式给出：

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{44}$$

利用一系列初等运算，可以将其排列成(22)式的形式，得到：

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right] \tag{45}$$

从(45)式可以认辨出适当的矩阵：$\boldsymbol{D}_{12}$是零(维)矩阵以及(46)式～(48)式的矩阵：

$$\boldsymbol{D}_{11}=\begin{array}{c}(\text{第1行})\\(\text{第2行})\\(\text{第4行})\\(\text{第5行})\end{array}\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{C}_{13}=\begin{array}{c}(\text{第1行})\\(\text{第2行})\\(\text{第4行})\\(\text{第5行})\end{array}\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} P_m & C & E & h & k & \theta & M \end{array} \\
\boldsymbol{C}_{23}=\begin{array}{c}(\text{第3行})\\(\text{第6行})\\(\text{第7行})\end{array} & \begin{bmatrix}
2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
-5 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}\end{array} \tag{48}$$

因此，$\boldsymbol{C}_{23}$的转置是完备的$\boldsymbol{B}$-矩阵。因为该现象中涉及到7个变量，并且$\boldsymbol{D}$的秩为4，从定理1得出，在完备$\boldsymbol{B}$-数集中有3个无量纲乘积，它的每一个乘积对应于$\boldsymbol{C}_{23}$的一行。

假定问题是要求取$\boldsymbol{D}$的1个$\boldsymbol{B}$-矩阵，使变量$P_m$，$C$与$E$的每一个在$\boldsymbol{B}$-矢量的1个（仅为一个）中出现。因为$\boldsymbol{C}'_{23}$的子矩阵$\boldsymbol{M}$（包含了对应于变量$P_m$、$C$ 以及$E$的头3行）是非奇异的，根据定理6，存在一个这样的$\boldsymbol{B}$-矩阵。令$\boldsymbol{M}_a$是$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵，则：

$$
C'_{23}M_s=\begin{bmatrix}2 & 2 & -5\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 2 & -6 & 0\\ -1 & 5 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix} \tag{49}
$$

因此(49)式的右边是所希望的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。在相应的$\boldsymbol{B}$-数之间的函数关系可得到并由下式给出：

$$
f(h^2/P_m^2k\theta M,\ k^5\theta^5M^5/C^2h^6,\ k^2\theta^2/E^2)=0 \tag{50}
$$

观察到$P_m$、$C$与$E$，其每一个变量仅在一个无量纲乘积中出现。另一种形式可写成：

$$
P_m^2=(h^2/k\theta M)f_1(k^5\theta^5M^5/C^2h^6,\ k^2\theta^2/E^2) \tag{51}
$$

在(50)式与(51)式中的函数关系不能由量纲分析来确定，它必须通过实验来提供。其重要性在于可把原来包含有7个变量关系的平均自由程问题简化为仅含有3个无量纲乘积的一个方程，这就大大节省了为支配方程而所需进行的试验次数。

**4．完备矩阵的最优化**

前面已经指出了从一个给定的量纲矩阵来计算一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。除了某些变量中的每一个需要仅出现在一个无量纲的乘积中之外，完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的选取完全是任意的。为了简化与一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵有关的公式并提供一种建立$\boldsymbol{B}$-数的显式集合，在形成一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵时，对这些$\boldsymbol{B}$ 矢量的选取必须加上附加的约束。为了避免这些公式中出现分指数，故将该矩阵的元素限定为整数。此外，Happ[21]提出了使$\boldsymbol{B}$-矩阵优化的准则，(1)在完备$\boldsymbol{B}$-矩阵中零的数目最多与(2)完备$\boldsymbol{B}$-矩阵中所有整数的绝对值之和为最小。选用这些准则可使与一个物理现象有关的公式形式变为最简单，在其它方面这些公式完全是任意的。显然这两条最优化准则的次序是重要的。为此，假设准则(2)在准则(1)后面。

因为任意完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的各列是量纲矩阵的零维空间的基，因此任意两个$\boldsymbol{B}$-矩阵是通过非奇异变换而相关的。一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵本身包含了应形成何种线性组合以获得优化的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的足够信息。根据这个结论，Chen[22]提出了一种优化的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的有效算法。这里不打算来说明这种算法。以一个例子来说明其结果。

例4． 对于一个给定的点阵，利用下列变量要求点阵的电阻系数与温度系数的关系：平均自由程$L$、电子的质量$M$、质点密度$N$、电荷$Q$、普朗克常数$h$、玻尔兹曼常数$k$、温度$\theta$、速度$v$以及电阻系数$\rho$。假设长度$l$、质量$m$、时间$t$、电荷$q$以及温度$T$选为参考量纲。各变量的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$由(52)式给出为：

$$
\boldsymbol{D}=\begin{array}{c}\\ l\\ m\\ t\\ q\\ T\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}L & M & N & Q & h & k & \theta & v & \rho\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{52}
$$

利用前节所提出的方法，可得到一个类似于(22)式的矩阵：

$$
\left[\begin{array}{ccccc:ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{53}
$$

因此，一个完备矩阵的转置由下式给出：

$$
\boldsymbol{C}_{23}=\begin{array}{c} \\ (\text{第3行}) \\ (\text{第6行}) \\ (\text{第8行}) \\ (\text{第9行}) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} L & M & N & Q & h & k & \theta & v & \rho \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array} \tag{54}
$$

从这个矩阵，利用Chen提出的算法[22]，能产生最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵。得到的矩阵的转置由下式给出：

$$
\begin{bmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{55}
$$

因此，在点阵电阻系数与温度之间的一般关系可以表示成：

$$
f(L^3N,\ LMv/h,\ Mv^2/k\theta,\ Q^2\rho/Lh)=0 \tag{56}
$$

可以看出独立变量数已从原先的9个而简化到4个。这就大大地节省了为确定所要求的函数所需的试验次数。例如，假定为作出判断需要对每个变量仅测试 4 个值。为了试验在原始方程中所有值的组合需要$4^9=262144$试验。作为(55)式的结果，对于4 个$\boldsymbol{B}$-数中的每一个取 4 个则现在只需进行$4^4=256$次试验。

**5.名词术语**

$A$——加速度或面积

$C$——弹性常数

$C_\delta$——阻力系数

$\boldsymbol{D}$——变量的量纲矩阵

$E$——能量

$f,F$——力

$g$——重力加速度

$h$——普朗克常数

$k$——玻尔玻曼常数

$L$——长度或平均自由程

$N$——原点密度

$P$——周期

$P_n$——平均自由程

$Q$——电荷

$q$——电荷

$Re$——雷诺数

$\theta,T$——温度

$t$——时间

$\delta$——阻力

$\varepsilon$——介电常数

$v$——速度　　　　　　$\mu$——导磁系数或粘性系数

$l$——长度　　　　　　$\rho$——流体密度或电阻系数

$m, M$——质量

"Dimensional Analysis" in *ECT* 1st ed.; Vol. 5; pp. 133-141; by D. Q. Kern, The Patterson Foundry & Machine Co.; "Dimensional Analysis in *ECT* 2nd ed.; Vol. 7, pp. 176-190, by I. H.Silberberg, Texas Petroleum Research Committee and John J. McKetta, The University of Texas.

## 参 考 文 献


[1] P. W. Bridgman; *Dimensional Analysis*; Yale Univ. Press, New Haven; Conn., 1922.
[2] G. Murphy, *Similitude in Engineering*, The Ronald Press Co., New York, 1950.
[3] J. F. Douglas, *An Introduction to Dimensional Analysis for Engineers*, Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1969.
[4] H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and Theory of Models*; John Wiley & Sons, Inc. New York, 1951.
[5] S. J. Kline, *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill Book company, New York, 1965.
[6] L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press; Inc.; New York, 1959.
[7] H. E. Huntley, *Dimensional Analysis*, Dover Publications, Inc.; New York; 1967.
[8] E. Buckingham, *Phys. Rev.* **4**, 345(1914).
[9] Lord Rayleigh, *Nature* **95**, 66(1915).
[10] T. J. Higgins; *Appl. Mech. Rev.* **10**, 331(1957).
[11] *Ibid.*, p. 443.
[12] A. D. Sloan and W. W. Happ, "Literature Search: Dimensional Analysis," *NASA Rept. ERC/CQD* 68-631, Aug. 1968.
[13] P. Moon and D. E. Spencer, *J. Franklin Inst.* **248**, 495(1949).
[14] E. U. Condon, *Am. J. Phys.* **2**, 63(1934).
[15] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **9**, 237(1917).
[16] W. E. Duncanson; *Proc. Phys. Soc.* **53**; 432(19 41).
[17] G. B. Brown, *Proc. Phys. Soc.* **53**, 418(1941).
[18] H. Dingle, *Phil. Mag.* 33; 321(1942).
[19] E. A. Guggenheim; *Phil. Mag.* 33, 479(July 1942).
[20] C. M. Focken; *Dimensional Methods and Their Applications*; Edward Arnold and Co.; London, 1953.
[21] W. W. Happ; *J. Appl. Phys.* 38, 3918(1967).
[22] W. K. Chen; *J. Franklin Inst.* **292**; 403(1971).
[23] H. L. Langhaar, *J. Franklin Inst.* **242**; 459(1946).
[24] E. R. Van Driest, *J. Appl. Mech.* **13**; A-34(1946).
[25] W. Shockley, *Electrons and Holes in Semiconductors*; D. Van Nostrand Co.; Princeton, N.J.; 1950.
[26] R. P. Kroon, *J. Franklin Inst.* **292**, 45(1971).
[27] A. Klinkenberg, and H. H. Mooy, *Chem. Eng. Progr.* **44**; 17(1948).
[28] S. Corrsin, *Am. J. Phys.* 19, 180(1951).
[29] J. Geertsma; G. A. Croes, and N. Schwarz; *Trans. AIME* **207**, 118(1956).
[30] L. Brand, *Am. Math. Month.* **59**, 516(Sept. 1952).
[31] F. E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra*, The Macmillan Co.; New York, 19 58.
[32] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1960.

# 二十、量纲分析代数理论


## 提　要

本文导出了一个由无量纲乘积的任意完备集来计算完备最优化集的算法，用于处理与某物理现象相关的变量的无量纲乘积。该算法是非穷举的且很适合于数字计算机上计算。还给出了示例。


**1. 引言**

量纲分析研究了描述自然现象的一般形式的方程。它已有效地用在工程造型(建立模型)中。近来在工程系统造型中利用量纲分析的浓厚兴趣反映在Higgin[5,6]及 Sloan及Happ[7]的三篇综合文献目录中，他们引用了600多篇文献。

从工程观点看量纲分析的主要目的是对一种物理关系作排列，在不失去这种关系的一般性的情况下，使这种关系更容易地由试验来确定。当变量的数目很大时，这种方法特别有价值。因此，利用此方法使一个试验的复杂性与试验范围大为简化。

把量纲分析应用到一个特定的物理现象时，第一步是选取一组合适的参考（或基本）量纲。多年来，物理学中的参考量纲数目从原来的3个发展到4个、5个，然后逐渐下降到绝对必要的1个，以后，由于认识到虽然仅仅1个参考量纲是绝对必要的，但按照研究的问题采用 3个、4个或5个参考量纲可带来很大的方便，于是量纲数目又有了增加。Bridgman强调了这一事实——即参考量纲的数目并不是神圣不可侵犯的，同时强调了量纲分析只不过是可作任意运算的一种人为的工具[2]。尽管有人仍在寻求参考的“真实量纲”，但参考量纲自由选取的原理已被广泛采用。

第二步是计算所包含变量的无量纲乘积的一个完备集。然后，这些量纲乘积唯一地表征了所研究问题的特性。

本文的目的是提出量纲分析的某些基本性质。

**2. 矩阵表示与$\boldsymbol{B}$-矢量的不变性**

假设我们已选定了一组合适的独立参考量纲，使得在一个物理现象中所涉及到的每一个变量的量纲都可用这些参考量纲来表示。为了把代数方法用于量纲分析，用一个矩阵来表示各变量的量纲是方便的。这一矩阵称为这些变量的量纲矩阵，并用符号$\boldsymbol{D}$来表示。$\boldsymbol{D}$的每一列代表所研究的一个变量，$\boldsymbol{D}$的每一行代表一个参考量纲。$\boldsymbol{D}$的第$ij$个元素表示在量纲表达式中对应于第$j$列的变量以及对应于$\boldsymbol{D}$的第$i$行的参考量纲的指数。作为一个示例，研究司蒂芬定律，它给出为：

$$H=(8\pi^5/15)(k^4\theta^4/h^3c^3),\tag{1}$$

式中$H$表示单位面积上发出的能量；$k$为玻尔兹曼常数；$\theta$ 为辐射表面的温度；$h$ 为普朗克常数；$c$为光速。如果长度($L$)，质量($M$)，时间($T$)以及温度($\theta$)选为参考量纲，则与司蒂芬定律对应的量纲矩阵给出为：

$$
\boldsymbol{D}=\begin{matrix} \\ L \\ M \\ T \\ \theta \end{matrix}\begin{matrix} H & k & \theta & h & c \\ \left[\begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{matrix} \tag{2}
$$

在该例中，玻尔兹曼常数具有的量纲是 $L^2M^1T^{-2}\theta^{-1}$，因此第2列的量纲指数是 (2,1,-2,-1)。

显然，当且仅当一组变量的指数是齐次方程

$$\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{O}, \tag{3}$$

的解时，这些变量的乘积是无量纲的。式中$\boldsymbol{X}$是表示这些变量指数的一个列矢量，并已假设与$\boldsymbol{D}$的各列用相同的次序排列。为方便起见，若$\boldsymbol{X}$是(3)式的一个解，我们说它是$\boldsymbol{D}$的一个$\boldsymbol{B}$-矢量。一个$\boldsymbol{B}$-矢量的各变量相应的无量纲乘积称为$\boldsymbol{B}$-数[6]，通常，许多作者也采用"$\pi$-数"这一术语，但因为$\pi=3.14159$的出现，我们不使用它，例如行矢量[1,-4,-4,3,3]的转置是(2)式的一个$\boldsymbol{B}$-矢量，相应的无量纲乘积

$$Hk^{-4}\theta^{-4}h^3c^3 \tag{4}$$

是(2)式的一个$\boldsymbol{B}$-数。显然，一个物理现象的$\boldsymbol{B}$-数不全是独立的。如果$\boldsymbol{D}$的每一个$\boldsymbol{B}$-数是一个集合的$\boldsymbol{B}$数乘幂的乘积，则独立$\boldsymbol{B}$-数的这个集合称为是完备的。$\pi$定理是由Buckingham首先提出(故称为 Buckingham $\pi$定理)[9]：当且仅当一个方程可以简化为一个完备的$\boldsymbol{B}$-数集合时，则它在量纲上是齐次的。但是，他未能正确地说明如何地从一个给定的变量集合中预计到独立的$\boldsymbol{B}$-数是多少。为了满足这一需要，Van Driest[10]叙述了一条可以严格证明的下列规则：一个完备集的$\boldsymbol{B}$-数的数目等于变量的总数减去不能形成无量纲乘积的这些变量的最大数目。用(3)式的线性无关的$\boldsymbol{B}$-矢量来表示时，Bucking ham定理简单地叙述为：矩阵$\boldsymbol{D}$的零维空间具有固定的维数，因此Van Driest规则确定了$\boldsymbol{D}$的零度，即它为$\boldsymbol{D}$的变量数减去其秩。这些结论用线性代数来表示当然是众所周知的，但是它们在量纲分析中是极为有用而且是重要的。于是，求取一个完备的$\boldsymbol{B}$-数集的问题等价于计算(3)式(称为$\boldsymbol{B}$-矢量的完备集)的基础解系。为简单起见，由$\boldsymbol{D}$的完备$\boldsymbol{B}$-矢量集而形成的矩阵称为$\boldsymbol{D}$的一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。

为了使与一个完备$\boldsymbol{B}$-数对应的公式简单化，通常，限制与$\boldsymbol{B}$-矩阵对应的元素为整数是有利的，从而避免了公式中分指数的出现。下面我们将假设这一点。

在[8]中，Happ用一个有代表性的例子说明了参考量纲的选取不会影响$\boldsymbol{B}$-数。这里，我们将证明这一论断一般说来也是成立的。

**定理1.** 假若认为参考量纲是独立的，且这些参考量纲的数目不变，则与一个物理现象相关的$\boldsymbol{B}$-数集合相对于参考量纲的选取是保持不变的。

证明，令$\boldsymbol{R}_1$是表示对应于(3)式中$\boldsymbol{D}$的各行变量的列矢量。令$\boldsymbol{R}_2$是表示对应于新选的参考量纲的列矢量。那么与在$\boldsymbol{R}_1$中的这些变量相关的量纲矩阵$\boldsymbol{D}_1$相对于$\boldsymbol{R}_2$中的参考量纲来说是非奇异的。如果不是，则$\boldsymbol{R}_1$中的各变量必然是不独立的。不难看出，矩阵$\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}$是与原变量集相关的相对于$\boldsymbol{R}_2$中新参考量纲的量纲矩阵，因为线性齐次方程组

$$\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{O} \quad 及 \quad \boldsymbol{DX}=\boldsymbol{O}, \tag{5}$$

是等价的，所以立即得到本定理。

作为示例，我们仍研究由 Happ[8] 阐述过的司蒂芬定律。与参考量纲长度($L$)，质量

$(M)$，时间$(T)$以及温度$(\theta)$)对应的司蒂芬定律的量纲矩阵示于(2)式中，若另外代之以选取长度$(L)$，力$(F)$，温度$(T)$以及熵$(S)$作为新的参考量纲，则对应的量纲矩阵变为

$$
\boldsymbol{D}^* = \begin{array}{c} \\ L \\ F \\ T \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} H & k & \theta & h & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6}
$$

将$\boldsymbol{D}^*$转换到$\boldsymbol{D}$的矩阵$\boldsymbol{D}_1$由下式给出：

$$
\boldsymbol{D}_1 = \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \\ \theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & F & T & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{7}
$$

因此，我们有$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}^*$。因为$\boldsymbol{D}_1$是非奇异的，则$\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$与$\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$是等价的。因此它们具有相同的$\boldsymbol{B}$-数集。

此定理的重要性在于：在计算与一个物理现象有关的无量纲乘积的完备集时，只要参考量纲集合的元素是独立的，并且参考量纲的数目不变，则选取什么样的量纲集合作参考量纲都是无关紧要的。

**3.完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的系统化的计算法**

在本节中，我们要介绍计算（3）式的一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的系统化的方法。这一方法是Podoe[11]给出方法的一种简单改进，并且它特别适合我们的场合。最近Sloan与Happ还给出了一种非常类似的算法[12]。

令$\boldsymbol{D}$是一个与一个物理现象有关的变量集的$n\times p$阶量纲矩阵，此处$p$是参考量纲的数目，$n$是该集的变量数，不失一般性，我们假设$n\geqslant p$。研究增广矩阵

$$
[\boldsymbol{D}', \ \boldsymbol{I}_n], \tag{8}
$$

式中一撇表示矩阵的转置，$\boldsymbol{I}_n$是一个$n$阶的单位矩阵。假设$\boldsymbol{D}$的秩是$r$，那么对(8)式进行有限次的初等行运算，得到如下形式的等价矩阵

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & \boldsymbol{C}_{13} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_{23} \end{bmatrix}, \tag{9}
$$

式中$\boldsymbol{D}_{11}$是一个$r$阶非奇异的上三角矩阵，$\boldsymbol{D}_{12}$，$\boldsymbol{C}_{13}$与$\boldsymbol{C}_{23}$分别是$r\times(p-r)$阶，$r\times n$阶与$(n-r)\times n$阶矩阵。

**定理2** $\boldsymbol{C}_{23}$的转置$\boldsymbol{C}'_{23}$是(3)式的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。

证明：令

$$
\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{D}_1, \ \boldsymbol{D}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{D}_n] \tag{10}
$$

以及

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{13} \\ \boldsymbol{C}_{23} \end{bmatrix} = [c_{ij}] \tag{11}
$$

因为在(11)式中的每一行表示了$\boldsymbol{D}'$的各行如何地线性组合而产生下列矩阵的新行，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

因此，对于$\boldsymbol{C}_{23}$中的各行可以得出

$$c_{i1}\boldsymbol{D}_1' + C_{i2}c_2' + \cdots + c_{in}\boldsymbol{D}_n' = 0 \tag{13}$$

此处所有的$i>r$，式中一撇也表示一个矩阵的转置。因此，我们有

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_{23}' = 0 \tag{14}$$

因为在(8)式中$\boldsymbol{I}_s$的所有行是线性独立的，同时因为仅仅利用初等行运算而得出(9)式，所以(11)式中所有的行必然是线性独立的。因此$\boldsymbol{C}_{23}'$是(3)式的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。定理证毕。

正如 Buckingham 所指出[9]，如果使每个相关变量，或可调整变量仅在一个无量纲乘积中出现是有优越性的，以致于这些无量纲乘积之间的函数关系可最容易地确定出。例如，如果速度是一个在试验中容易改变的量，那么速度仅仅在各个独立的无量纲变量乘积的一个中出现。换句话说，有时希望某些特定的变量的每一个仅在一个$\boldsymbol{B}$-矢量中出现一次。那么，对于一个给定的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵来说，我们如何知道还存在着另一个具有此性质的$\boldsymbol{B}$-矩阵呢？如果这个问题的回答是肯定的，那么我们便不必穷举所有的可能性。如何能从一个给定的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵而得到一个所希望的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。这些问题的解决包含在下一条定理中。同时该定理的证明还给出了从一个给定的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵而构成一个所希望的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的算法。

**定理3.** 令$\boldsymbol{A}_1$是一个给定的与一个变量集相对应的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。当且仅当对应于$\boldsymbol{A}_1$中的一些特定变量的各行是线性独立时，那么存在一个(含有)这些变量的完备矩阵$\boldsymbol{A}_2$，使这些特定变量的每一个仅在$\boldsymbol{A}_2$的$\boldsymbol{B}$-矢量中出现。

证明：令矩阵$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$是$n\times m$矩阵。显然，$n>m$，特定的变量数$q$必须不大于$m$。不失一般性地我们可以假设特定的变量对应于$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$的头$q$行。

必要性：因为存在一个非奇异的$q$阶下三角形子矩阵，所以$\boldsymbol{A}_2$的头$q$行必定是线性独立的。令$\boldsymbol{M}_2$是在$\boldsymbol{A}_2$中含有$\boldsymbol{A}_2$头$q$行的$m$阶非奇异子矩阵。因为$\boldsymbol{A}_2$的秩是$m$，若有必要，我们总可以应用交换定理，所以这一点总是可能的。还令$\boldsymbol{M}_1$是$\boldsymbol{A}_1$中对应于$\boldsymbol{M}_2$的子矩阵。因为$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$的各列是各变量的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$的零维空间的基。由此可知存在一个$q$阶非奇异子矩阵$\boldsymbol{M}$，使得$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{M}$。具体说，我们有$\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}$。因此，$\det\boldsymbol{M}_1=(\det\boldsymbol{M}_2)\cdot(\det\boldsymbol{M})\neq 0$。

充分性：令$\boldsymbol{M}_1$是$\boldsymbol{A}_1$的包含$\boldsymbol{A}_1$头$q$行的非奇异子矩阵。理由与$\boldsymbol{M}_2$的必要性部分相同，还令$\boldsymbol{M}_{1a}$是$\boldsymbol{M}_1$的伴随矩阵。不难看出，矩阵乘积$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{M}_{1a}$是所要求的完备$\boldsymbol{B}$矩阵，因为在$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{M}_{1a}$中对应于特定变量的各行包含在对应于$\boldsymbol{M}_1$各行的对角线矩阵中。所以定理得证。

作为示例，研究下列量纲矩阵$\boldsymbol{D}$，它与晶体点阵散射电子的平均自由程相对应[14]：

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \\ \theta \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} P & C & E & h & k & \theta & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{15}$$

式中$P$为平均自由程，$C$为弹性常数，$E$为能量，$h$为普朗克常数，$k$为玻尔兹曼常数，$\theta$为温度，$L$，$M$及$T$与(2)式中定义相同。研究增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

利用一系列初等行运算它可写成(9) 式的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{C}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

以及

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{C}_{23} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} P & C & E & h & k & \theta & M \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (20)$$

因此，$\boldsymbol{C}_{23}$的转置是完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。假定我们希望求取$\boldsymbol{D}$的一个$\boldsymbol{B}$-矩阵，使得变量$P$，$C$与$E$的每一个在一个而且仅在一个$\boldsymbol{B}$-矢量中出现。因为包含头3行(对应于$P$，$C$与$E$)的$\boldsymbol{C}_{23}'$的子矩阵$\boldsymbol{M}$是非奇异的，所以存在一个具有所希望性质的$\boldsymbol{B}$-矩阵。令$\boldsymbol{M}_a$是$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵，那么

$$
\boldsymbol{C}_{25}'\boldsymbol{M}_a = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}
$$

因此，(21)式的右边是一个所希望的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。

**4.完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的最优化**

在前一节中，我们已经指出如何从一个给定的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$计算一个完备的$\boldsymbol{B}$-矩阵。因为一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵是$\boldsymbol{D}$的零维空间的一个基，由此可知任意两个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵是通过一个非奇异的变换而建立联系的。为了简化与一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵相对应的公式，同时为了提供一个建立显式$\boldsymbol{B}$-数集合的方法，在形成完备$\boldsymbol{B}$-矩阵中，在选取这些$\boldsymbol{B}$-矢量时加上一些附加约束是必要的。Happ[8]提出了使$\boldsymbol{B}$-矩阵最优化的下列准则：

(i)使完备$\boldsymbol{B}$-矩阵中零的数目最多。

(ii)使所有完备$\boldsymbol{B}$-矩阵中所有整数的绝对值之和为最小。

选取这些准则是使与一个物理现象相关联的公式是其"最简单"的形式。除此之外，它们则完全是任意的。显然，两条最优化准则的次序是重要的。为了我们的目的，假设准则(2)放在准则(1)之后。目前利用Happ[8]的穷举法使问题仅得到部分解决；利用一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的各列作为一个基，会产生许多的$\boldsymbol{B}$-矩阵。然后将它们相互比较而得到"最优化"的$\boldsymbol{B}$-矩阵。这样，并不知道"最优化"的$\boldsymbol{B}$-矩阵是否确实是最优化的。因为这一点，NASA（国家航空与宇宙航行局）研制的计算机程序，它仅能用来计算含有15个变量与10个量纲的问题[15]。下面，我们将指出从任意的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵用系统化的方法能确实得到最优化的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵。换句话说，一个完备的$\boldsymbol{B}$-矩阵本身包含了足够的信息，说明应形成什么样的线性组合以得到最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵。根据本节所做的评论，在下一节中我们将叙述一种产生最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵的有效算法。

令$\boldsymbol{A}$是一个完备的$n\times m$阶$\boldsymbol{B}$-矩阵，$\boldsymbol{A}_{qm}$表示在$\boldsymbol{A}$中秩为$m-1$的$q\times m$阶子矩阵。用$S(\boldsymbol{A}_{qm})$表示在$\boldsymbol{A}$中形如$\boldsymbol{A}_{qm}$的所有子矩阵的集合。注意在$S(\boldsymbol{A}_{qm})$中不包括$q\times m$阶但秩小于$m-1$的所有子矩阵。

为方便起见，令$\boldsymbol{A}$的所有集合$S(\boldsymbol{A}_{qm})$用下列方法来排列，当且仅当$q_i>q_j$；

$$
S(\boldsymbol{A}_{q_im})>S(\boldsymbol{A}_{q_jm}), \tag{22}
$$

以及当且仅当在$i<j$时，$q_i>q_j$。对于在$S(\boldsymbol{A}_{q_im})$中的每一个$\boldsymbol{A}_{q_im}$，所对应的齐次方程组为：

$$
\boldsymbol{A}_{q_im}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{0}, \tag{23}
$$

式中$\boldsymbol{X}_i$是一个$m$行的列矢量，或简称$m$维矢量。它具有的零维（度）数为1。于是，如果$\boldsymbol{C}_{q_i}$是(23)式的一个整数解，则$h\boldsymbol{C}_{q_i}$表示(23)式的完备整数解，其中$h$是一个实数标量。为了提供一个显式表达式与唯一解的方法，我们选择$(1/h)$等于包含在矢量$\overline{\boldsymbol{A}}_{q_im}\boldsymbol{C}_{q_i}$中所有整数的最大可能公因数(整数)，其中$\overline{\boldsymbol{A}}_{q_im}$是从$\boldsymbol{A}$删去包含在$\boldsymbol{A}_{q_im}$的所有行而得到的矩阵。为方便起见，如此得到的唯一的矢量$h\boldsymbol{C}_{q_i}$称为$\boldsymbol{A}_{q_im}$的关联矢量，矩阵乘积$\boldsymbol{A}(h\boldsymbol{C}_{q_i})$称为$\boldsymbol{A}_{q_im}$的关

联$\boldsymbol{B}$-矢量。

假若集合$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$具有两个以上的元素，则计算与排列$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$的元素是方便的。对于$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中的$\boldsymbol{A}_{q,m}^{u}$与$\boldsymbol{A}_{q,m}^{v}$，令$\beta_{q,}^{u}$与$\beta_{q,}^{v}$分别是$\boldsymbol{A}_{q,m}^{u}$与$\boldsymbol{A}_{q,m}^{v}$相对应的$\boldsymbol{B}$-矢量。所谓

$$\boldsymbol{A}_{q,m}^{u}>\boldsymbol{A}_{q,m}^{v} \tag{24}$$

系指$u<v$，且$\boldsymbol{\beta}_{q,}^{u}$所有元素的绝对值之和要不大于$\beta_{q,}^{v}$所有元素的绝对值之和。显然$\boldsymbol{\beta}_{q,}^{u}$与$\boldsymbol{\beta}_{q,}^{v}$有相同的和时，所排的次序不是唯一的。因此，可以考虑"高阶效应"。例如，为了确定矩阵的次序，可以比较各元素的平方和或各元素的立方的绝对值之和等等。当然，这些不足以保证矩阵的排列次序是唯一的，但它们已满足了我们的意图。

作为一个示例，研究(21)式中给出的$\boldsymbol{B}$-矩阵，$\boldsymbol{A}$的子矩阵$\boldsymbol{A}_{43}$的集合由下式给出：

$$S(\boldsymbol{A}_{43})=\{\boldsymbol{A}_{43}^{1},\ \boldsymbol{A}_{43}^{2}\}, \tag{25}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{43}^{1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix} \text{与}\quad \boldsymbol{A}_{43}^{2}=\begin{bmatrix}2 & -6 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_{43}^{1}$与$\boldsymbol{A}_{43}^{2}$的关联矢量$\boldsymbol{C}_{4}^{1}$与$\boldsymbol{C}_{4}^{2}$现在能用很简单的方法从有关的线性齐次方程组的完备解计算出。有关的线性齐次方程为

$$\boldsymbol{A}_{43}^{1}\boldsymbol{X}_{1}=\mathbf{0}\quad\text{与}\quad\boldsymbol{A}_{43}^{2}\boldsymbol{X}_{2}=\mathbf{0}, \tag{26}$$

故算出

$$h_{1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad\text{与}\qquad h_{2}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix} \tag{27}$$

式中$\boldsymbol{X}_{1}$和$\boldsymbol{X}_{2}$为两个3维矢量，$h_{1}$和$h_{2}$为实数标量。实数标量$h_{1}$与$h_{2}$二者都求得为1/2。因此我们有

$$\boldsymbol{C}_{4}^{1}=\begin{bmatrix}0\\0\\1/2\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{C}_{4}^{2}=\begin{bmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\end{bmatrix} \tag{28}$$

$\boldsymbol{A}_{43}^{1}$及$\boldsymbol{A}_{43}^{2}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量$\boldsymbol{B}_{4}^{1}$和$\boldsymbol{B}_{4}^{2}$的转置分别由下式给出：

$$[0,0,-1,0,1,1,0]\text{与}[-3,-1,1,0,0,0,0], \tag{29}$$

因为$\boldsymbol{B}_{4}^{1}$中所有的元素的绝对值之和小于$\boldsymbol{B}_{4}^{2}$的所有元素的绝对值之和，所以$S(\boldsymbol{A}_{43})$的子矩阵如(25)式的次序排列。

**定理4.** 与一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵的子矩阵$\boldsymbol{A}_{qm}$的集合相关联的$\boldsymbol{B}$-矢量是线性独立的充要条件是这些子矩阵的关联矢量是线性独立的。

证明：令$\boldsymbol{B}_{i}$及$\boldsymbol{C}_{i}(i=1,2,\cdots,k)$分别是关联$\boldsymbol{B}$-矢量及各子矩阵的关联矢量。那么

$$[\boldsymbol{B}_{1},\boldsymbol{B}_{2},\cdots,\boldsymbol{B}_{k}]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}_{1},\boldsymbol{C}_{2},\cdots,\boldsymbol{C}_{k}] \tag{30}$$

由此得到

$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}', \tag{31}$$

式中一撇表示一个矩阵的转置，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{1},\ \boldsymbol{B}_{2},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}_{k}]$，$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_{1},\ \boldsymbol{C}_{2},\ \cdots,\ \boldsymbol{C}_{k}]$。因此，如果$\boldsymbol{B}'$的各行是线性独立的，则$\boldsymbol{C}'$的秩必定为$k$，因为$\boldsymbol{A}'$的各行是线性独立的。反之，如果$\boldsymbol{C}'$的各行是线性独立的，则$\boldsymbol{B}'$的各行也必然是线性独立的。故定理得证。

**定理5.** 令$\boldsymbol{B}^i_{q_i}(i=1, 2, \cdots, k)$是在$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中子矩阵$\boldsymbol{A}^i_{q_i,m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。如果$\boldsymbol{B}^i_{q_i}$是线性独立的，那么它们可以作为一个"最优化"$\boldsymbol{B}$-矩阵的各列。

该定理可直接从集合$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$的排列以及排列这些集合的元素而得到。本定理的一个直接结果如下。

**推论1.** 出现在完备的最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵中最大的零度数为$mq_1$，并且在任意的完备最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵(其每一个包含有$q_1$个零点)中，恰好有$r$个含有$q_1$个零点的列，此处$r$是与$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$的子矩阵对应的线性独立矢量的数目。

**推论2.** 如果与$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$的子矩阵的关联矢量是线性独立的，那么这些矩阵的关联$\boldsymbol{B}$-矢量必定出现在每一个完备、最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵中*。

再次地，研究(21)式中所给出的$\boldsymbol{B}$-矩阵。我们已有$S(\boldsymbol{A}_{q,m})=S(\boldsymbol{A}_{4,3})$如(25)式所示。因为$\boldsymbol{C}^1_4$与$\boldsymbol{C}^2_4$的关联矢量是线性独立的，由此得到$r=2$，同时任何完备的最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵必定包含在如(29)式所示的子矩阵的关联$\boldsymbol{B}$-矢量中。

**定理6.** 对于一个$n\times m$阶的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵，$\boldsymbol{A}$至少有$m$个线性独立的$\boldsymbol{A}$的子矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的关联矢量$(q_i\geqslant m-1)$。

证明：令$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{A}$中$m$阶的一个非奇异子矩阵。不失一般性，我们可以假设$\boldsymbol{M}$占据$\boldsymbol{A}$的头$m$行，我们用$\boldsymbol{M}_{-j}$表示从$\boldsymbol{M}$删去其第$j$行而得到的矩阵。显然，$\boldsymbol{M}_{-j}$是$\boldsymbol{A}$中形如$\boldsymbol{A}_{q,m}$的一个子矩阵。研究线性齐次方程组

$$\boldsymbol{M}_{-j}\boldsymbol{X}_j=0 \tag{32}$$

$j=1, 2, \cdots, m$。式中$\boldsymbol{X}_j$是$m$维矢量，因为$\boldsymbol{M}_{-j}$的秩为$m-1$，所以$\boldsymbol{M}_{-j}$具有一个非平凡的关联矢量$\boldsymbol{C}_j$。由此得到

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}_j=\boldsymbol{F}_j, \tag{32}$$

式中$\boldsymbol{F}_j$是在第$j$个位置有一个非零元素，而其它元素为零的一个$m$维矢量。其理由在于$\boldsymbol{C}_j$不是方程组$\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{0}$的一个平凡解。因为$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\cdots$，与$\boldsymbol{F}_m$必须是线性独立的，则矢量$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，$\cdots$，与$\boldsymbol{C}_m$也必须是线性独立的。因此至少有$m$个线性独立的$\boldsymbol{A}$的子矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的关联矢量。此定理得证。

**推论3.** 在一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量中至少有$m-1$个零值。

证明：令$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，$\cdots$，与$\boldsymbol{C}_m$是$m$个$\boldsymbol{A}$的子矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的线性独立关联矢量。由此得到新完备$\boldsymbol{B}$-矩阵

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_m] \tag{34}$$

的每一列至少有$m-1$个零值。因此，一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵必须有$m-1$个零值。故推论得证。

**推论4.** 在一个完备的最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵中至少有$m(m-1)$个零值。

**定理7.** 如果在$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中的$\boldsymbol{A}_{q_i m}$是$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中某个矩阵$\boldsymbol{A}_{q_j m}$的子矩阵，此处$q_i>q_j$，那么，$\boldsymbol{A}_{q_j m}$与$\boldsymbol{A}_{q_i m}$的关联$\boldsymbol{B}$矢量不可能两者都包含在任意的最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵中。

证明：令$\boldsymbol{B}_j$与$\boldsymbol{B}_i$分别是$\boldsymbol{A}_{q_j m}$与$\boldsymbol{A}_{q_i m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。由此立即得出$\boldsymbol{A}_{q_j m}$与$\boldsymbol{A}_{q_i m}$具有相同的关联矢量。于是$\boldsymbol{B}_j=\pm\boldsymbol{B}_i$，定理得证。

结果，在计算完备的最优化的$\boldsymbol{B}$-矩阵中，我们可以从集合$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$删去全部具有上述性质的子矩阵。正式地，我们采用递归定义，在$j=1, 2, \cdots$，时

$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})=\{\boldsymbol{A}_{q_j m}$；$\boldsymbol{A}_{q_j m}$在$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中并且在$q_i>q_j$时，在$S(\boldsymbol{A}_{q,m})$中没有$\boldsymbol{A}_{q_i m}$存

* 得到各列的一种列号。

在，使得$\boldsymbol{A}_{qlm}$是$\boldsymbol{A}_{qm}$的一个子矩阵} (35)

显然我们有$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})=S(\boldsymbol{A}_{q,m})$。对于(21)式中给出的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵来说，我们来计算$S^*(\boldsymbol{A}_{33})$

$$S^*(\boldsymbol{A}_{33})=\{\boldsymbol{A}_{33}^1,\ \boldsymbol{A}_{33}^2,\ \boldsymbol{A}_{33}^3,\ \boldsymbol{A}_{33}^4\}, \tag{36}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{33}^1=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-1&5&2\\-1&5&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{33}^2=\begin{bmatrix}0&0&-2\\2&-6&0\\-1&3&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{33}^3=\begin{bmatrix}0&0&-2\\-1&5&2\\-1&5&2\end{bmatrix}\text{与}\boldsymbol{A}_{33}^4=\begin{bmatrix}-2&0&0\\-1&5&2\\-1&5&2\end{bmatrix}。$$

与这些子矩阵$\boldsymbol{A}_{33}^i$的关联矢量$\boldsymbol{C}_3^i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$由下式给出：

$$\boldsymbol{C}_3^1=\begin{bmatrix}1\\0\\1/2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_3^2=\begin{bmatrix}3/2\\1/2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_3^3=\begin{bmatrix}5/2\\1/2\\0\end{bmatrix}\text{与}\boldsymbol{C}_3^4=\begin{bmatrix}0\\-1\\5/2\end{bmatrix} \tag{37}$$

$\boldsymbol{A}_{33}^i$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量$\boldsymbol{B}^i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$可得出如下：

$$\boldsymbol{B}_3^1=\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\2\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3^2=\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3^3=\begin{bmatrix}-5\\-1\\0\\2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\text{与}\boldsymbol{B}_3^4=\begin{bmatrix}0\\2\\-5\\6\\0\\0\\-3\end{bmatrix}, \tag{38}$$

因此，由以下两式来给出集合$S^*(\boldsymbol{A}_{43})$与$S(\boldsymbol{A}_{33})$及其元素的排列次序为：

$$S^*(\boldsymbol{A}_{43})>S^*(\boldsymbol{A}_{33}) \tag{39}$$

与

$$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{A}_{43}^1>\boldsymbol{A}_{43}^2\\ \boldsymbol{A}_{33}^1>\boldsymbol{A}_{33}^2>\boldsymbol{A}_{33}^3>\boldsymbol{A}_{33}^4\end{matrix}\right\} \tag{40}$$

式中$S^*(\boldsymbol{A}_{43})=S(\boldsymbol{A}_{43})$，$S(\boldsymbol{A}_{43})$已在(25)式中给出。因为在$\boldsymbol{B}_3^1$中所有整数的绝对值之和与$\boldsymbol{B}_3^2$中所有整数的绝对值之和相等，所以我们能交换$\boldsymbol{A}_{33}^1$与$\boldsymbol{A}_{33}^2$的次序。但是如果考虑2阶效应的话，因为$\boldsymbol{B}_3^1$与$\boldsymbol{B}_3^2$元素的平方和分别给出为10与12，所以$\boldsymbol{A}_{33}^1$必须排在$\boldsymbol{A}_{33}^2$之后。于是，在排列次序中如果考虑到2阶效应的话，下列的$\boldsymbol{B}$-矩阵是一个与晶体散射电子的平均自由程相关的完备最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵：

$$\begin{bmatrix}0&-3&2\\0&-1&0\\-1&1&-1\\0&0&2\\1&0&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \tag{41}$$

该矩阵已由Happ[8]利用穷举法而得出。差别仅仅在于第二列有关的符号。因为最优化的准则对于各列的符号是模糊的，所以这一点不出所料。因此，所涉及到的各变量之间的函数关系可以得出，并由下式给出：

$$f(k\theta/E,\ E/P^3C, h^2/P^2EM)=0 \tag{42}$$

这一函数关系不能单由量纲分析来确定；它们必须由试验来提供。

在上述例子中我们已经断定(41)式中给出的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵是最优化的。仅当我们能证明每一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量是$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$的某些子矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量时，那么这一论断一般地是成立的。下面我们将证明其正确性。

**定理8.** 每一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量是$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$中的某个矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。

证明：令$\boldsymbol{A}$是一个$n\times m$阶的完备$\boldsymbol{B}$-矩阵，$\boldsymbol{B}_1$是一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量。从推论3我们知道，$\boldsymbol{B}_1$至少包含有$m-1$个零。不失一般性地，我们假设$\boldsymbol{B}_1$的所有零占据$\boldsymbol{B}_1$的头$q$行，式中$q\geqslant m-1$。令$\boldsymbol{E}_{qm}$是$\boldsymbol{A}$的$q\times m$阶(包含$\boldsymbol{A}$的头$q$行)的子矩阵。由此得出$\boldsymbol{E}_{qm}$的秩$r$至多为$m-1$且$q\leqslant q_1$。如果不是这样，相关联的齐次线性方程组仅有一个平凡解，同时这意味着$\boldsymbol{B}_1$是一个零矢量。

如果$q=q_1$，则$r=m-1$且$\boldsymbol{E}_{qm}$是在$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$中。本定理容易地得到满足。如果$q_1>q\geqslant q_2$与$r=m-1$，则$\boldsymbol{E}_{qm}$在$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$中，定理也容易地得到满足。那么假设$q_1>q\geqslant q_2$及$r<m-1$时，我们将指出$\boldsymbol{B}_1$可以从$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$的子矩阵的关联$\boldsymbol{B}$-矢量经线性组合而得到。因此它不可能是一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量。

令$\boldsymbol{\bar{E}}_{qm}$是从$\boldsymbol{A}$删去其头$q$行而得到的一个$(n-q)\times m$阶子矩阵。因为$\boldsymbol{E}_{qm}$的秩为$r$，则在$\boldsymbol{\bar{E}}_{qm}$中有$m-r$行存在，使得把这些行加到$\boldsymbol{E}_{qm}$上而得到的矩阵(记作$\boldsymbol{E}^*$)是$\boldsymbol{A}$中的一个秩为$m$的子矩阵。不失一般性地我们假设由$\boldsymbol{E}^*$的最后$m$行形成的子矩阵$\boldsymbol{M}$是一个$\boldsymbol{E}^*$中的$m$阶非奇异子矩阵。所谓$\boldsymbol{E}^*_{-j}$我们意指从$\boldsymbol{E}^*$中去掉第$j$行而得到的子矩阵。显然，$\boldsymbol{E}^*_{-j}(j=q+1,\ q+2,\ \cdots,\ q+m-r)$是在$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$中的$m-r$阶子矩阵，此处$q_1=q+m-r-1$。令$\boldsymbol{C}^*_{-j}$与$\boldsymbol{B}^*_{-j}$分别是子矩阵$\boldsymbol{E}^*_{-j}$的关联矢量与关联$\boldsymbol{B}$-矢量。由此得到

$$\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{C}^*_{-j}=\boldsymbol{F}_j, \tag{43}$$

此处$\boldsymbol{F}_j$是一个在第$j$个位置上有一个非零元素，其余所有元素为零的一个$(q_1+1)$维矢量。其理由在于$\boldsymbol{C}^*_{-j}$不可能是方程组$\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{X}^*=0$的一个非平凡解。此处$\boldsymbol{X}^*$是一个$m$维矢量。令

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{F}_{q+1},\ \boldsymbol{F}_{q+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{F}_{q+m-r}],\\
&\boldsymbol{C}^*=[\boldsymbol{C}^*_{-(q+1)},\ \boldsymbol{C}^*_{-(q+2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{C}^*_{-(q+m-r)}],\\
&\boldsymbol{B}^*=[\boldsymbol{B}^*_{-(q+1)},\ \boldsymbol{B}^*_{-(q+2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}^*_{-(q+m-r)}]
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

因为$\boldsymbol{F}$的秩为$m-r$，且它是$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^*$的一个子矩阵，由此得到$\boldsymbol{B}^*$的秩也是$m-r$。因此$\boldsymbol{B}^*$的各列是线性独立的，所以$\boldsymbol{C}^*$的各列也是线性独立的。下面我们研究线性齐次方程组$\boldsymbol{E}_{qm}\boldsymbol{X}^*=0$的情况。因为$\boldsymbol{C}^*_{-j}$是该方程组的$m-r$个线性独立解，由此得到$\boldsymbol{E}_{qm}\boldsymbol{X}^*=0$的完备解就是$\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{Y}$，此处$\boldsymbol{Y}$是$(m-r)$维矢量。因为$\boldsymbol{A}$是一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵，则存在一个$m$维矢量$\boldsymbol{Y}_1\neq 0$，使得$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1$。显然，$\boldsymbol{Y}_1$也是$\boldsymbol{E}_{qm}\boldsymbol{X}^*=0$的一个解。因此，存在某个$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^*\neq 0$，使得$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{Y}^*$。因为$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^*$，由此得到

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{Y}^* \tag{45}$$

因此，$\boldsymbol{B}_1$不是一个最优化的$\boldsymbol{B}$-矢量，于是出现矛盾。这一结论连续地应用到$q_i>q\geqslant q_{i+1}$上，$i=2,\ 3,\ \cdots$等情况，将证明唯一的可能性是$r=m-1$。亦即$\boldsymbol{B}_1$必须是$S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$的某个

子矩阵$\boldsymbol{A}_{q,m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。定理得证。

**5.最优化的算法**

基于前面所作的评述，现在我们可以提出一种有效算法，用于产生与一个物理现象有关的量纲矩阵的完备最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵。这一算法还可用来产生所有可能的完备最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵的集合。此方法的步骤如下：

第一步，对于一个给定的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$，由第 3 节中所概括的方法来计算完备 的 $\boldsymbol{B}$-矩阵$\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}$是$n\times m$阶矩阵。

第二步，从$\boldsymbol{A}$产生集合 $S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$，$S^*(\boldsymbol{A}_{q_2m})$，…，并且恰当地排列它们的次序，亦即$q_1>q_2>\cdots$，在大多数情况下，头一两个集合$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$与$S^*(\boldsymbol{A}_{q_2m})$用于我们的目的是足够了。

第三步，计算集合$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$，$S^*(\boldsymbol{A}_{q_2m})$，…的元素的关联矢量。

第四步，计算这些集合$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$，$S^*(\boldsymbol{A}_{q_2m})$，…的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。

第五步，恰当排列$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$元素的次序，亦即如$\boldsymbol{A}^u_{q_1m}$与$\boldsymbol{A}^v_{q_1m}$是$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$的元素，同时$u<v$，那么$\boldsymbol{B}^u_{q_1}$的所有元素的绝对值之和不会大于$\boldsymbol{B}^v_{q_1}$的所有元素的绝对值之和。此处$\boldsymbol{B}^u_{q_1}$与$\boldsymbol{B}^v_{q_1}$分别是$\boldsymbol{A}^u_{q_1m}$与$\boldsymbol{A}^v_{q_1m}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。如果次序不是唯一的话，可以考虑"高阶效应"。但是它们不能充分保证排列次序的唯一性。

第六步，用下列矩阵形式排列集合$S^*(\boldsymbol{A}_{q_1m})$中元素的关联$\boldsymbol{B}$-矢量。

$$[\boldsymbol{B}^1_{q_1},\ \boldsymbol{B}^2_{q_1},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}^1_{q_2},\ \boldsymbol{B}^2_{q_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}^1_{q_3},\ \boldsymbol{B}^2_{q_3},\ \cdots,\ \cdots] \tag{46}$$

第七步，从(46)式(包含尽可能多的左边列)选取一个$m\times n$阶秩为$m$的子矩阵。这个矩阵是一个完备的最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵。我们用下列例子来说明上述方法。

例1.对于一个给定的晶格，用下列变量表示晶格的电阻系数与温度间的关系：长度($L$)，质量($M$)，质子密度($N$)，电荷($Q$)，普朗克常数($h$)，玻尔兹曼常数($k$)，温度($\theta$)，速度($V$)以及电阻系数($P$)。如果长度($L$)，质量($M$)，时间($T$)，电荷($Q$)以及温度($\theta$)选为参考量纲，则这些变量的量纲矩阵$\boldsymbol{D}$由下式给出：

$$\boldsymbol{D}=\begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \\ Q \\ \theta \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} L & M & N & Q & h & k & \theta & V & P \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array} \tag{47}$$

第 1 步，利用第III节中所概述的方法，得到一个类似于(9)式的矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

因此，$\boldsymbol{D}$的一个完备$\boldsymbol{B}$-矩阵由下式给出：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{49}$$

第 2 步，从$\boldsymbol{A}$产生集合$S^*(\boldsymbol{A}_{74})$和$S^*(\boldsymbol{A}_{54})$

$$S^*(\boldsymbol{A}_{74})=\{\boldsymbol{A}_{74}\}\tag{50}$$

以及

$$S^*(\boldsymbol{A}_{54})=\{\boldsymbol{A}_{54}^1,\ \boldsymbol{A}_{54}^2,\ \boldsymbol{A}_{54}^3,\ \boldsymbol{A}_{54}^4,\ \boldsymbol{A}_{54}^5,\ \boldsymbol{A}_{54}^6\},\tag{51}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{74}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{54}^1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&2\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{54}^2=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{54}^3=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{54}^4=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{54}^5=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\0&0&0&2\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{54}^6=\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

第 3 步，$\boldsymbol{A}_{74}$的关联矢量$\boldsymbol{C}_7$，$\boldsymbol{A}^i_{54}$的关联矢量$\boldsymbol{C}^i_5(i=1,\ 2,\ 3,4,\ 5)$由下式给出：

$$\boldsymbol{C}_7=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}^1_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}^2_5=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}^3_5=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}^4_5=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^5_5=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\0\end{bmatrix}\text{以及}\boldsymbol{C}^6_5=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\3\end{bmatrix}\tag{52}$$

第4步，分别计算矩阵$\boldsymbol{A}_{74}$与$\boldsymbol{A}^i_{54}$的关联$\boldsymbol{B}$-矢量$\boldsymbol{B}_7$与$\boldsymbol{B}^i_5$，它们由下式给出

$$\boldsymbol{B}_7=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^1_5=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^2_5=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^3_5=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\2\\-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^4_5=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\\1\\-2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^5_5=\begin{bmatrix}0\\-3\\1\\0\\3\\0\\0\\-3\\0\end{bmatrix}\text{以及}\boldsymbol{B}^6_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\6\\-3\\0\\0\\0\\3\end{bmatrix},\tag{53}$$

第 5 步，因为$\boldsymbol{B}^i_5(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$的所有元素绝对值之和分别给出为4，5，5，5，10，13。子矩阵$\boldsymbol{A}^2_{54}$，$\boldsymbol{A}^3_{54}$与$\boldsymbol{A}^4_{54}$的次序可任意排列。注意在现在的情况下高阶效应未造成附加约束。为方便起见，令

$$\boldsymbol{A}^1_{54}>\boldsymbol{A}^2_{54}>\boldsymbol{A}^3_{54}>\boldsymbol{A}^4_{54}>\boldsymbol{A}^5_{54}>\boldsymbol{A}^6_{54}\tag{54}$$

第 6 步，把集合$S^*(\boldsymbol{A}_{74})$与$S^*(\boldsymbol{A}_{54})$的元素的关联$\boldsymbol{B}$-矢量用下列矩阵形式排列：

$$[\boldsymbol{B}_7,\ \boldsymbol{B}^1_5,\ \boldsymbol{B}^2_5,\ \boldsymbol{B}^3_5,\ \boldsymbol{B}^4_5,\ \boldsymbol{B}^5_5,\ \boldsymbol{B}^6_5]\tag{55}$$

第 7 步，因为$\boldsymbol{B}_7$，$\boldsymbol{B}^1_5$，$\boldsymbol{B}^2_5$与$\boldsymbol{B}^3_5$是线性独立的，由此知由这些列所形成的矩阵是$\boldsymbol{D}$的最优化 $\boldsymbol{B}$- 矩阵。从简短叙述的讨论，不难看出，从$\boldsymbol{A}$能产生唯一的完备最优化$\boldsymbol{B}$-矩阵——其各列得到一种符号与编排方式。

因此晶格电导率与温度之间的一般关系可写成如下形式：

$$f(L^3N,\ LMV/h,\ MV^2/k\theta,\ Q^2P/Lh)=0 \tag{56}$$

因此，独立变量数从原先 9 个简化到 4 个。这在设计一个实验并确定所要求的函数时是一个很大的优点。

至今，我们仅仅已经研究了一个完备的最优化 $\boldsymbol{B}$- 矩阵的产生问题。不难看出如果 $S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$ 的各元素的线性独立的关联 $\boldsymbol{B}$-矢量数恰好是 $m$，则该算法得到的是一个完备的最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵。加之如 $S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$ 的各元素的排列次序是唯一的，那么由最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵的各列的列号与排列方式所决定的完备最优化的 $\boldsymbol{B}$-矩阵也是唯一的。另一方面，如果排列次序不是唯一的话，对于每一种排列次序来说该算法会得到一个完备的最优化 $\boldsymbol{B}$- 矩阵。显然，这些完备的最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵在各列的符号与各列的排列方式上可以是不同的。

下面，我们来考虑 $S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$ 的元素线性独立关联 $\boldsymbol{B}$-矢量的数目小于 $m$，但是 $S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$ 与 $S^*(\boldsymbol{A}_{q,m})$ 的线性独立的关联 $\boldsymbol{B}$-矢量的数目恰好是 $m$ 的情况。再次地，如果这种排列次序是唯一的，仅能得到一个与给定量纲矩阵相关的完备最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵。如果不是这样，则对于每一种排列次序该算法得到一个完备的最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵。作为一个示例，研究一下(54)式中 $S^*(\boldsymbol{A}_{6,4})$ 的元素的排列次序情况。因为 $\boldsymbol{A}^2_{5,4}$，$\boldsymbol{A}^3_{5,4}$ 与 $\boldsymbol{A}^4_{5,4}$ 可用 6 种不同方法排列，因此有 6 种完备的最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵，但是在一种符号与排列方式时没有两种情况出现，因此有一个且仅有一个 $\boldsymbol{D}$ 的完备最优化 $\boldsymbol{B}$-矩阵。

## 结　论

已经给出了量纲分析的基本代数性质。已经证明了与一个物理现象有关的变量无量纲乘积的集合相对于参考量纲的选取是不变的。因此，在计算一个完备的无量纲乘积中，可以对现有问题采取任何一组合适的量纲作为参考量纲。

一旦选取了一组参考量纲，与一个物理现象有关的量纲矩阵可以很容易地建立起来。产生一个完备的无量纲乘积等价于从一个量纲矩阵来计算一个完备的 $\boldsymbol{B}$-矩阵。为此目的，已经提出了一种简单与系统化的方法。

一般说来，完备的无量纲乘积集合不是唯一的，可以加上一些附加的约束。为了简化与无量纲乘积有关的公式并提供建立无量纲显式集合的方法，定义了最优化准则。利用这些准则，讨论了完备的最优化无量纲矩阵的代数性质，基于这些性质，给出了产生与一个物理现象有关的完备最优化无量纲集合的有效算法。这一算法还可以用来产生最优化无量纲乘积的所有完备集的集合，因为前节末尾的论断一般说来也是成立的。

值得提到的是我们已经将我们的优化方法运用到 Happ[8,15]所研究的所有现象中。我们发现他的两个完备“最优化”$\boldsymbol{B}$ 实际上不是最优化的，因为正如我们早先所提到，他的结果是利用一定的整数范围的穷举法而得出的。

基于本文所提出的算法，现在有一个量纲分析的计算机程序可供使用，它可以从乔治亚，阿坦斯，乔治亚大学COSMIC检索编目中查得。

**致谢**（略）

## 参 考 文 献

〔1〕H. L. Langhaar, "Dimensional Analysis and Theory of Models"; New York; John wiley; 1951.

〔2〕P. W. Bridgman, "*Dimensional Analysis*"; New Haven; Conn. Yale Univ. Press; 1922;

[3] H. E. Huntley, "Dimensional Analysis"; New York; Dover, 1967.
[4] L. I. Sedov, "Similarity and Dimensional Methods in Mechanics", New York; Academic Press, 1959.
[5] T. J. Higgins, "Electroanalogic methods", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 10; pp. 331-335; 1957.
[6] J. J. Higgins, "Electroanalogic methods", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 10, pp. 443-448; 1957.
[7] A. D. Sloan and W. W. Happ; "Literature search:dimensional analysis"; *NASA Rept. ERC/CQD* 68-631, Aug. 1968.
[8] W. W. Happ, "Computer-oriented procedures for dimensional analysis"; *J. appl. Phys.*; Vol. 38; pp. 3918-3926, 1967.
[9] E. Buckingham; "On physically similar systems;illustrations of the use of dimensional equations", *Phys. Rev.*, Vol. 4, pp. 345-376, 1914.
[10] E. R. Van Driest; "On dimensional analysis and the presentation of data in fluid-flow problems"; *J. appl. Mech.*; Vol. 13; pp. A-34-A-40; 1946.
[11] D. Pedoe, "A Geometric Introduction to Linear Algebra"; New York; John wiley; pp. 126-128, 1963.
[12] A. D. Sloan and W. W. Happ, "Matrix methods of dimensional analysis", *NASA Rept. ERC/CQD* 68-623, Sept. 1968.
[13] F. R. Gantmacher; "The Theory of Matrices", New York; Chelsea, 1960.
[14] W. Shockley; "Electrons and Holes in Semiconductors", Princeton, N. J.; D. Van Nostrand; p. 278, 1950.
[15] A. D. Sloan and W. W. Happ, "Computer program for dimensional analysis", *NASA Rept. ERC/CQD* 68-621; Aug. 1968.
[16] P. Moon and D. E. Spencer; "A modern approach to dimensions"; *J. Franklin Inst.*; Vol. 248, pp. 495-521, 1949.
[17] W. W. Happ, "Dimensional analysis of semiconductor phenomena and devices", *proc. of the XIII Rassegna Internazionale Elettronica e Nucleare*, Rome, Italy, pp. 25-42; June 1966.
[18] H. L. Langhaar; "A summary of dimensional analysis"; *J. Franklin Inst.*, Vol. 242; pp. 459-463, 1946.
[19] J. C. Decius, "Dimensional analysis: an approach from transformation theory and a criterion for scaling model experiments"; *Ibid.*; Vol. 245; pp. 379-387; 1948.
[20] S. Corrsin, "A simple geometrical proof of Buckingham's $\pi$-theorem"; *Am. J. Phys.*; Vol. 19; pp. 180-181, 1951.
[21] L. Brand; "The pi-theorem of dimensional analysis", *Am. Math. Monthly*, Vol. 59, p. 516; 1952.
[22] M. V. Kirpichev; "Dimensional analysis"; *Izv. Akad. Nauk; Otd. Tekh. Nauk*, No. 9, pp. 1930-1940, 1953.
[23] S. Drobot, "On the foundations of dimensional analysis", *Studia Math.*; Vol. 14; pp. 84-99, 1953.
[24] G. Birkhoff, "Dimensional analysis and partial differential equations"; *Elec. Engng*, Vol. 67; pp. 1185-1188, 1948.
[25] W. Luchsinger, "Dimensional analysis"; *Brown Boveri Rev.*, pp. 175-180; Sept. 1940.

# 第三部分　宽带匹配理论和相容性阻抗问题

# 二十一、设计传输型功率放大器的显式公式


摘　要

本文给出设计具有任意阶的巴特沃思和切比雪夫传输功率增益特性的最佳传输型功率放大器的显式公式。把这些放大器的设计简化为简单的算术运算，且用数字例子说明了这些方法。


## 1.引言

随着单口有源器件、诸如隧道二极管或称为$E_{saki}$二极管的最新研制，负阻放大器的设计具有实用意义。一种极为有用的结构称为传输型放大器，在这种结构中，由一个$C$法拉的电容器和一个$-R$欧姆的电阻器并联组成有源阻抗，通过一个无损耗双口网络进行均衡，如图1所示。在图1($a$)中有源阻抗与负载相并联，而在图1($b$)中，有源阻抗与信号源并联。这些配置方式之所有具有吸引力是在于，它们便于这种放大器的设计仅仅需在用简单的直流偏置供电下用一个或两个变压器即可。

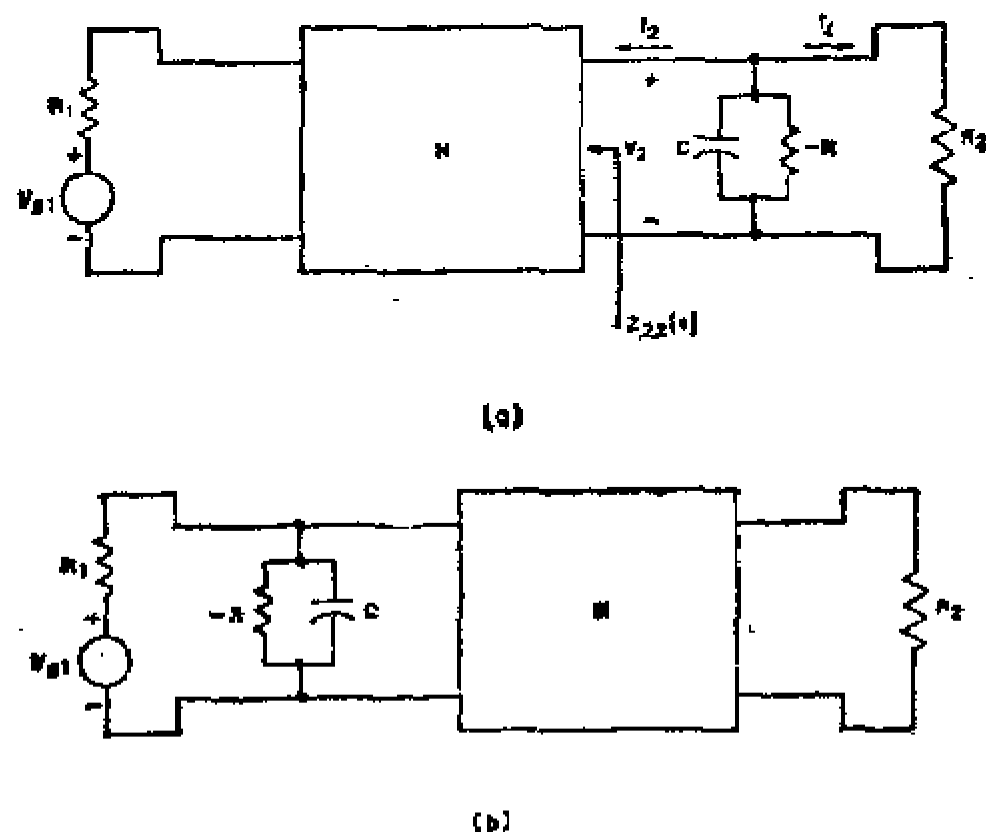


图1　(a)有源阻抗与负载并联的传输型功率放大器的一般结构。
($b$)有源阻抗与信号源并联的传输型功率放大器的一般结构

许多作者[1—9]已研究了最佳传输型功率放大器的得到其最大增益-带宽乘积的问题和综合方法。对任意可实现的传输型功率增益特性的增益带宽制约关系，Youla和Smilen[9]给

出了完整和系统的计算和设计方法，他们也导出了任意阶的巴特沃思和切比雪夫增益特性的精确公式。在2阶和3阶巴特沃思增益响应的情况下，Sard[4]已详细地研究了无损耗匹配梯形网络元件值的显式公式。

本文的目的是在于指出，基于复数归一化散射矩阵的原理和运用Takahasi[10]和Green[11]所导出的低通梯形网络显式公式，可以得到具有任意阶巴特沃思或切比雪夫传输功率-增益特性的最佳传输型功率放大器的元件值的显式公式，从而推广和扩展了Sard[4]的结果。这一公式避免了把网络的输入阻抗表示为两个多项式之比，然后再利用辗转相除法将其展成连分式的繁杂过程。因而，它们把放大器的设计简化为简单的算术运算。

**2.增益公式的推导**

如图1所示，有两种可能的有源网络的结构。因为匹配网络是互易的，显然，对于一种结构的分析，用必要的修正可等价地应用到另一种结构上。所以，我们详细地选取图1($a$)的结构进行研究，而暂不考虑另一种结构。

在图1($a$)中，负载电阻$R_2$和有源阻抗的并联组合可用一个等效网络(由一个$C$法拉的电容器和一个$-\alpha R_2$欧姆的电阻器所组成)来代替，其阻抗为：

$$\tilde{z}_2(s)=\frac{-\alpha R_2}{-\alpha R_2 Cs+1}, \tag{1}$$

其中

$$\alpha=\frac{R}{R_2-R} \tag{2}$$

其修正的等效网络示于图2。为了叙述无损耗的匹配网络$N$，令

$$S(s)=[S_{ij}] \tag{3}$$

是归一化到严格无源阻抗$R_1$和下列阻抗$z_2(s)$上的散射矩阵，

$$z_2(s)=\frac{|\alpha|R_2}{|\alpha|R_2 Cs+1} \tag{4}$$

决定于$R$和$R_2$的相对值，$-\alpha R_2$的值可以为正或为负，其每一种情况在一节中分别研究。

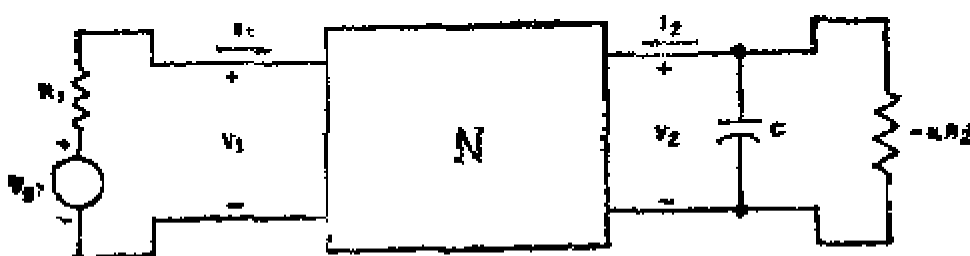



图2 图1(a)网络的等效表示

**2.1 $R_2>R$时的传输功率增益**

在这种情况下，$\alpha$为正值且$\tilde{z}_2(s)$和$z_2(s)$建立下列关系：

$$-z_2(-s)=\tilde{z}_2(s) \tag{5}$$

当图2的输出端口接以$-z_2(-s)$时，从所熟悉的散射参数的性质，在输出端口的归一化的反射波$b_2(s)$恒为零[12,13]。在这一情况下，入射波$a_1(s)$和$a_2(s)$可表示为：

$$0=S_{21}(s)a_1(s)+S_{22}(s)a_2(s), \tag{6}$$

$$a_2(s)=\frac{1}{2}h_2^{-1}(s)[V_2(s)-z_2(s)I_2(s)]=h_2(-s)I_2(s), \tag{7}$$

其中

$$V_2(s)=z_2(-s)I_2(s), \tag{8}$$

$$a_1(s)=\frac{1}{2}V_{g1}(s)/R_1^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$h_2(s)h_2(-s)$是基准阻抗$z_2(s)$的准埃尔米特部分。从以上各式中消去变量$a_1(s)$和$a_2(s)$得到：

$$I_2(s)=-\frac{V_{g1}(s)S_{21}(s)}{2R_1^{\frac{1}{2}}h_2(-s)S_{22}(s)} \tag{10}$$

其中

$$h_2(s)=\frac{(\alpha R_2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha R_2Cs+1} \tag{11}$$

再参看图1(a)所示的放大器，传输功率增益定义为：

$$G(\omega^2)=\frac{|I_l(j\omega)|^2R_2}{|V_{g1}(j\omega)|^2/4R_1}, \tag{12}$$

其中电流$I_l(s)$可由下列关系用$I_2(s)$表示为

$$\begin{aligned}I_l(s)&=-I_2(s)-(Cs-1/R)V_2(s)\\&=-\alpha I_2(s)/(\alpha R_2Cs-1)\end{aligned} \tag{13}$$

把这些公式代入(12)式得到所要求的传输功率增益：

$$G(\omega^2)=\alpha\left[\frac{1}{|S_{22}(j\omega)|^2}-1\right],\quad \alpha>0 \tag{14}$$

我们看出增益公式(14)与Youla和Smilen所导出的公式相同。差别仅仅在于在(14)式中输出反射系数是归一化到$z_2(s)$上，而在Youla和Smilen的情况下它是归一化到负载电阻$R_2$上。

### 2.2 $R_2<R$时的传输功率增益

在这种情况下，$\alpha$为负值且$\tilde{z}_2(s)=z_2(s)$是一个严格无源的阻抗，它也是输出端口的归一化阻抗。当输出端口接以基准阻抗$z_2(s)$时，从熟悉的散射参数的特性所知，在输出端口的归一化的入射波$a_2(s)$恒为零。在这种情况下，我们有

$$b_2(s)=S_{21}(s)a_1(s), \tag{15}$$

$$b_2(s)=\frac{1}{2}h_2^{-1}(-s)[V_2(s)-z_2(-s)I_2(s)]=-h_2(s)I_2(s), \tag{16}$$

其中

$$V_2(s)=-z_2(s)I_2(s) \tag{17}$$

把这些结果合并且连同(9)式一起便得出：

$$I_2(s)=-\frac{S_{21}(s)V_{g1}(s)}{2R_1^{\frac{1}{2}}h_2(s)} \tag{18}$$

因为在目前的情况下，(12)和(13)式仍然成立，这就导致所要求的放大器的传输功率增益公式为：

$$G(\omega^2)=|\alpha||S_{21}(j\omega)|^2=|\alpha|[1-|S_{22}(j\omega)|^2] \tag{19}$$

上式的第二行是从下列事实得到，即匹配网络$N$是无损耗的，故其散射矩阵$S(j\omega)$必须是酉阵。因此，为了在一感兴趣的频带内设计一个具有预给传输功率增益特性的最佳放大器，我们必须在相同的频带内使$N$的反射系数$S_{22}(j\omega)$的幅值为最小。但是$|S_{21}(j\omega)|$和$|S_{22}(j\omega)|$以1为

界，这意味着放大器先天性地不能有高增益。我们注意到，正与前面的情况一样，(19)式与Youla和Smilen[9]导出的公式相同，差别仅在于$S_{22}(s)$的归一化阻抗。

正如Youla和Smilen[9]所指出，在目前情况下可利用增大负载电阻来增加其放大量。虽然某些有用功率耗费在衬垫电阻器上，但仍然比未加衬垫电阻器之前有较多的功率传输给负载。为了实现这一点，把一个足够大的电阻器与$R_2$串联，使得

$$R_2+R_0=R_2''>R \tag{20}$$

定义

$$\alpha''=\frac{R}{R_2''-R} \tag{21}$$

因此放大器的传输功率增益变为：

$$G(\omega^2)=\alpha''\frac{R_2}{R_2''}\left[\frac{1}{|S_{22}(j\omega)|^2}-1\right], \tag{22}$$

本质上它与(14)式所给的公式相同。因此，在下面，我们将研究负载电阻总大于$R$的情况。

**3. 最大平坦低通放大器的显式公式**

研究$n$阶低通巴特沃思传输功率增益特性

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}},\quad K_n\geq 1, \tag{23}$$

式中$\omega_c$是3分贝带宽(以弧/秒计)。把(23)式代入(14)式，求解$|S_{22}(j\omega)|^2$，且经解析延拓后得到：

$$S_{22}(s)S_{22}(-s)=\hat{K}_n^{-1}\frac{1+(-1)^n y^{2n}}{1+(-1)^n x^{2n}}, \tag{24}$$

其中

$$\hat{K}_n=1+K_n/\alpha, \tag{25}$$

$$y=s/\omega_c, \tag{26}$$

$$x=\hat{K}_n^{-1/2n}s/\omega_c \tag{27}$$

因为，要使放大器稳定，反射系数$S_{22}(s)$必须在闭右半复频平面内无极点和零点，令$S_{22}(s)$是(24)式的唯一的最小相位因式分解，且此表达式可显式地表示为：

$$S_{22}(s)=-\hat{K}_n^{-\frac{1}{2}}\frac{p(y)}{p(x)}, \tag{28}$$

$p(s)$是由方程$1+(-1)^n s^{2n}=0$的开左半复频平面零点而构成的霍尔维茨多项式，其首项系数为1。

归一化的输出反射系数$S_{22}(s)$和在匹配网络输出端口的输入阻抗$Z_{22}(s)$的关系为：

$$S_{22}(s)=\frac{h_2(s)}{h_2(-s)}\,\frac{Z_{22}(s)-z_2(-s)}{Z_{22}(s)+z_2(s)} \tag{29}$$

把(4)，(11)和(28)式代入(29)式且求解$Z_{22}(s)$，得到

$$Z_{22}(s)=\frac{-\alpha R_2[1+S_{22}(s)]}{\alpha R_2Cs[1+S_{22}(s)]-[1-S_{22}(s)]}, \tag{30}$$

或等价为

$$\frac{\alpha R_2}{Z_{22}(s)} = -\frac{p(y)+\hat{K}_n^{\frac{1}{2}}p(x)}{p(y)-\hat{K}_n^{\frac{1}{2}}p(x)} - \alpha R_2 C s \tag{31}$$

正如Takahasi[10]所说明，(31)式右边的第一项可以显式地表示成连分式的形式，且给出为：

$$\frac{p(y)+\hat{K}_n^{\frac{1}{2}}p(x)}{p(y)-\hat{K}_n^{\frac{1}{2}}p(x)} = \hat{C}_1 s + \cfrac{1}{\hat{L}_2 s + \cfrac{1}{\hat{C}_3 s + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\hat{H}}}}}, \tag{32}$$

上式中除了最后一个是实常数$\hat{H}$外，所有的系数均为$\hat{C}_i$和$\hat{L}_i$的形式，其中：

$$\hat{C}_1 = \frac{2\sin\gamma_1}{(1-\delta)\omega_c}, \tag{33}$$

$$\hat{C}_{2m-1}\hat{L}_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m-2}+\delta^2)}, \tag{34}$$

$$\hat{C}_{2m+1}\hat{L}_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2)} \tag{35}$$

$m=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}n\right]$，其中$\left[\frac{1}{2}n\right]$为不大于$\frac{1}{2}n$的最大整数，且

$$\delta = (1+K_n/\alpha)^{1/2n}, \tag{36}$$

$$\gamma_m = m\pi/2n \tag{37}$$

常数导纳$\hat{H}$可直接从(32)式、且令$s=0$以及借助于$p(0)=1$的这一事实来确定，这就得到：

$$\hat{H} = \left(\frac{1-\delta^n}{1+\delta^n}\right)^{\pm1}, \tag{38}$$

±号分别根据$n$为奇数或偶数来确定。最末一个电抗元件可由下列公式来确定：

$$\hat{C}_n = \frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)\hat{H}\omega_c}, \qquad n\text{为奇数} \tag{39}$$

或

$$\hat{L}_n = \frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)\hat{H}\omega_c}, \qquad n\text{为偶数} \tag{40}$$

可以看出，因为$\delta>1$，故在展开式(32)中所有的系数均为负值。把(32)式代入(31)式得到一个连分式的展开式，除了有一项$-\hat{C}_1-\alpha R_2 C$外，所有系数均是正实数。但是，系数$K_n$在此仍未确定。从(33)和(36)式，我们可看出对预给带宽来说，$\hat{C}_1$是$\hat{K}_n$的函数。我们的目的是在下列约束下

$$-\hat{C}_1-\alpha R_2 C \geqslant 0 \tag{41}$$

使直流增益$K_n$为最大，把(33)式代入(41)式连同(36)式一起，且解得$K_n$，从而得出可达的最大值

$$K_{n\max} = \alpha\left[\left(1+\frac{2\sin\pi/2n}{\alpha R_2 C\omega_c}\right)^{2n}-1\right], \tag{42}$$

上式和基于Bode的输出反射系数[14]的基本整数约束与Youla和 Smilen[9]导出的结果一致。利用这一最佳的$K_n$，(31)式可以看成是终端接一个电阻器的无损耗梯形网络。参看图3，图1的无损耗匹配梯形网络$N$的元件值可用下列显式公式进行计算：

$$C_0 = C, \tag{43}$$

$$C_{2m-2}L_{2m-1} = \frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m-2}+\delta^2)}, \quad m \leqslant \left[\frac{1}{2}n\right], \tag{44}$$

$$C_{2m}L_{2m-1} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2)}, \quad m < \left[\frac{1}{2}n\right], \tag{45}$$

其中 $m = 1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{2}n\right]$；且

$$C_{n-1} = \frac{2(\delta^n+1)\sin\gamma_1}{\alpha R_2(\delta^n-1)(\delta+1)\omega_c}, \quad n\text{为奇数} \tag{46}$$

$$L_{n-1} = \frac{2\alpha R_2(\delta^n-1)\sin\gamma_1}{(\delta^n+1)(\delta+1)\omega_c}, \quad n\text{为偶数} \tag{47}$$

图3中的理想变压器的匝比由下式确定：

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\left[\frac{R_1(\delta^n+1)}{\alpha R_2(\delta^n-1)}\right]} \tag{48}$$

例1

要求设计一个具有最大平坦传输功率增益特性的最佳传输功率放大器，放大器终端接90Ω和500Ω的电阻器，预给的通带增益在10MHz时至少必须是36dB。

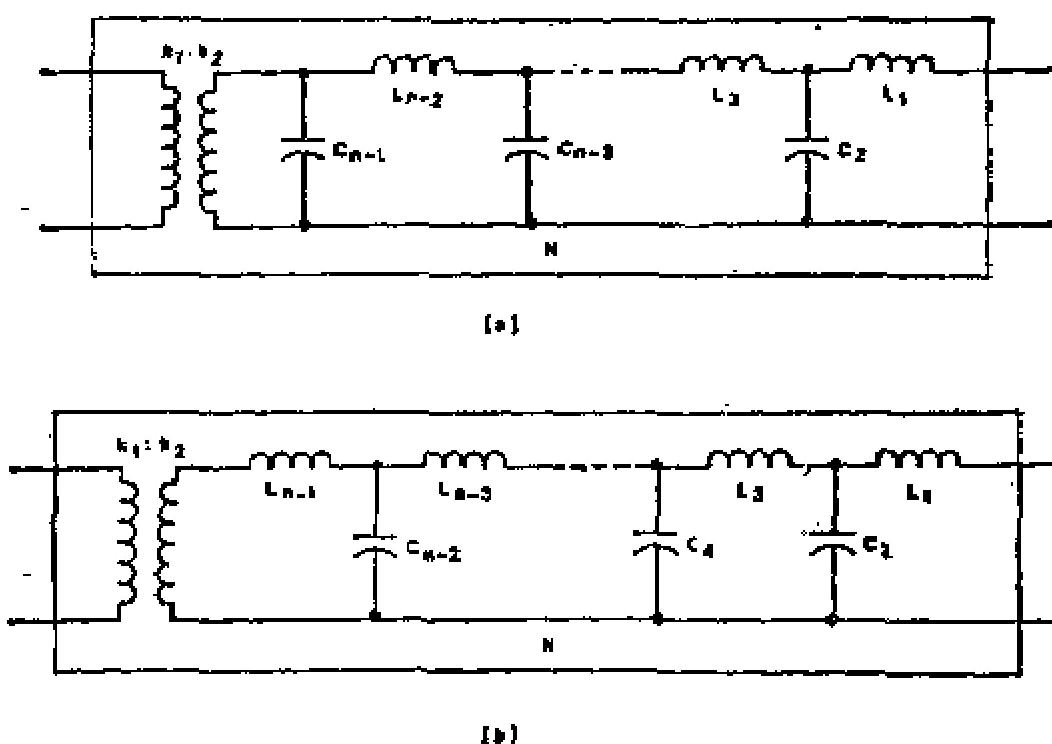


图3 具有预给巴特沃思和切比雪夫传输功率增益特性的无损耗匹配网络$N$，(a)$n$为奇数；(b)$n$为偶数

作为单口有源器件，采用具有下列一组参数的隧道二极管：

$$-R = -143\Omega, \quad C = 7\text{pF} \tag{49}$$

从上述技术要求，我们有：

$$\begin{aligned} &R_1 = 90\Omega, \quad R_2 = 500\Omega, \\ &\omega_c = 2.51328\times10^8\,\text{rad/sec}, \\ &\alpha = 0.40056, \quad \alpha R_2 = 200.28 \end{aligned} \tag{50}$$

因为在巴特沃思响应中，在带通内的最大偏差是3dB，所以所需的直流增益至少必须是39dB。令$n=5$且从(42)式我们计算其可达最大值：

$$K_5 = 0.40056\left[\left(1+\frac{2\sin 18^\circ}{200.28\times 7\times 10^{-12}\times 2.51328\times 10^8}\right)^{10}-1\right]$$

$$=0.40056[(2.75404)^{10}-1]=10,054 \text{ 或 } 40\text{ dB} \tag{51}$$

从(36)式我们算得

$$\delta=(1+10,054/0.40056)^{\frac{1}{10}}=2.75404 \tag{52}$$

所要求的梯形网络元件值可直接利用(43)—(47)式计算如下：

$$L_1=\frac{4\sin 18^\circ \sin 54^\circ}{6.31658\times 10^{18}\times 7\times 10^{-12}(1-5.50805\cos 36^\circ+7.58474)}$$

$$=0.54781\mu\text{H}, \tag{53}$$

$$C_2=\frac{4\sin 54^\circ \sin 90^\circ}{0.54781\times 10^{-6}\times 6.31658\times 10^{18}(1-5.50805\cos 72^\circ+7.58474)}$$

$$=13.588\text{pF}, \tag{54}$$

$$L_3=\frac{4\sin 90^\circ \sin 126^\circ}{13.588\times 10^{-12}\times 6.31658\times 10^{18}(1-5.50805\cos 108^\circ+7.58474)}$$

$$=0.36652\mu\text{H}, \tag{55}$$

$$C_4=\frac{4\sin 126^\circ \sin 162^\circ}{0.36652\times 10^{-6}\times 6.31658\times 10^{18}(1-5.50805\cos 144^\circ+7.58474)}$$

$$=3.31231\text{pF} \tag{56}$$

理想变压器的匝比利用(48)式计算，

$$\frac{k_1}{k_2}=\sqrt{\left\{\frac{90[(2.75404)^5+1]}{200.28[(2.75404)^5-1]}\right\}}=\frac{1}{1.48} \tag{57}$$

作为另一种方法，$C_4$可以从(46)式计算，从而得到：

$$C_4=\frac{2(158.43503+1)\sin 18^\circ}{200.28(158.43503-1)(2.75404+1)2.51328\times 10^8}$$

$$=3.31223\text{pF}, \tag{58}$$

它在满意的计算精度之内。

**4.低通等波纹放大器的显式公式**

研究$n$阶低通切比雪夫变换器之功率增益特性：

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)},\quad K_n\geq 1, \tag{59}$$

其中$\varepsilon<1$和$C_n(\omega)$为$n$阶切比雪夫多项式。像以前那样处理，我们有

$$S_{22}(s)S_{22}(-s)=K_n^{-1}\frac{1+\varepsilon^2 C_n^2(-jy)}{1+\hat{\varepsilon}^2 C_n^2(-jy)}, \tag{60}$$

其中

$$\hat{\varepsilon}=K_n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, \tag{61}$$

$y$和$K_n$与(26)和(25)式中的相同。如以前那样，$S_{22}(s)$是(60)式的最小相位因式分解，且可显式地表示为：

$$S_{22}(s)=-\frac{q(y)}{\hat{q}(y)}, \tag{62}$$

其中$q(y)$和$\hat{q}(y)$是霍尔维茨多项式，其首项系数为1。把(4)，(11)和(62)式代入(29)式，且解出$Z_{22}(s)$得到：

$$\frac{\alpha R_2}{Z_{22}(s)} = -\left[\frac{q(y)+\hat{q}(y)}{q(y)-\hat{q}(y)} + \alpha R_2 C s\right] \tag{63}$$

正如Takahasi[10]所指出，在(63)式括号中第一项可以显式地展成连分式的形式，如(32)式的左边所示，其系数为：

$$\hat{C}_1 = \frac{2\sin\gamma_1}{\omega_c(\sinh a - \sinh\hat{a})}, \tag{64}$$

$$\hat{C}_{2m-1}\hat{L}_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2 f_{2m-1}(\sinh a, \sinh\hat{a})}, \tag{65}$$

$$\hat{C}_{2m+1}\hat{L}_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a, \sinh\hat{a})} \tag{66}$$

$m=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}n\right]$；其中

$$a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{67}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\hat{\varepsilon}}, \tag{68}$$

$$f_m(\sinh a, \sinh\hat{a}) = \sinh^2 a + \sinh^2\hat{a} + \sin^2\gamma_{2m} - 2\sinh a\sinh\hat{a}\cos\gamma_{2m} \tag{69}$$

象巴特沃思响应中那样，最末一个电抗元件值可由下式确定：

$$\hat{C}_n = \frac{2\sin\gamma_1}{\omega_c(\sinh a + \sinh\hat{a})\hat{H}}，\ n\text{为奇数} \tag{70}$$

或

$$\hat{L}_n = \frac{2\sin\gamma_1}{\omega_c(\sinh a + \sinh\hat{a})\hat{H}}，\ n\text{为偶数} \tag{71}$$

利用在连分式中$s=0$，实系数$\hat{H}$可利用下列公式直接进行计算：

$$\hat{H} = -\frac{\varepsilon\sinh\beta - 1}{\varepsilon\sinh\beta + 1}, \qquad n\text{为奇数} \tag{72}$$

$$\hat{H} = -\frac{\varepsilon\cosh\beta + (1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon\cosh\beta - (1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad n\text{为偶数} \tag{73}$$

其中

$$\beta = n\sinh^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{2\sin\gamma_1}{\alpha R_2 C\omega_c}\right] \tag{74}$$

再次地，如同巴特沃思响应中那样，因为$\hat{a}>a$，所有各个系数$\hat{C}$，$\hat{L}$，$\hat{H}$均为负值。我们的目的是使受下列方程所支配的常数$K_n$为最大。

$$-\hat{C}_1 - \alpha R_2 C \geqslant 0 \tag{75}$$

把(64)式代入(75)式，连同(25)，(51)，(67)，和(68)式一起再求解$K_n$，可得到其最大值：

$$K_{n\max} = \alpha\left[\!\left[\varepsilon^2\sinh^2\left\{n\sinh^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{2\sin\pi/2n}{\alpha R_2 C\omega_c}\right]\right\} - 1\right]\!\right], \tag{76}$$

上式与Youla和Smilen[9]所导出的结果一致。利用最佳的$K_n$，(63)式可看成是一个终端接一个电阻器的无损耗梯形网络。参看图3，梯形网络$N$的元件值可利用下列显式公式进行计算：

$$C_0 = C, \tag{77}$$

$$C_{2m-1}L_{2m-1} = \frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2 f_{2m-1}(\sinh a,\sinh \hat{a})}, \quad m\leqslant[\frac{1}{2}n], \tag{78}$$

$$C_{2m}L_{2m-1} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a,\sinh \hat{a})}, \quad m<[\frac{1}{2}n], \tag{79}$$

其中$m=1,2,\cdots,[\frac{1}{2}n]$；和

$$C_{N-1} = \frac{2(\varepsilon\sinh\beta+1)\sin\gamma_1}{aR_2(\varepsilon\sinh\beta-1)(\sinh a+\sinh\hat{a})\omega_c}, \quad n\text{为奇数} \tag{80}$$

$$L_{N-1} = \frac{2aR_2[\varepsilon\cosh\beta-(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}]\sin\gamma_1}{\omega_c[\varepsilon\cosh\beta+(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}](\sinh a+\sinh\hat{a})}, \quad n\text{为偶数} \tag{81}$$

最后，图3中的理想变压的匝比可由下式确定：

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\left[\frac{R_1(\varepsilon\sinh\beta+1)}{aR_2(\varepsilon\sinh\beta-1)}\right]}, \quad n\text{为奇数} \tag{82}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{R_1[\varepsilon\cosh\beta+(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}]}{aR_2[\varepsilon\cosh\beta-(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}]}\right\}}, \quad n\text{为偶数} \tag{83}$$

我们将用下列例子来说明上述结果。

例2.

研究与例1相同的问题，只不过现在我们要求获得一个传输功率特性为等波纹的特性。为便于比较，我们选取$n=5$，且令带通容差在$3dB$之内，它相应于具有波纹因子$\varepsilon=0.9976$。

我们首先从(76)式计算可达的最大$K_5$值，得到：

$$K_{5\max} = 0.40056\left[\left(0.9976^2\sinh^2\left\{5\sinh^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{5}\sinh^{-1}1.002\right)\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\frac{2\sin18°}{200.28\times7\times10^{-12}\times2.51328\times10^{8}}\right]\right\}-1\right]$$
$$=134,613 \quad \text{或} \quad 51.29\text{dB}. \tag{84}$$

从(25)，(61)，(67)和(68)式我们得到：

$$\hat{K}_t = 1+134,613/0.40056 = 336,063, \tag{85}$$

$$\hat{\varepsilon} = 0.9976/(336,063)^{\frac{1}{2}} = 0.001721, \tag{86}$$

$$a = \frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.9976} = 0.1766, \tag{87}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.00172} = 1.4115 \tag{88}$$

所要求的无损耗匹配梯形网络$N$的元件值可利用(77)—(79)式而直接计算如下：

$$L_1 = \frac{4\sin18°\sin54°}{6.31658\times10^{16}\times7\times10^{-12}f_1(\sinh0.1766,\sinh1.4115)}$$
$$=0.63808\mu\text{H}, \tag{89}$$

$$C_2 = \frac{4\sin54°\sin90°}{6.31658\times10^{16}\times0.63808\times10^{-3}f_2(\sinh0.1766,\sinh1.4115)}$$
$$=18.059\text{pF}, \tag{90}$$

$$L_3 = \frac{4\sin 90^\circ \sin 126^\circ}{6.31658\times 10^{18}\times 18.059\times 10^{-12} f_3(\sinh 0.1766, \sinh 1.4115)}$$

$$= 0.58261\mu\text{H}, \tag{91}$$

$$C_4 = \frac{4\sin 126^\circ \sin 162^\circ}{6.31658\times 10^{18}\times 0.58261\times 10^{-6} f_4(\sinh 0.1766, \sinh 1.4115)}$$

$$= 5.8404\text{pF} \tag{92}$$

作为另一种方法，$C_4$可从(80)式算得为：

$$C_4 = \frac{2(0.9976\sinh 7.063+1)\sin 18^\circ}{200.28(0.9976\sinh 7.063-1)(\sinh 0.1766+\sinh 1.4115)2.51328\times 10^9}$$

$$= 5.841\text{pF}, \tag{93}$$

其中

$$\beta = 5\sinh^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.9976}\right)+\frac{2\sin 18^\circ}{200.28\times 7\times 10^{-12}\times 2.51328\times 10^9}\right]$$

$$= 7.063 \tag{94}$$

理想变压器的匝比由(82)式确定，且为：

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\left[\frac{90(0.9976\sinh 7.063+1)}{200.28(0.9973\sinh 7.063-1)}\right]} = \frac{1}{1.49} \tag{95}$$

**5.与信号源并联的有源阻抗**

正如本文一开始所指出，有两种可能的有源阻抗的配置方式。在前两节中，我们只详细地涉及到有源阻抗与负载相并联的结构。在本节中，我们要指出，当有源阻抗与信号源相并联（如图1($b$)所示）时，前面所导出的公式也可用于后一种的设计情况。

正如以前那样，取决于$R_1$和R的相对值有两种情况。对于 $R_1<R$，我们可证明放大器先天性地不具有高增益，因此，我们可采用衬垫电阻来得到所要求的放大量。故假设$R_1>R$，在这种情况下，可以直接证明所有前两节中所导出的公式仍然适用，只要我们分别把 $R_1$ 和$R_2$，$S_{11}(s)$和$S_{22}(s)$进行交换即可。图3的无损耗梯形网络的输入端口和输出端口也要进行互换。

## 结 论

在本文中，我们导出了任意阶具有最大平坦和等波纹传输功率增益特性的最佳传输型功率放大器的元件值的显式公式。这些公式是 Sard[4]的结果的推广与扩展，并把这一放大器的设计简化为算术运算，因而，我们已证明了在巴特沃思或切比雪夫响应下（除终端变压器外）总能设计出一个LC梯形网络来作为这种放大器所需的无损耗匹配网络。

## 参 考 文 献


[1] K. K. N. Chang, "Low-noise tunnel-diode amplifier", *Proc. IRE*, Vol. 47, pp. 1268-1269, July 1959.

[2] M. E. Hines, "High-frequency negative-resistance circuit principles for Esaki diode applications", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 39, pp. 477-513, May 1960.

[3] E. W. Sard, "Tunnel (Esaki) diode amplifiers with unusually large bandwidths", *Proc. IRE*, Vol. 48, pp. 357-358, March 1960.

[4] E. W. Sard, "Gain-bandwidth performance of maximally flat negative-conductance amplifiers", *Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems*, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, Vol. 10, pp. 319-344, April 1960.

[5] L. I. Smilen and D. C. Youla, "Exact theory and synthesis of a class of tunnel diode amplifiers", *Proc. Natl. Electron. Conf.*, Vol. 16, pp. 376-404, Oct. 1960.
[6] R. Aron, "Gain bandwidth relations in negative resistance amplifiers", *Proc. IRE*, Vol. 49, pp. 355-356, Jan. 1961.
[7] E. S. Kuh and J. D. Patterson, "Design theory of optimum negative-resistance amplifiers", *Proc. IRE*, Vol. 49, pp. 1043-1050, June 1961.
[8] K. L. Su, "Active Network Synthesis", McGraw-Hill, New York, 1965.
[9] D. C. Youla and L. I. Smilen, "Optimum negative-resistance amplifiers", *Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems*, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, Vol. 10, pp. 241-318, April 1960.
[10] H. Takahasi, "On the ladder-type filter network with Tchebysheff response", *J. Inst. Elec. Commun. Engnr. Japan*, Vol. 34, pp. 65-74, Feb. 1951.
[11] E. Green, "Synthesis of ladder networks to give Butterworth or Chebyshev response in the pass band", *Proc. IEE, Lond.*, Vol. 101, Pt. IV, pp. 192-203, Aug. 1954.
[12] D. C. Youla, "On scattering matrices normalized to complex port numbers", *Proc. IRE*, Vol. 49, p. 1221, July 1961.
[13] D. C. Youla, "An extension of the concept of scattering matrix", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 310-312, June 1964.
[14] H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, Princeton, N. J., 1959 (first copyright 1945).
[15] E. W. Sard, "Gain bandwidth relations in negative resistance amplifiers", *Proc. IRE*, Vol. 49, pp. 355-356, Jan. 1961.
[16] L. Weinberg and P. Slepian, "Takahasi's results on Tchebycheff and Butterworth ladder networks", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-7, pp. 88-101, June 1960.
[17] W. K. Chen, "The scattering matrix and the passivity condition", *Matrix Tensor Qt.*, Vol. 24, pp. 30-32; 74-75, Sept. and Dec. 1973.
[18] E. S. Kuh and R. A. Rohrer, "Theory of Linear Active Networks", Holden-Day, San Francisco, 1967.

# 二十二、论宽带椭圆函数型阻抗匹配网络的设计


## 摘　　要

本文提出了在$RC$并联负载和电阻性信号源之间实现$n$阶椭圆函数型传输功率特性而进行均衡时，设计一个无损耗耦合网络的最佳参数的实用选取方法。用十分一般的方法建立了基本的增益-带宽制约关系和其它一些限制。


**1.引言**

在通信系统设计中的一个基本问题是：在一个给定的信号源和一个给定的负载之间设计一个耦合网络，使得在感兴趣的频带内从信号源到负载能传输最大的功率。我们把这种功能称为阻抗匹配或阻抗均衡，且所得到的网络称为匹配网络或均衡器。

Bode[1]首先研究了一类非常有用的问题，但仅限于负载阻抗是由一个电容器和一个电阻器的并联而组成的情况。他建立了此类均衡器的基本增益-带宽的制约关系，但是他并未进一步研究对无损耗均衡器的附加限制。Fano[2]推广了Bode的工作，并且用十分普遍的方法解决了在一个任意无源负载和一个电阻性信号源之间的阻抗匹配问题。Fano的结果可以表示为一组带特定加权函数（决定于负载阻抗）的整数约束。最近，Youla[3]基于复数归一化原理导出了一种新理论，这一理论克服了Fano工作中所遇到的困难。不用说，许多作者[4−10]对Fano和Youla的工作已进行了推广和作过精辟的阐述。

本文的目的在于应用Youla的设计方法，且提出一种设计无损耗耦合网络的最佳参数的实用选取法，它使$RC$并联负载和电阻性信号源之间进行均衡且获得$n$阶低通椭圆函数型传输功率增益特性。尤其是，用十分一般的方法，我们将建立由$RC$并联负载所施加的基本增益-带宽制约关系。

**2.基本约束**

在绝大多数的实际情况下，信号源可用一个理想电压源串联一个纯电阻来表示，它也可以是某一个其它网络的戴维南等效网络。负载阻抗是由一个$R$欧姆的电阻器和$C$法拉的电容器的并联组合而构成，如图1所示。现在的目的是设计一个“最佳”的无损耗均衡器$N$，使输出负载阻抗

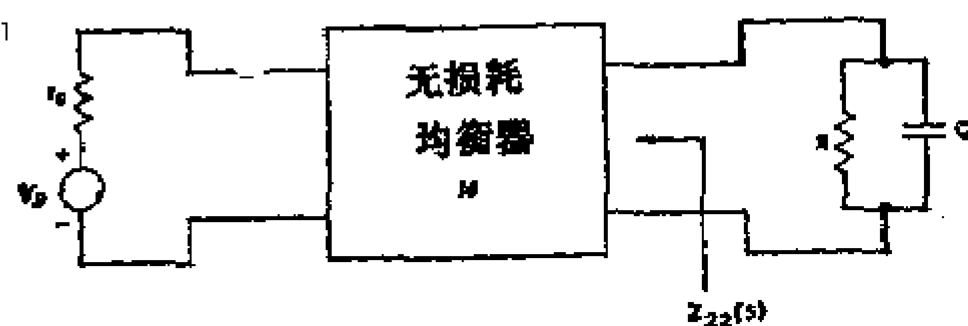



图1　在并联$RC$负载时，宽带匹配问题的符号表示

$$z_2(s)=\frac{R}{1+RCs} \tag{1}$$

与内阻为$r_g$的电阻性信号源相匹配，且获得$n$阶低通椭圆函数型传输功率增益特性：

$$G(\omega^2)=\frac{H_n}{1+\varepsilon^2F_n^2(\omega/\omega_c)},\quad 0\leqslant H_n\leqslant 1, \tag{2}$$

其中，在$n$为奇数时，

$$F_n(\omega/\omega_c)=sn\left[\frac{nK_1}{K}sn^{-1}(\omega/\omega_c,k),k_1\right] \tag{3a}$$

在$n$为偶数时，

$$F_n(\omega/\omega_c)=sn\left[K_1+\frac{nK_1}{K}sn^{-1}(\omega/\omega_c,k),k_1\right] \tag{3b}$$

其中

$$K_1=K(k_1), \tag{4a}$$

$$K=K(k) \tag{4b}$$

分别是模为$k$和$k_1$的全椭圆函数积分，符号$sn^{-1}(u,k)$ 表示反椭圆函数，其定义为$y=sn(u,k)$，则$u=sn^{-1}(y,k)$，$\omega_c$通带的上界，$H_n$是要使其为最大的常数。实参数$\varepsilon$，$k$和$k_1$均以0和1为界，它们是由通带和阻带内所允许的波纹（以分贝计），截止带宽以及过渡带的宽度等技术条件所确定的。三个量$n_1$、$k$和$k_1$不完全独立，且由下列方程建立联系：

$$KK_1'=nK_1K', \tag{5}$$

其中

$$K_1'=K(k_1'), \tag{6a}$$

$$K'=K(k'), \tag{6b}$$

$$k_1'=(1-k_1^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{7a}$$

$$k'=(1-k^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{7b}$$

$k_1'$和$k'$分别是$k_1$和$k$的补模。

参看图1，在输出端口以电流为基的反射系数为：

$$S_{22}^I(s)=\frac{Z_{22}(s)-z_2(-s)}{Z_{22}(s)+z_2(s)}, \tag{8}$$

$Z_{22}(s)$是当输入端口接以基准阻抗$r_g$时，从输出端口看进去的策动点阻抗。令

$$A(s)=\frac{s-1/RC}{s+1/RC} \tag{9}$$

是由$z_2(-s)$的开右半复频平面极点所定义的实正则全通函数，其极点位于$1/RC$处。则由下列关系式所定义的函数：

$$\rho(s)=A(s)S_{22}^I(s) \tag{10}$$

是有界实函数，且在闭右半复频平面内解析。因为双口网络是无损耗的，故传输功率增益可用有界实反射系数表示为下列关系：

$$G(\omega^2)=1-|\rho(j\omega)|^2 \tag{11}$$

把(2) 式代入(11)式，且引用解析延拓理论得到：

$$\rho(s)\rho(-s)=(1-H_n)\frac{1+\hat{\varepsilon}^2F_n^2(-jy)}{1+\varepsilon^2F_n^2(-jy)}, \tag{12}$$

其中$y=s/\omega_c$以及

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon(1-H_n)^{-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

在$H_n=1$的情况下，(12)式化简为：

$$\rho(s)\rho(-s)=\frac{\varepsilon^2F_n^2(-jy)}{1+\varepsilon^2F_n^2(-jy)} \tag{14}$$

(12)式的分子和分母可用函数$1+\alpha^2F_n^2(-jy)$的零点和极点来进行因式分解，$\alpha=\varepsilon$或$\hat{\varepsilon}$。令$\hat{\rho}(s)$是(12)式的最小相位因式分解，并把两个霍尔维茨多项式之比显式地表示成：

$$\hat{\rho}(y)=\lambda\frac{y^n+\hat{c}_{n-1}y^{n-1}+\cdots+\hat{c}_1y+\hat{c}_0}{y^n+c_{n-1}y^{n-1}+\cdots+c_1y+c_0}, \tag{15}$$

式中$\lambda$在(29)式中给出。霍尔维茨多项式的零点为[19]，当$n$为奇数时，

$$y_{pm}=jsn(2mK/n\pm ja_a,k),\ m=0,\pm1,\cdots,\pm\frac{1}{2}(n-1), \tag{16a}$$

当$n$为偶数时，

$$y_{pm}=jsn[(2m-1)K/n+ja_a,k],\quad m=-\frac{1}{2}n+1,\ -\frac{1}{2}n+2,\cdots,\frac{1}{2}n, \tag{16b}$$

其中

$$a_a=-j\frac{K}{nK_1}sn^{-1}(j/\alpha,\ k_1), \tag{16c}$$

根据雅各比虚变换它为实数[11]。在闭右半复频平面内解析的(12)式的通解为：

$$\rho(s)=\pm\eta(s)\hat{\rho}(s), \tag{17}$$

其中

$$\eta(s)=\prod_{i=1}^{u}\frac{s-\lambda_i}{s+\lambda_i},\quad \mathrm{Re}\lambda_i>0\quad(i=1,2,\cdots,u), \tag{18}$$

是一个任意实全通函数，其零点和极点要选择得使常数$H_n$为最大。

为了应用由负载所施加给$H_n$的基本约束，我们必须首先计算下列函数：

$$r_2(s)=\frac{1}{2}[z_2(s)+z_2(-s)]=\frac{-1/RC^2}{s^2-1/R^2C^2}, \tag{19}$$

$$F(s)=2r_2(s)A(s)=\frac{-2RC^2}{(s+1/RC)^2}, \tag{20}$$

$$w(s)=r_2(s)/z_2(s)=\frac{-1/RC}{s-1/RC} \tag{21}$$

根据Youla[3]的理论，负载$Z_2(s)$在$s=s_0=\infty$处拥有第II类1阶传输零点。为了应用这一理论，我们必须在此传输零点处把$\rho(s)$、$A(s)$和$F(s)$展开成罗朗级数。这些函数在无穷远处的罗朗级数展开式为：

$$A(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_x/s^x=1-2/RCs+2/R^2C^2s^2+\cdots, \tag{22}$$

$$F(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_x/s^x=-2/RC^2s^2+4/R^2C^3s^3+\cdots, \tag{23}$$

$$\pm\rho(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_x/s^x=\lambda+\lambda[\eta_1+(\hat{c}_{n-1}-c_{n-1})\omega_c]/s+\cdots, \tag{24}$$

其中

$$\eta_1 = -2\sum_{i=1}^{s}\lambda_i \tag{25}$$

因为负载阻抗仅具有第II类I阶传输零点，则由Youla[3]所导出的关于(22)--(24)式各系数的基本约束为：

$$A_0 = \rho_0, \tag{26a}$$

$$(A_1-\rho_1)/F_2 \geqslant 0, \tag{26b}$$

其中$A_0=1$，$A_1=-2/RC$，$\rho_0=\pm\lambda$，$F_2=-2/RC^2$and

$$\rho_1 = \pm\lambda\left[(\hat{c}_{n-1}-c_{n-1})\omega_c - 2\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\right] \tag{27}$$

因此，为了满足(26)式，我们必须在(24)式的$\rho(s)$的展开式($\lambda=1$)选取正号，且必须满足一个附加的不等式：

$$\hat{c}_{n-1} \geqslant c_{n-1} - 2\left(\frac{1}{RC} - \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\right)\Big/\omega_c \tag{28}$$

参看(15)式连同(12)式，我们看出常数$\lambda$是非任意的，且给出如下：

$$\lambda = 1,\ n为奇数 \tag{29a}$$

$$= \left[1-\frac{H_n}{1+(\varepsilon/k_1)^2}\right]^{\frac{1}{2}},\ n为偶数 \tag{29b}$$

这就表明仅当在奇数阶的椭圆函数响应时，匹配才是可能的。

**3.最allowed直流增益**

在选定奇数$n$和其它参数$\varepsilon$，$k$和$k_1$之后，现在我们必须确定最大可达常数$H_n$。在现在的情况下，它还表示直流增益。为此，我们借助于约束(28)式。正如(15)式所指出，系数$c_{n-1}$和$\hat{c}_{n-1}$是各根之和，故它们可以用(16a)和(16c)式将$n$，$\varepsilon$和$k$显式地表示为：

$$c_{n-1} = u_0 + 2\sum_{m=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} u_m, \tag{30a}$$

$$\hat{c}_{n-1} = \hat{u}_0 + 2\sum_{m=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \hat{u}_m, \tag{30b}$$

其中$n$为奇数，以及

$$-y_{pm} = u_m + jv_m = -j\,sn(2mK/n + ja, k), \tag{31a}$$

$$-\hat{y}_{pm} = \hat{u}_m + j\hat{v}_m = -j\,sn(2mK/n + j\hat{a}, k), \tag{31b}$$

$$m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm\frac{1}{2}(n-1),$$

$$a = -j\frac{K}{nK_1}sn^{-1}(j/\varepsilon, k_1), \tag{32a}$$

$$\hat{a} = -j\frac{K}{nK_1}sn^{-1}[j(1-H_n)^{\frac{1}{2}}/\varepsilon, k_1] \tag{32b}$$

从(32b)式，我们看到在选定一组参数$n$，$\varepsilon$和$k$时，要使$H_n$最大，我们必须使$\hat{a}$最小。这等价于使$\hat{c}_{n-1}$最小。为此，我们分两种情况研究。

**情况1.** $2/RC\omega_c \geqslant c_{n-1}$。当适当地选取开右半复频平面的零点$\lambda_i$，我们能保证(28)式的右

边不为正，从而使$H_n=1$始终成立。特别是若令所有的$\lambda_i=0$，则仍然成立。

**情况2.** $2/RC\omega_c<c_{n-1}$。显然，如果我们选取$\lambda_i\neq0$，它将使(28)式的右边增大，因而导致$H_n$的减小。令(28)式中所有$\lambda_i=0$，得到

$$\hat{c}_{n-1}\geqslant c_{n-1}-\frac{2}{RC\omega_c} \tag{33}$$

当取等号时，就得到最大直流增益。这一等式连同(30)—(32)式一起，已经用一台计算机来计算各种$n$、$\epsilon$和$k$时的最大$H_n$值，在各种不同的奇次阶数$n$,不同的通带波纹和不同的过渡带中的陡度$1/k$时，在图2中作出了最佳直流增益$H_n$以归一化的带宽$RCf_c$为函数的图形，其中$\omega_c=2\pi f_c$。

值得注意，在前面的两种情况中，不必在这类负载下的有界实反射系数中加入任何开右半复频平面的零点。

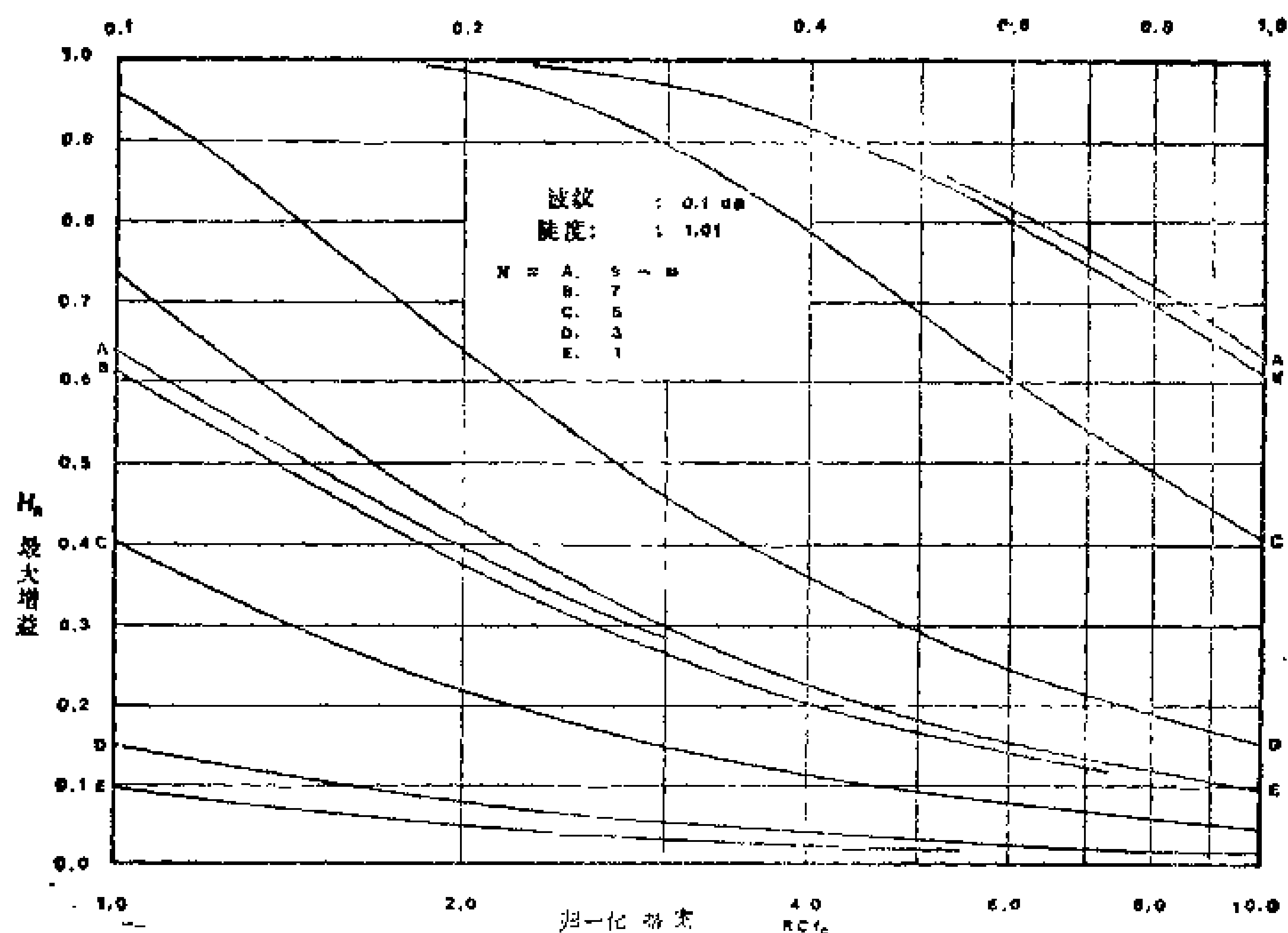



图2a 在各种奇数阶$n$，带通波纹和过渡带中的陡度$1/k$下的最佳直流增益$H_n$(对于顶部的一组曲线则采用上面的标度) (a)带通波纹：0.1dB；陡度：1.01

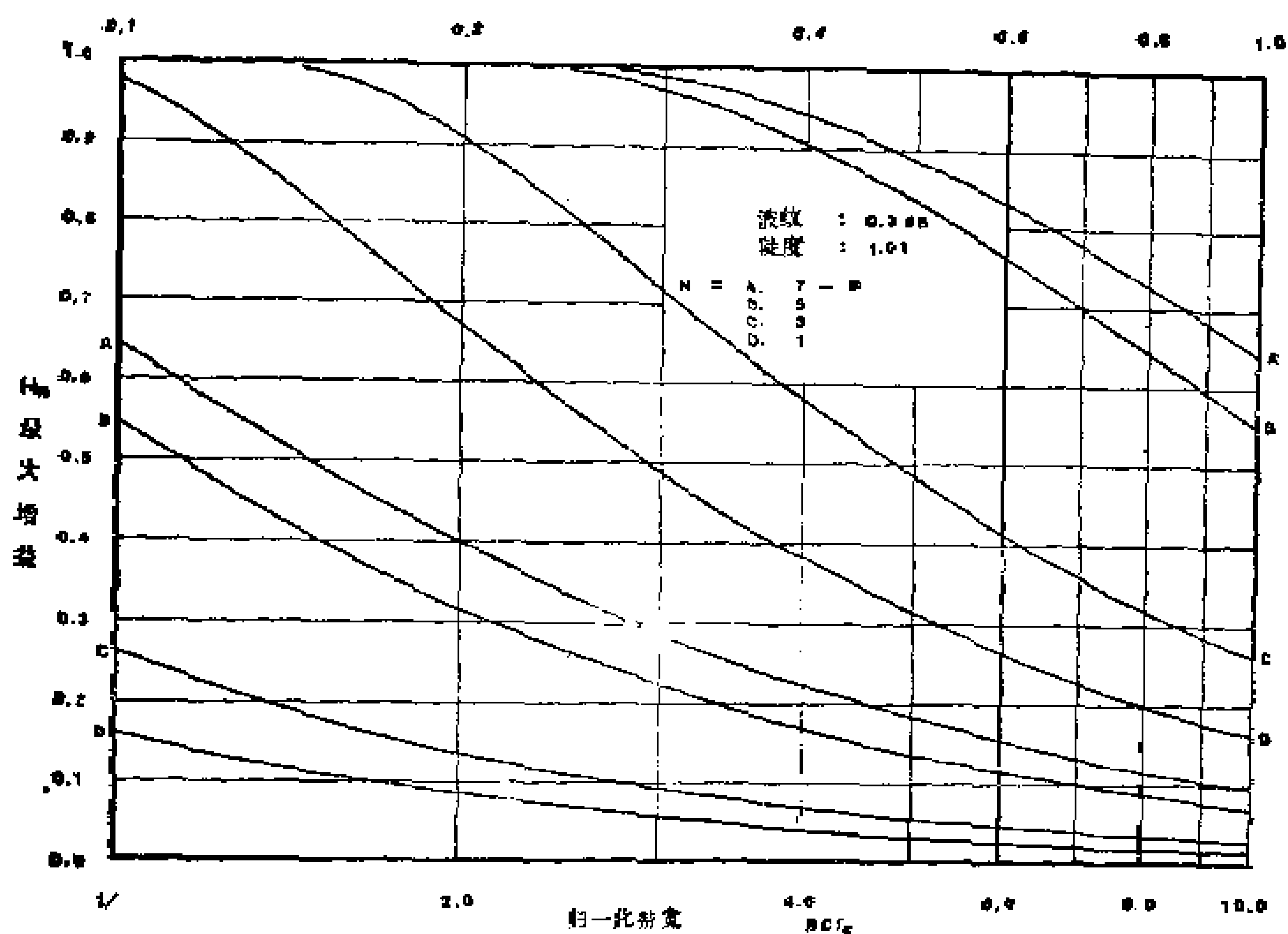



图2b (b) 带通波纹：0.3dB；陡度：1.01

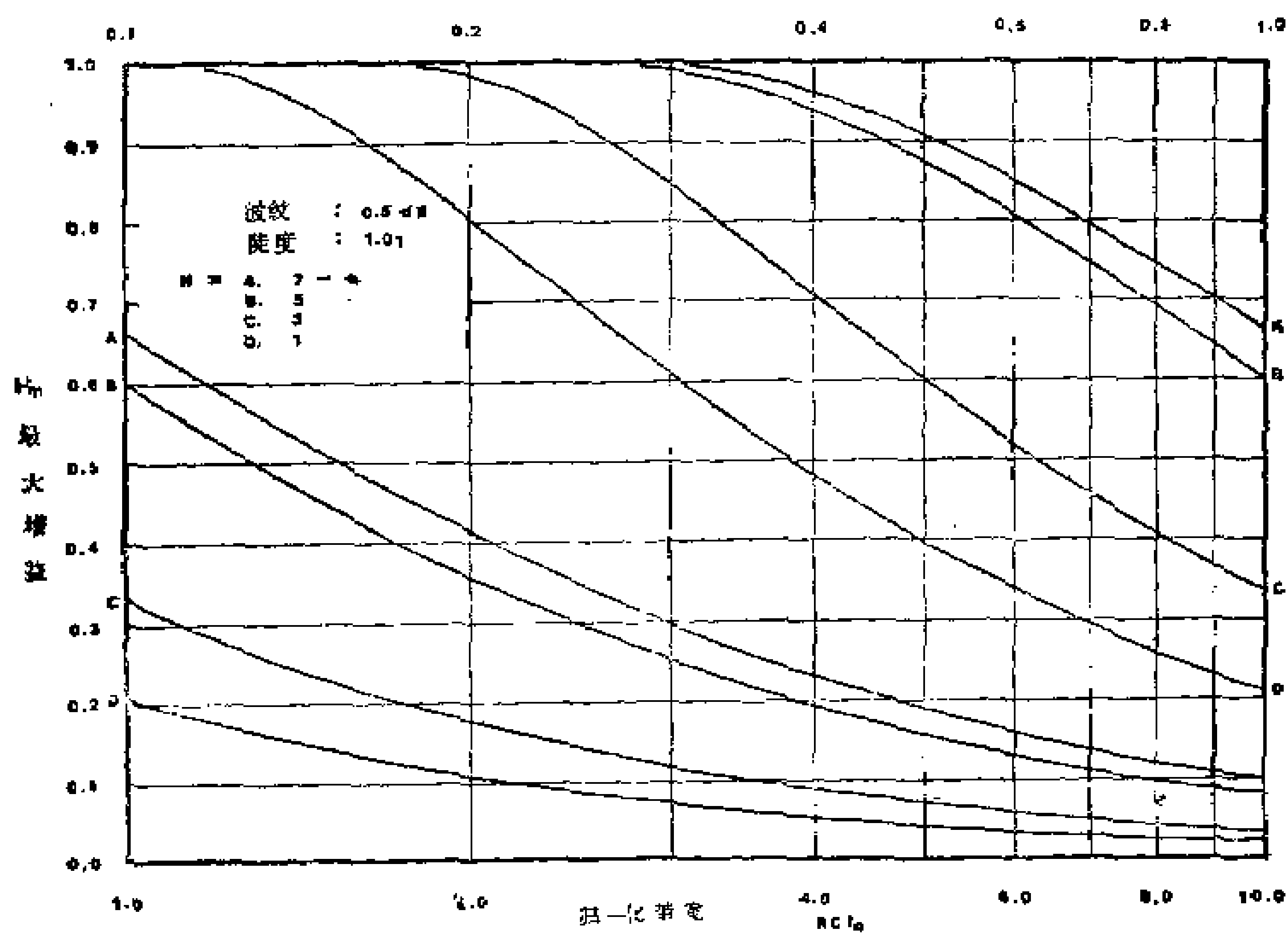



图2c (c) 带通波纹：0.5dB；陡度1.01

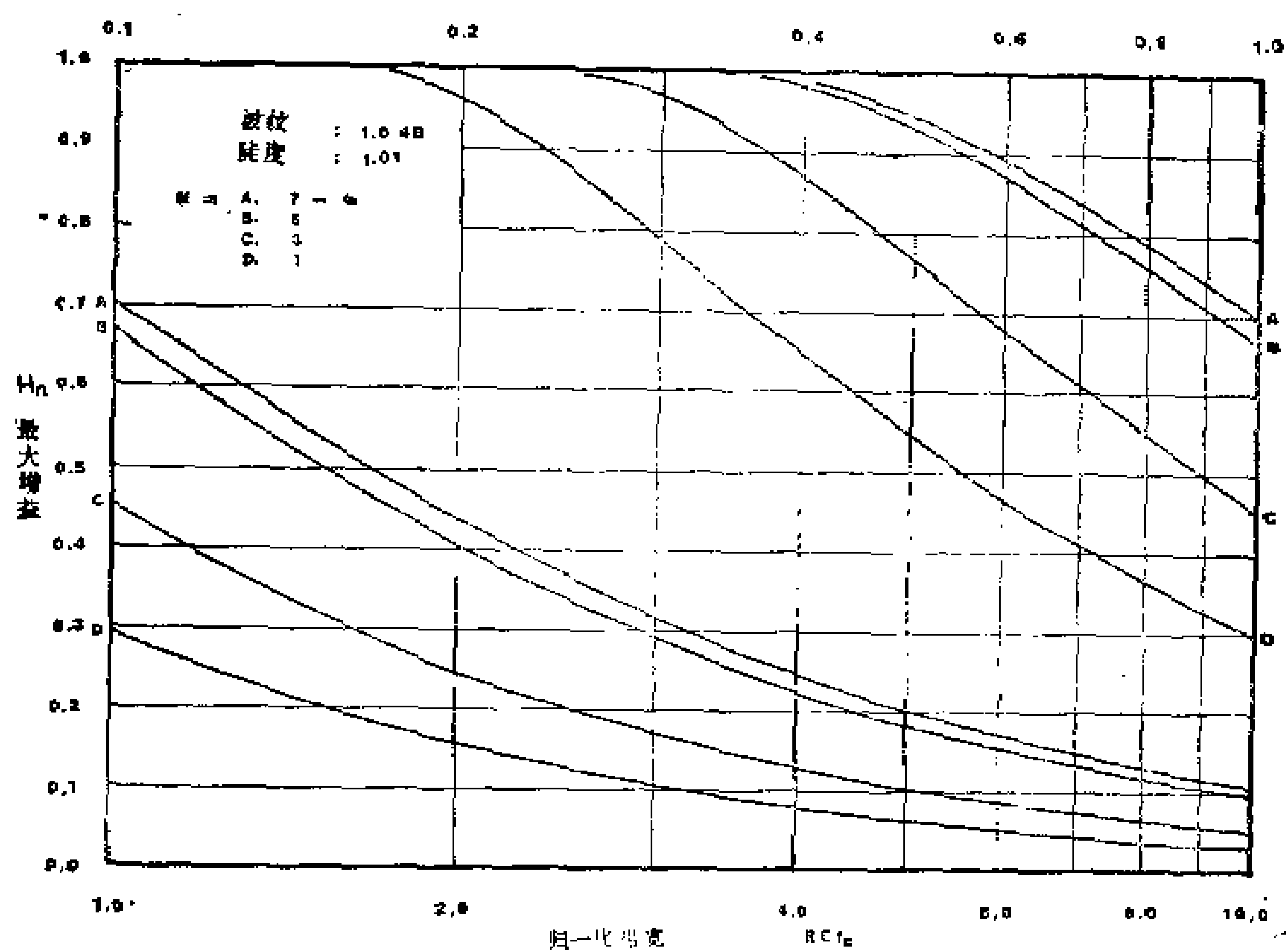



图2d (d) 带通波纹：1.0dB；陡度：1.01

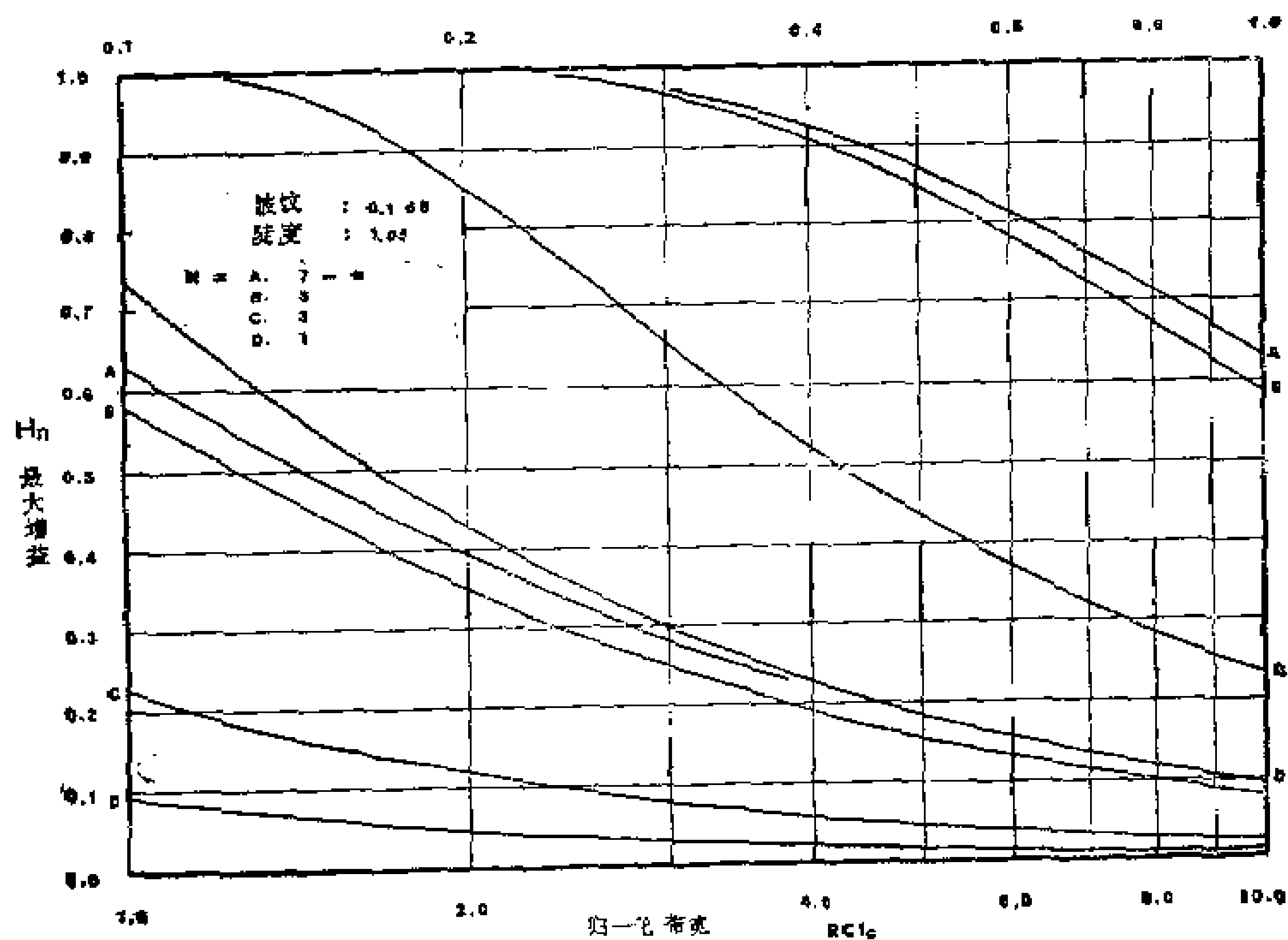



图2c (c) 带通波纹：0.1dB；陡度：1.05

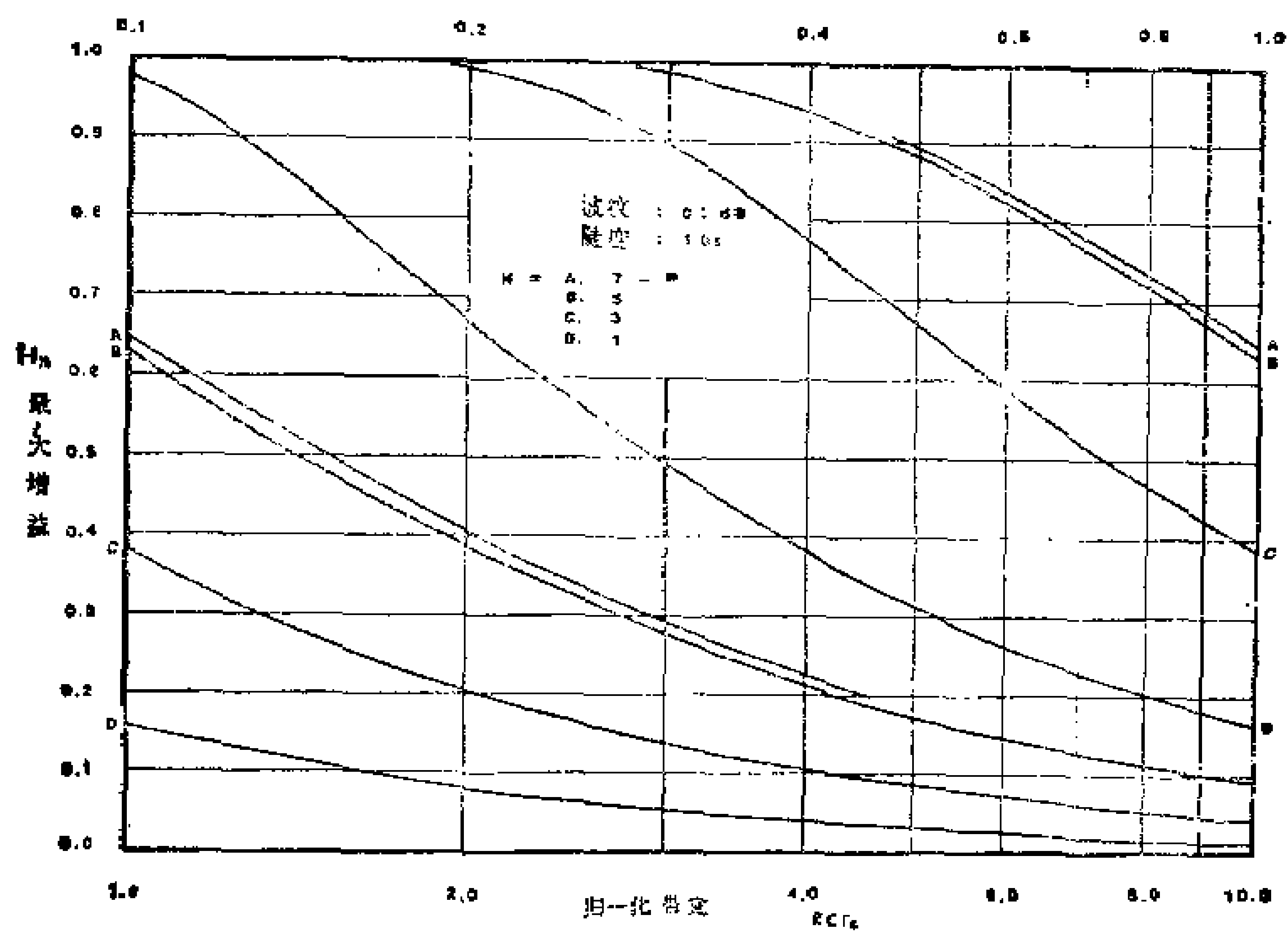



图2f (f) 带通波纹：0.3dB；陡度1.05

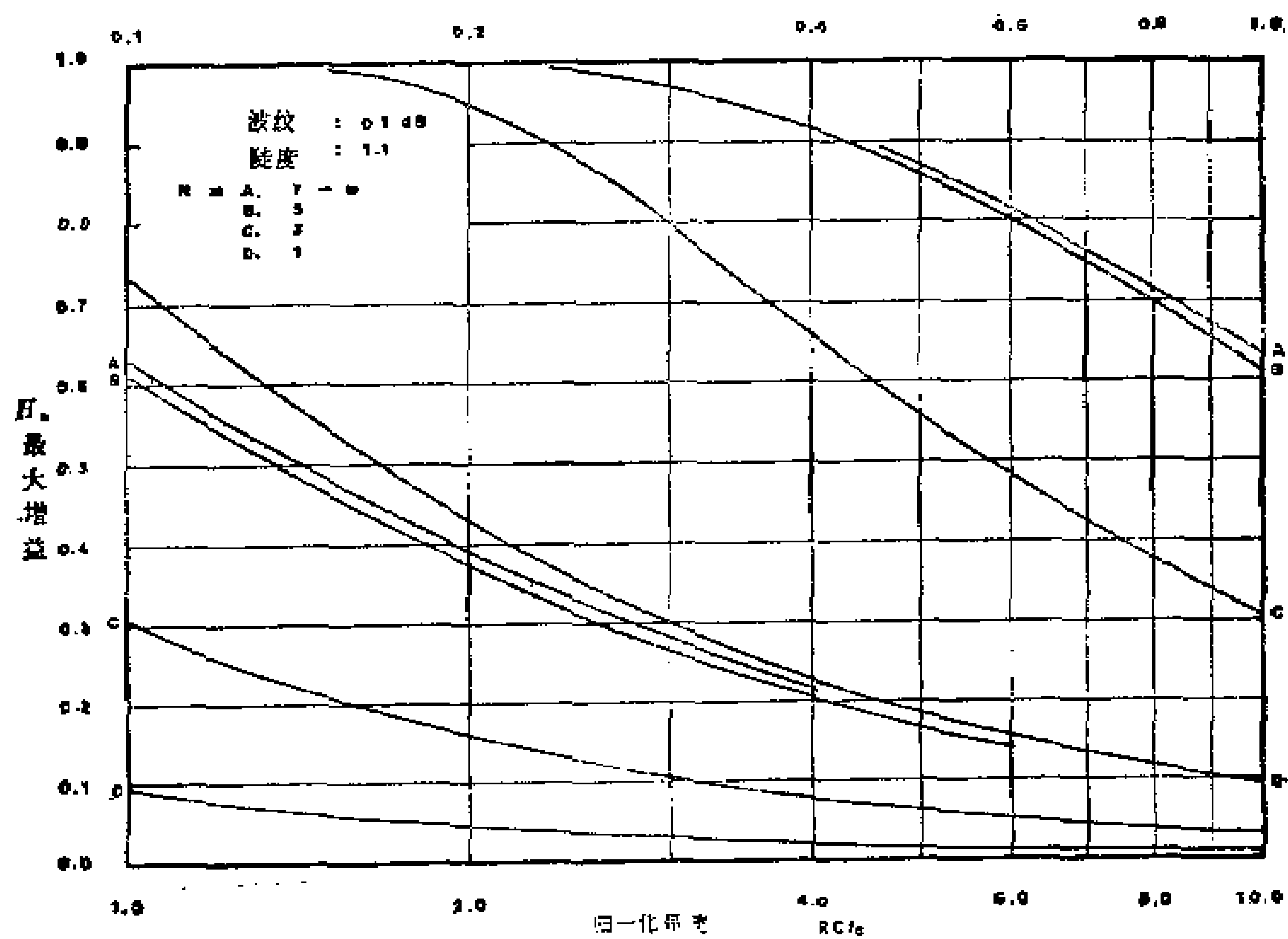



图2g (g) 带通波纹：0.1dB；陡度：1.10

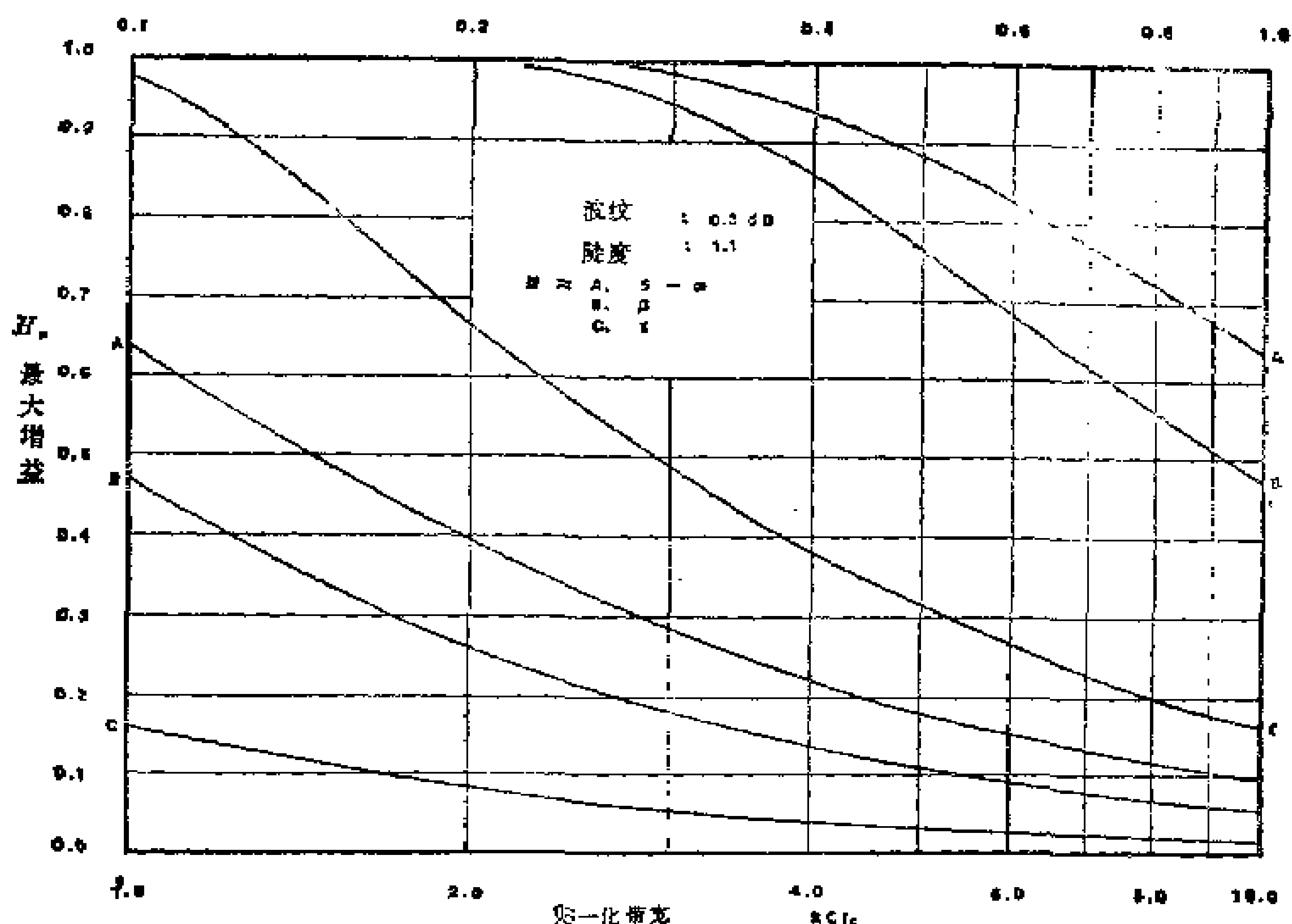


图2b (h) 带通波纹：0.3dB；波纹：1.10

**4.均衡器的末端（从终端向左看）阻抗**

已成功地进行了前面的分析，如图1所示，均衡器的末端策动点阻抗为：

$$Z_{22}(s)=R\left[\sum_{m=0}^{n-1}(c_m-\hat{c}_m)s^m\Big/\sum_{m=0}^{n}(c_m-RCc_{m-1}+\hat{c}_m+RC\hat{c}_{m-1})s^m\right], \tag{34}$$

其中 $c_{-1}=\hat{c}_{-1}=0$。这一阻抗保证是正实函数。事实上，利用简单的除法，它可进一步地展成下列形式：

$$1/Z_{22}(s)=C_1s+Y(s) \tag{35}$$

其中

$$C_1=\frac{c_n-RCc_{n-1}+\hat{c}_n+RC\hat{c}_{n-1}}{R(c_{n-1}-\hat{c}_{n-1})} \tag{36}$$

看作是输出端口的并联电容。知道了这个并联电容$C_1$之后，我们仅需要把正实导纳$Y(s)$实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗双口网络的输入导纳。这通常可利用 Darlington 的方法[12]或有必要的话，可利用Youla公式[13]来实现成终端接一个电阻器的梯形网络。

## 结　论

在本文中，借助于 Youla 宽带匹配理论，我们已经提供了设计一个无损耗耦合网络的最佳参数的实用选取法，它使$RC$并联负载和电阻性信号源进行均衡从而实现一个$n$阶低通椭圆函数型传输功率特性，我们还说明了，对于这一类负载，为了得到最大的可达直流增益不必在有界实反射系数中加入任何开右半复频平面零点。换句话说，为了得到附加自由度以及进行最小相位分解[如(15)式所示]而不必外加全通函数，在此反射系数下仍将得到直流增益。我们还

指出仅当椭圆函数响应是奇数阶时，这种匹配才是可能的。这一点却和巴特沃思响应和切比雪夫响应的情况相反，在后两种情况下，无论响应是奇数阶或偶数阶均能进行匹配。

我们还要提到，利用简单的修改，这些设计公式和曲线可用于负载是由$R$欧姆的电阻器和$L$亨利电感器的串联电路所组成的情况。

**致谢（略）**

## 参 考 文 献


[1] H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, Princeton, N.J., 1945.

[2] R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances", *J. Franklin Inst.*, Vol. 249, pp. 57-83 and 139-154, Jan. and Feb., 1950.

[3] D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 30-50, Mar. 1964.

[4] H. J. Carlin and R. La Rosa, "Broadband reflectionless matching with minimum insertion loss", *Proc. Symp. Modern Network Synthesis*, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, Vol 1, pp. 161-178, Apr. 1952.

[5] H. J. Carlin and R. C. Shen, "Gain-bandwidth theory for optimizing transmission through a prescribed lossless two-port", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 98-100, Jan. 1972.

[6] D. C. Fielder, "Numerical determination of cascaded LC network elements from return loss coefficients", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-5, pp. 356-359, Dec. 1958.

[7] D. C. Fielder, "Broad-band matching between load and source systems", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-8, pp. 138-153, June 1961.

[8] E. Green, "Synthesis of ladder networks to give Butterworth or Chebyshev response in the pass band", *Proc. IEE, Lond.*, Vol. 101, Pt. IV, pp. 192-203, Feb. 1954.

[9] R. Levy, "Explicit formulas for Chebyshev impedance-matching networks, filters and interstages", *Proc. IEE, Lond.*, Vol. 111, pp. 1099-1106, June 1964.

[10] G. L. Matthaei "Synthesis of Tchebycheff impedance-matching networks, filters and interstages", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp. 163-172, Sept. 1956.

[11] H. Hancock, "Theory of Elliptic Functions". Dover, New York, 1958.

[12] S. Darlington, "Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics", *J. Math. Phys.*, Vol. 18, pp. 257-353, Sept. 1939.

[13] D. C. Youla, "A new theory of cascade synthesis", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-8, pp. 244-260, Sept. 1961.

[14] W. K. Chen, "The scattering matrix and the passivity condition", *Matrix Tensor Qt.*, Vol. 24, pp. 30-32 and 74-75, Sept. and Dec. 1973.

[15] E. S. Kuh and R. A. Rohrer, "Theory of Linear Active Networks", Holden-Day, San Francisco, 1967.

[16] S. Plotkin and N. E. Nahi, "On limitations of broad-band impedance matching without transformers", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-9, pp. 125-132 ; June 1962.

[17] J. O. Scanlan and J. T. Lim, "Phase response and ripple in minimum-phase broadband equalizers", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 507-508, Dec. 1964.

[18] G. I. Zysman and H. J. Carlin, "Restrictions on linear phase, low-pass networks with prescribed parasitic loads", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 387-392, Sept. 1965.

[19] W. K. Chen, "Theory and Design of Broadband Matching Networks", Pergamon Press, New York, 1976. April.

# 二十三、最佳非互易负阻抗放大器的设计理论和显式公式

## 摘 要

本文导出了采用隧道二极管的负阻放大器设计的一般关系。利用这些关系，文章给出了具有任意阶巴特沃思或切比雪夫传输功率增益特性的最佳非互易负阻放大器的元件值的显式公式。在导出理论和公式时，我们允许含有频变负载阻抗的情况，也可包括在隧道二极管的等效电路中所用到的串联寄生电感。这样，这些放大器的设计就简化为简单的算术运算。

**1.引言**

随着象隧道二极管这样的新的单口有源器件的研究进展，负阻放大器的设计已具有实际的意义。一种十分有用的结构称为非互易放大器，它的匹配网络是由一个理想三端口环行器和两个双口网络所组成。环行器提供了所要求的参数之间的隔离，频率整形则靠回转器和有源阻抗之间以及环行器和负载之间的两个无损耗均衡器来达到。

许多文献[1—6]已经研究了一个最佳非互易放大器的最大可达增益-带宽乘积及其综合方法。Youla 和 Smilen[1]完整而系统地阐明了非互易放大器的增益-带宽的制约关系以及获得任意可实现传输功率增益特性的设计方法，他们还导出了任意阶巴特沃思和切比雪夫增益特性的精确公式。Sard[2]详细推导了 2 阶和3阶巴特沃思增益响应情况下，无损耗梯形匹配网络元件值的显式公式。然而，他们的工作并不完全令人满意，因为它是基于隧道二极管的简化等效电路模型（是由一个负电阻和一个电容器的并联而组成），然而这一模型只有在低频时才有效。Chan 和 Kuh[4]发展了基于宽带匹配理论的更为一般的理论，它是 Youla 的工作[7]的一个直接推广。该理论是完全普遍性的，然而放大器实际设计和实现所包含的计算则很复杂。

下面我们要阐述，基于散射矩阵复归一化原理和利用 Takahasi[8] 和 Green[9] 的显式公式，如何得到最佳非互易负阻放大器元件值的显式公式。这样得到的任意阶巴特沃思或切比雪夫传输增益特性实现了普遍化和推广了 Sard[2]的结果。和Youla和 Smilen[1]不一样，我们发展了理论使之允许含有频变负载阻抗的情况。我们还包括了隧道二极管等效电路中所用到的串联电感。这些公式的意义在于将这些放大器的设计简化为简单的算术运算。

**2.一般理论**

一个负阻放大器的最一般的结构是把一个单口有源阻抗嵌入信号源和负载所构成的双口网络之间，这种结构可用一个三端口网络来表示，其端口 1 终端接一个严格无源的阻抗$z_1(s)$和一个电压源相串联，端口 2 终端接一个严格的无源负载阻抗 $z_2(s)$，端口 3 终端接一个有源阻抗$z_l(s)$，如图 1 所示。该三端口网络是选为无损耗的，因为直观地说，人们期望一个无损耗的三端口网络将比有损耗网络能产生一个较高的可实现的放大器增益。同时，为简单起见，我们假设用下式

$$z_3(s) = -z_1(-s) \tag{1}$$

所定义的阻抗是严格无源的。令

$$\boldsymbol{S}(s) = [S_{ij}], \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{S}_a(s) = [S_{ija}] \tag{2b}$$

分别为三端口网络$N$和双口网络$N_a$的散射矩阵，$\boldsymbol{S}(s)$ 是归一化到基准阻抗 $z_1(s)$、$z_2(s)$ 和 $z_3(s)$以及$\boldsymbol{S}_a(s)$是归一化到$z_1(s)$和$z_2(s)$上。由散射参数的熟悉的性质可知，当端口 3 实际

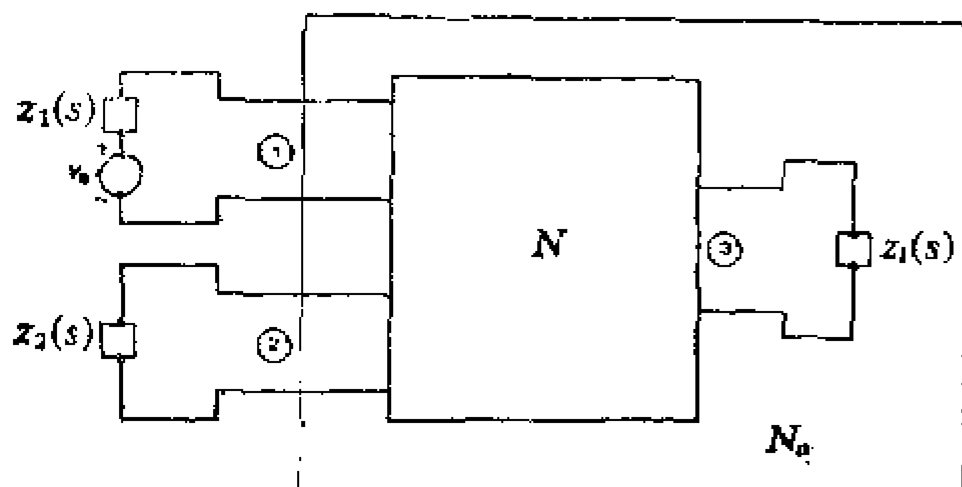



图1　负阻放大器的一般表示

上接以$-z_3(-s)$时，在端口 3 处的归一化反射波$b_3(s)$ 恒为零[6, 10]。在此条件下，归一化的散射矩阵$\boldsymbol{S}_a(s)$可用$\boldsymbol{S}(s)$的元素表示如下：

$$\boldsymbol{S}_a(s) = \frac{1}{S_{33}}\begin{bmatrix} S_{11}S_{33}-S_{13}S_{31} & S_{12}S_{33}-S_{13}S_{32} \\ S_{21}S_{33}-S_{23}S_{31} & S_{22}S_{33}-S_{23}S_{32} \end{bmatrix} \tag{3}$$

由于$N$是无损耗的，故$\boldsymbol{S}(s)$为准酉矩阵[6, 10]或

$$\boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{S}_*(s) = \boldsymbol{U}, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{S}_*(s) = \boldsymbol{S}'(-s)$，一撇表示矩阵的转置，$\boldsymbol{U}$为单位矩阵。利用方程(4) 导出的各元素之间的关系，放大器的散射矩阵$\boldsymbol{S}_a(s)$即(3)式可简化为：

$$\boldsymbol{S}_a(s) = \frac{\det\boldsymbol{S}(s)}{S_{33}}\begin{bmatrix} S_{22*} & S_{21*} \\ S_{12*} & S_{11*} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中$S_{ij*} = S_{ij*}(s) = S_{ij}(-s)$。这样，放大器的传输功率增益为：

$$G(j\omega^2) = |S_{21a}(j\omega)|^2 = \left|\frac{S_{12}(j\omega)}{S_{33}(j\omega)}\right|^2 \tag{6}$$

上式已引用了关系式 $|\det\boldsymbol{S}(j\omega)| = 1$ 和 $|S_{ij*}(j\omega)| = |S_{ij}(j\omega)|$。因此，最佳放大器在感兴趣的频带内应有一个最大值$|S_{12}(j\omega)|$和一个最小值$|S_{33}(j\omega)|$。能达到这一目的一种特殊结构将在下面阐述。

### 3.非互易放大器

使得$|S_{12}(j\omega)|$和$|S_{33}(j\omega)|$可独立地设计的一种简单的配置方式如图 2 所示，图中三端口网络 $N$是一个理想三端

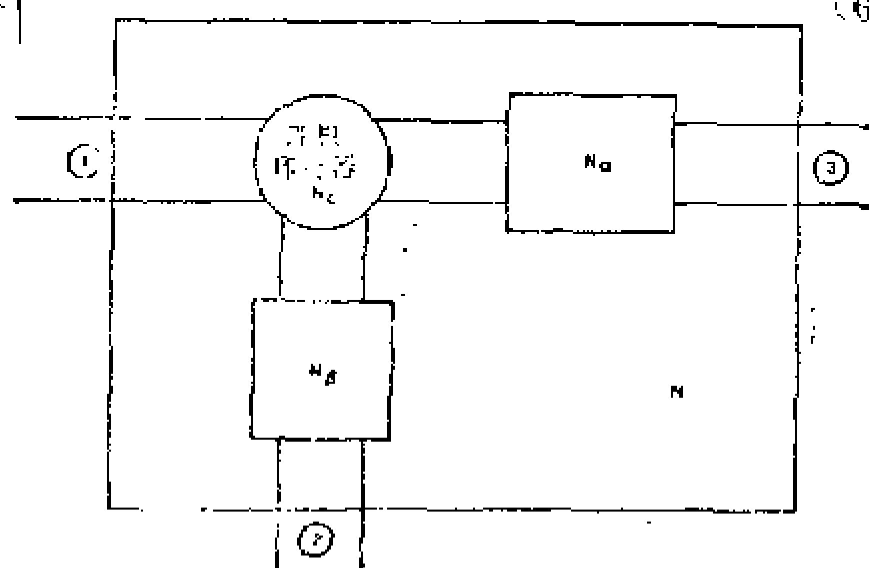



图2　在图1放大器中使用的一个特殊三端口无损耗匹配网络的结构

口环行器$N_c$和两个双口网络$N_\alpha$和$N_\beta$的相互连接而组成。环行器提供了必要的隔离，而频率整形是由两个双口网络而获得。为简单起见，本文的其余部分将进一步规定 $z_1(s)=R_1$，即为一正电阻。

现在我们来推导一个关系式，它建立了三端口网络的散射参数与其它各端口部件参数之间的联系。令

$$\boldsymbol{S}_\alpha(s)=[S_{ij\alpha}], \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{S}_\beta(s)=[S_{ij\beta}] \tag{7b}$$

分别为归一化到基准阻抗$\hat{R}_3$和$z_3(s)$以及$\hat{R}_2$和$z_2(s)$的双口网络$N_\alpha$和$N_\beta$的散射矩阵，其中$\hat{R}_2$和$\hat{R}_3$为任意实常数。采用适当的归一化，理想环行器$N_c$相对于基准电阻$R_1$，$\hat{R}_2$和$\hat{R}_3$的散射矩阵$\boldsymbol{S}_c(s)$可表示为如下形式：

$$\boldsymbol{S}_c(s)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

把(7)和(8)式合并可得无损耗三端口网络$N$相对于基准阻抗$R_1$、$z_2(s)$和$z_3(s)$的散射矩阵：

$$\boldsymbol{S}(s)=\begin{bmatrix}S_{11\alpha}S_{11\beta} & S_{12\beta} & S_{12\alpha}S_{11\beta}\\ S_{11\alpha}S_{21\beta} & S_{22\beta} & S_{12\alpha}S_{21\beta}\\ S_{21\alpha} & 0 & S_{22\alpha}\end{bmatrix} \tag{9}$$

将(9) 式中的元素代入(5) 式，得到

$$\boldsymbol{S}_a(s)=\frac{\det\boldsymbol{S}(s)}{S_{22\alpha}}\begin{bmatrix}S_{22\beta *} & S_{11\alpha *}S_{21\beta *}\\ S_{12\beta *} & S_{11\alpha *}S_{11\beta *}\end{bmatrix} \tag{10}$$

放大器的传输功率增益变为：

$$G(\omega^2)=|S_{21a}(j\omega)|^2=\left|\frac{S_{12\beta}(j\omega)}{S_{22\alpha}(j\omega)}\right|^2 \tag{11}$$

由上观察可以得出如下结论：设计一个最佳非互易负阻放大器的问题等价于设计两个无损耗均衡器$N_\alpha$和$N_\beta$的问题。无损耗均衡器$N_\alpha$要求与一个严格无源阻抗$z_3(s)=-z_l(-s)$及一个常数电阻$\hat{R}_3$相匹配，且在感兴趣的频带内在$N_\alpha$的输出端口获得最小幅度的反射系数$S_{22\alpha}(j\omega)$，$N_\beta$是一个无损耗耦合网络，它和一个严格无源的负载阻抗$z_2(s)$及一个电阻$\hat{R}_2$相匹配，且在上述同一频带范围内获得最大的传输功率增益。为了便于讨论和导出显式公式，我们将考虑具有任意阶巴特沃思或切比雪夫传输功率增益特性的隧道二极管放大器的设计。

图 3 为隧道二极管的等效电路，其输入阻抗为：

$$z_l(s)=Ls-\frac{R}{1-RCs} \tag{12}$$

由(1) 式，$z_l(s)$对应的严格无源阻抗为：

$$z_3(s)=-z_l(-s)=Ls+\frac{R}{1+RCs} \tag{13}$$

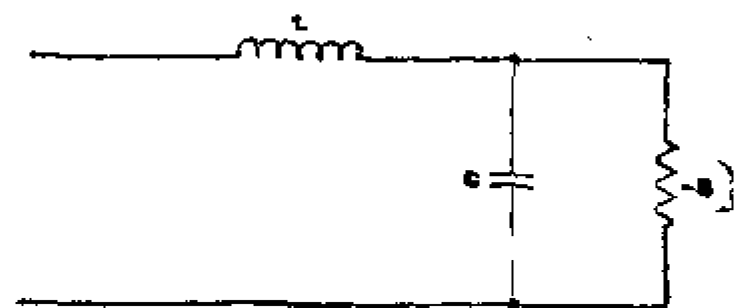


图3 隧道二极管的等效电路

Fano[11] 和 Youla[7] 指出，对于一个确定的频带来说，存在一个在通带内能达到反射系数 $S_{22\alpha}(j\omega)$ 或 $S_{22\beta}(j\omega)$ 的幅值下限。或等价地说，存在一个在给定的带宽内能达到的最

大增益。下面对此进行详细阐述，并给出显式设计公式。

**4.低通最大平坦放大器的显式公式**

研究$n$阶低通巴特沃思传输功率增益特性

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}},\quad K_n\geqq 1,\tag{14}$$

式中$\omega_c$为$3dB$弧度带宽。将(14)式代入(11)式，并经过解析延拓，我们可写成：

$$\frac{S_{12e}(s)S_{12e}(-s)}{S_{22e}(s)S_{22e}(-s)}=\frac{K_n}{1+(-1)^n y^{2n}},\tag{15}$$

式中$y=s/\omega_c$。将(15)式右端的分子、分母同除以$K_n+(-1)^n y^{2n}$,我们可得到如下的恒等式：

$$S_{12e}(s)S_{12e}(-s)=\frac{K_n}{K_n+(-1)^n y^{2n}},\tag{16}$$

$$S_{22e}(s)S_{22e}(-s)=\frac{1+(-1)^n y^{2n}}{K_n+(-1)^n y^{2n}},\tag{17}$$

它可进一步简化为：

$$S_{12e}(s)S_{12e}(-s)=\frac{1}{1+(-1)^n x^{2n}},\tag{18}$$

$$S_{22e}(s)S_{22e}(-s)=\delta^{-2n}\frac{1+(-1)^n y^{2n}}{1+(-1)^n x^{2n}},\tag{19}$$

其中

$$\delta=K_n^{\frac{1}{2n}},\tag{20a}$$

$$x=s/\delta\omega_c=y/\delta\tag{20b}$$

**$N_e$的系数约束**

(19)式的分子和分母可以用$1+(-1)^n s^{2n}=0$的根来进行因式分解。令$q(s)$为由开左半复频平面零点所形成的$n$阶霍尔维茨多项式。则(19)式的最小相位因式分解可显式地表示为：

$$\hat{S}_{22e}(s)=\pm\delta^{-n}\frac{q(y)}{q(x)}=\pm\frac{y^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_0}{y^n+a_{n-1}\delta y^{n-1}+a_{n-2}\delta^2 y^{n-2}+\cdots+a_0\delta^n},\tag{21}$$

其中$a_0=1$。根据Youla的理论[6, 7]，方程(13)给出的阻抗$z_3(s)$在无穷远处具有一个第IV类3阶传输零点。为了应用他的理论，我们在下面计算所需的函数及其在传输零点处的罗朗级数展开式。其结果为：

$$A(s)=\frac{RCs-1}{RCs+1}=1-2/RCs+2/R^2C^2s^2-2/R^3C^3s^3+\cdots\tag{22a}$$

$$=A_0+A_1/s+A_2/s^2+A_3/s^3+\cdots,\tag{22b}$$

$A(s)$为由$z_3(-s)$的开右半复频平面极点而定义的实正则全通函数，其极点在$1/RC$处：

$$F(s)\equiv 2r_2(s)A(s)=-2/RC^2s^2+4/R^2C^3s^3+\cdots\tag{23a}$$

$$=F_0+F_1/s+F_2/s^2+F_3/s^3+\cdots,\tag{23b}$$

式中$r_3(s)$表示$Z_3(s)$的偶部，且

$$\pm\hat{S}_{22e}(s)=S_0+S_1/s+S_2/s^2+S_3/s^3+\cdots,\tag{24a}$$

其中

$$\pm S_0=1,\tag{24b}$$

$$\pm S_1/\omega_c = (1-\delta)a_{n-1}, \tag{24c}$$

$$\pm S_2/\omega_c^2 = (1-\delta^2)a_{n-2} - \delta(1-\delta)a_{n-1}^2, \tag{24d}$$

$$\pm S_3/\omega_c^3 = (1-\delta)[(1+\delta-\delta^2)a_{n-3} + \delta^2 a_{n-1}^3 - \delta(2\delta+1)a_{n-1}a_{n-2}] \tag{24e}$$

对于一个第IV类 3 阶传输零点，加在(22)—(24)式系数的基本约束变为[6, 7]：

$$A_k = S_k,\quad k=0,1,2, \tag{25a}$$

$$F_2/(A_3 - S_3) \geq L \tag{25b}$$

因此，为了满足 $A_0 = S_0$，我们必须选取(21)式中的正号，于是(24)式中均为正号。为了满足约束$A_1 = S_1$，我们要求：

$$-\frac{2}{RC} = (1-\delta)\omega_c a_{n-1}, \tag{26a}$$

从而得到

$$\delta = 1 + \frac{2}{RC\omega_c a_{n-1}}, \tag{26b}$$

将此值代入(20a) 式，即得放大器的直流增益：

$$K_n = \left[1 + \frac{2\sin\pi/2n}{RC\omega_c}\right]^{2n}, \tag{27}$$

在上式中我们用了等式$a_{n-1} = 1/(\sin\pi/2n)$

现在我们要指出，利用由(26b)式给定的$\delta$时，第 3 个约束$A_2 = S_2$总是满足的：

$$\begin{aligned} S_2/\omega_c^2 &= (1-\delta^2)a_{n-2} - \delta(1-\delta)a_{n-1}^2 \\ &= \frac{1}{2}(1-\delta)^2 a_{n-1}^2 = \frac{2}{R^2C^2\omega_c^2} = A_2/\omega_c^2 \end{aligned} \tag{28}$$

上面我们用到了(26a)式及恒等式

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}a_{n-1}^2 \tag{29}$$

最后，还有一个约束 (25b)。为了满足这一要求，我们定义临界电感为：

$$L_c = \frac{F_2}{A_3 - S_3}, \tag{30}$$

其中

$$F_2 = -2/RC^2 = (1-\delta)a_{n-1}\omega_c/C, \tag{31a}$$

$$A_3 = -2/R^3C^3 = \frac{1}{4}(1-\delta)^3 a_{n-1}^3 \omega_c^3, \tag{31b}$$

$$\begin{aligned} S_3/\omega_c^3 &= (1-\delta^3)a_{n-3} + \delta(1-\delta)[\delta a_{n-1}^2 - (2\delta+1)a_{n-2}]a_{n-1} \\ &= (1-\delta^3)a_{n-3} + \frac{1}{2}\delta(\delta-1)a_{n-1}^3 \end{aligned} \tag{31c}$$

将(31)式代入(30)式并连同下列关系式一起[6, 9]

$$a_{n-1} = \frac{1}{\sin\gamma_1}, \tag{32a}$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{2\sin^2\gamma_1} = \frac{1}{2}a_{n-1}^2, \tag{32b}$$

$$a_{n-3} = \frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin\gamma_3} = \frac{a_{n-1}^2\cos\gamma_2}{2\sin\gamma_3}, \tag{32c}$$

式中

$$\gamma_m = m\pi/2n, \tag{33}$$

临界电感$L_c$可以简化为：

$$L_c = \frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{C\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1)} > 0 \tag{34}$$

这样，放大器的增益由(27)式给定时，在预给的频带$\omega_c$的范围内由图 3 所示的等效电路表示的隧道二极管的匹配是可能的，其充要条件是串联寄生电感$L$不超过临界电感$L_c$。

**稳定性考虑**

在进一步推导梯形网络$N_a$元件值的显式公式之前，我们要指出，只要有源阻抗存在就必须考虑稳定性。放大器的固有频率是下式的零点：

$$Z_{22a}(s) + z_l(s), \tag{35}$$

$Z_{22a}(s)$是$N_a$的输入端口接基准电阻$\hat{R}_3$时由输出端口看进去的阻抗。为了使放大器稳定，我们要求(35)式的所有零点限制在开左半复频平面内。因为

$$S_{22a}(s) = \eta(s)A(s)\frac{Z_{22a}(s) + z_l(s)}{Z_{22a}(s) + z_3(s)} = \eta(s)\hat{S}_{22a}(s), \tag{36}$$

式中$\eta(s)$为实正则全通函数，且因为(36)式的分母是严格无源的，因此我们可以得出结论：阻抗函数$Z_{22a}(s) + z_l(s)$在闭右半复频平面内的所有零点也是$\hat{S}_{22a}(s)$的零点，$A(s)$在开右半复频平面内的所有零点和$z_3(-s)$在开右半复频平面内的极点相抵消。因此，为使一个放大器稳定，$\hat{S}_{22a}(s)$必须是一个最小相位函数。

**$N_a$的显式公式**

假设所需的匹配是可能的。我们现在来说明无损耗的双口网络$N_a$总可以用一个终端接电阻器的$LC$梯形网络来实现。而且，我们导出该梯形网络元件值的显式公式，从而就把匹配网络的设计简化为简单的算术运算。

确定了最小相位反射系数$\hat{S}_{22a}(s)$后，均衡器的末端阻抗$Z_{22a}(s)$就可由(36)式直接确定。利用(36)式连同(12)和(13)式一起，可得

$$Z_{22a}(s) = \frac{\hat{S}_{22a}(s)z_3(s) - A(s)z_l(s)}{A(s) - \hat{S}_{22a}(s)}$$

$$= \frac{R[1 - \hat{S}_{22a}(s)]}{RCs[\hat{S}_{22a}(s) - 1] + [1 + \hat{S}_{22a}(s)]} - Ls \tag{37}$$

将(21)式代入(37)式，$Z_{22a}(s)$可写为：

$$Z_{22a}(s) = \frac{R}{-RCs - \dfrac{q(y) + \delta^n q(x)}{q(y) - \delta^n q(x)}} - Ls \tag{38}$$

正如Takahasi[8]所指出，(38)式右端第一项的分母中的第二项可显式地展开成一个连分式，且为：

$$\frac{q(y)+\delta^{n}q(x)}{q(y)-\delta^{n}q(x)}=C_1''y+\cfrac{1}{L_2''y+\cfrac{1}{C_3''y+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H''}}}} \tag{39}$$

其中

$$C_1''=\frac{2\sin\gamma_1}{1-\delta}, \tag{40a}$$

$$C_{2m-1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{1-2\delta\cos\gamma_{4m-2}+\delta^2}, \tag{40b}$$

$$C_{2m+1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m-1}}{1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2} \tag{40c}$$

$m=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}n\right]$,其中$\left[\frac{1}{2}n\right]$表示不大于$\frac{1}{2}n$的最大整数。常数项$H''$可从(39)式置$s=0$且利用$q(0)=1$而直接确定。其结果为:

$$H''=\left[\frac{1+\delta^{n}}{1-\delta^{n}}\right]^{\pm1}, \tag{41}$$

士号分别根据$n$是偶数还是奇数而定。另外,最末的一个电抗元件值可由下列公式确定:

$$C_n''=\frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)H''},n\text{为奇数} \tag{42a}$$

$$L_n''=\frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)H''},n\text{为偶数} \tag{42b}$$

注意到因为$\delta>1$,所以在(39)式中的所有系数均为负。把(26b)和(32a)与(40a)合并而得:

$$C_1''=-RC\omega_c \tag{43}$$

同样,由(40b)及$m=1$,我们有:

$$L_2''=\frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{C_1''(1-2\delta\cos\gamma_2+\delta^2)}=-\frac{L_c\omega_c}{R} \tag{44}$$

将(39)式代入(38)式,连同(43)和(44)式一起,均衡器的末端阻抗$Z_{22a}(s)$可展开成连分式:

$$Z_{22a}(s)=(L_c-L)s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H}}}}, \tag{45}$$

其中在$m=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$,$n>1$时,

$$L_1=L_c, \tag{46a}$$

$$C_{2m}L_{2m-1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2)},\quad m\leq\frac{1}{2}(n-1), \tag{46b}$$

$$C_{2m}L_{2m+1}=\frac{4\sin\gamma_{4m+1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m+2}+\delta^2)},\quad m<\frac{1}{2}(n-1), \tag{46c}$$

以及

$$C_{n-1} = \frac{2(\delta^n+1)\sin\gamma_1}{R(\delta^n-1)(\delta+1)\omega_c}, \quad n\text{为奇数} \tag{47a}$$

$$L_{n-1} = \frac{2R(\delta^n-1)\sin\gamma_1}{(\delta^n+1)(\delta+1)\omega_c}, \quad n\text{为偶数} \tag{47b}$$

如前所述，对实际可行的匹配，需$L_r \geq L$，它表明(45)式可以看成是一个终端接电阻器的实际$LC$梯形网络，如图4所示。该网络的终端电阻$\hat{R}_s$可由(38)和(41)式令$s=0$而确定，故得

$$\hat{R}_s = R\frac{\delta^n-1}{\delta^n+1} \tag{48}$$

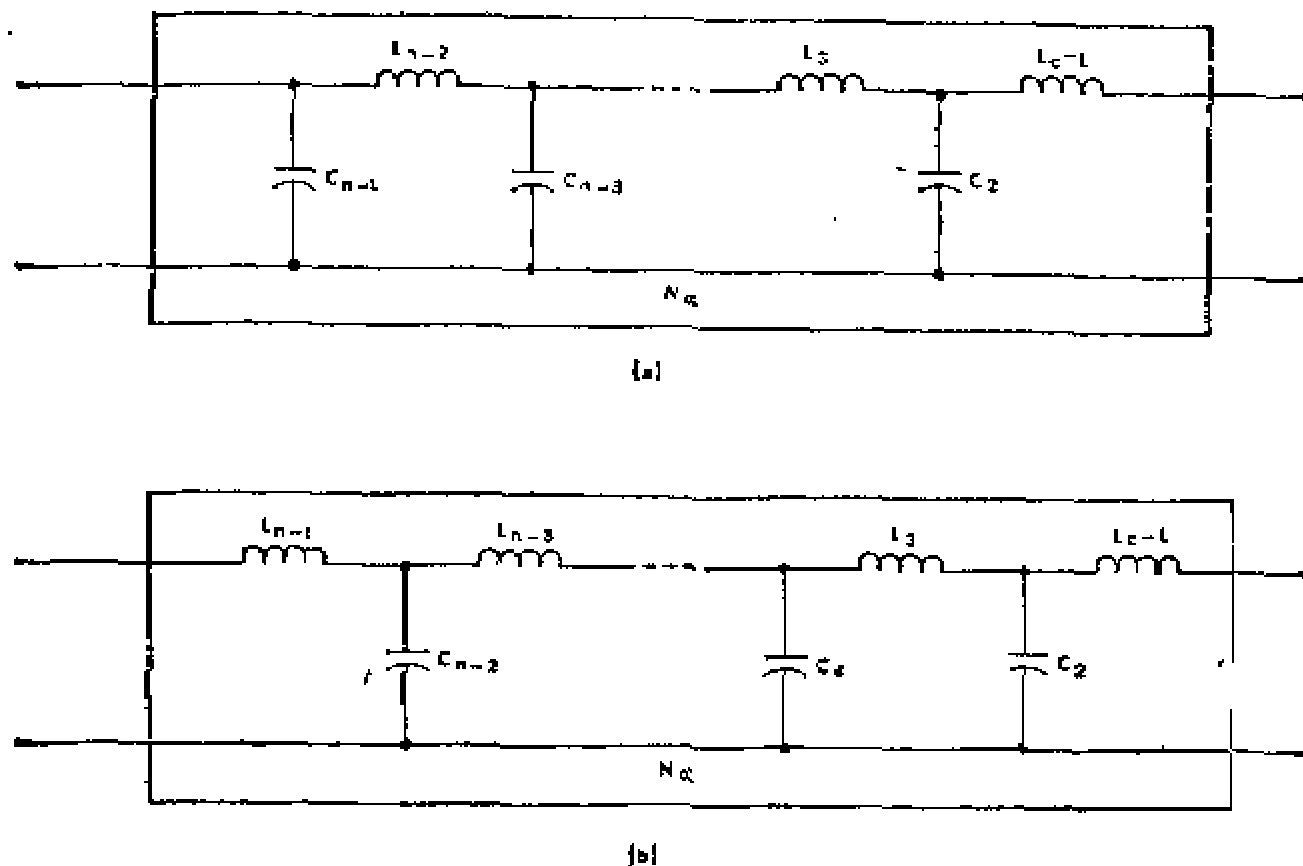


图4 无损耗双口网络$N_\alpha$的$LC$梯形网络的实现。(a) $n$为奇数，(b) $n$为偶数

例1.

要求设计一个最佳非互易负阻放大器，它具有最大平坦传输功率增益特性。放大器接在200Ω负载电阻器和具有50Ω内阻的信号源之间工作。通带增益在带宽为$50/\pi$ MHz时必须至少等于$30dB$。有源单口网络采用隧道二极管，其具有的参数为：

$$-R=-100\Omega,\ C=50\text{pF},\ L=2\text{nH} \tag{49}$$

从上述技术指标，我们有：

$$R_1=50\Omega,\ R_2=200\Omega,\ \omega_c=10^8\text{rad/s} \tag{50}$$

对于$n=5$，直流增益直接由(27)式确定，得：

$$K_5=(1+4\sin 18^\circ)^{10}=(2.2361)^{10}=3125 \quad \text{or} \quad 34.95\text{dB} \tag{51}$$

这给出了通带内所需的增益值。由(20a)式，我们计算：

$$\delta = K_5^{\frac{1}{10}} = 2.2361 \tag{52}$$

$LC$梯形网络所需的元件值直接由(34)和(45)式计算如下(见图5)：

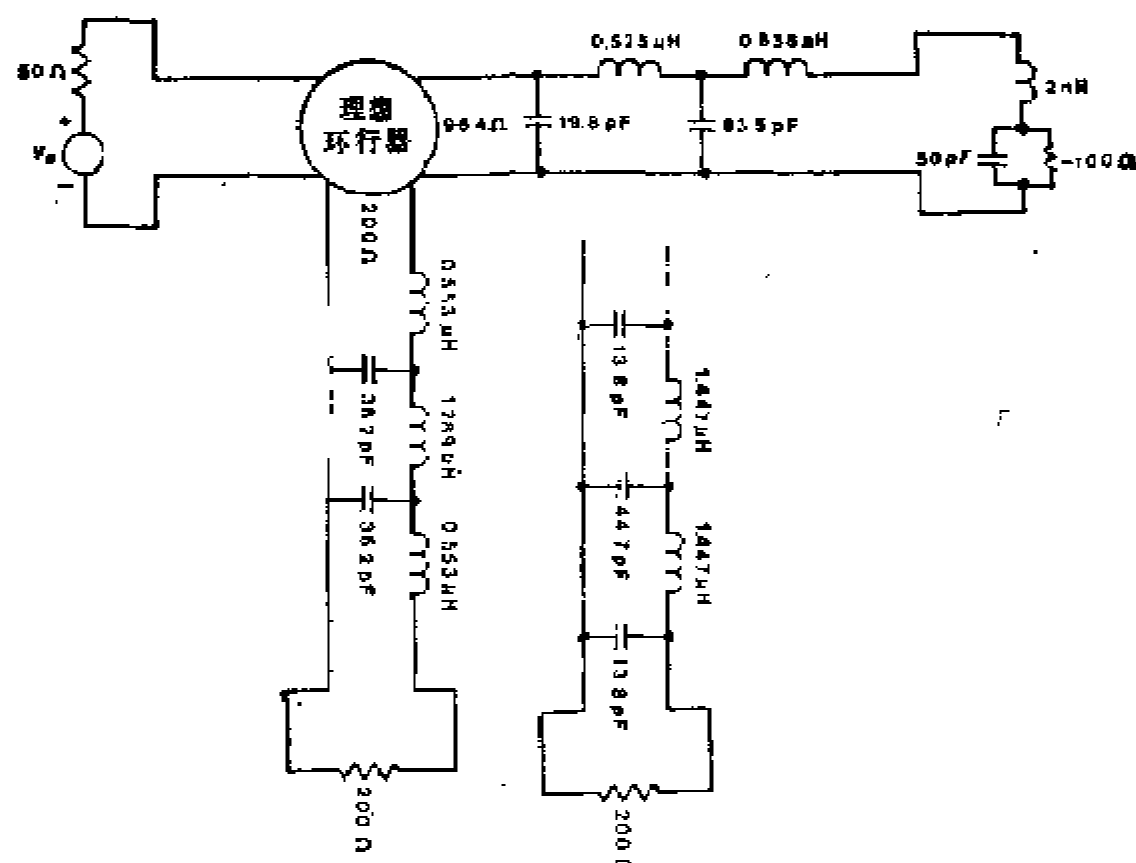



图5 具有5阶巴特沃思传输功率增益特性的最佳非互易隧道二极管放大器的示意图

$$L_1=\frac{4\sin 18°\sin 54°}{50\times 10^{-12}\times 10^{16}(5-4.4722\cos 36°+1)}=0.83964\mu H, \tag{53a}$$

$$C_2=\frac{4\sin 54°\sin 90°}{0.83964\times 10^{-6}\times 10^{16}(1-4.4722\cos 72°+5)}=83.45764pF, \tag{53b}$$

$$L_3=\frac{4\sin 90°\sin 126°}{83.45764\times 10^{-12}\times 10^{16}(1-4.4722\cos 108°+5)}=0.52527\mu H, \tag{53c}$$

$$C_4=\frac{4\sin 126°\sin 162°}{0.52527\times 10^{-6}\times 10^{16}(1-4.4722\cos 144°+5)}=19.79403pF \tag{53d}$$

作为另一种方法，$C_4$可由(47a)式进行计算，所得的结果相同。$N_a$的终端电阻$\hat{R}_5$由(48)式确定，且由下式给出：

$$\hat{R}_5=100\frac{55.90170-1}{55.90170+1}=96.48517\Omega \tag{54}$$

**$N_\beta$的显式公式**

因为双口网络$N_\beta$是无损耗的，我们有关系式

$$|S_{22\beta}(j\omega)|^2=1-|S_{12\beta}(j\omega)|^2, \tag{55}$$

因此，借助于解析延拓理论和(18)式，即得最小相位因式分解

$$\hat{S}_{22\beta}(s)=\pm\frac{x^n}{q(x)} \tag{56}$$

(55)式的最一般解由下式给出：

$$S_{22\beta}(s)=\xi(s)\hat{S}_{22\beta}(s), \tag{57}$$

$\xi(s)$ 为一实正则全通函数。对于一般的负载阻抗$z_2(s)$，匹配是可能的，其充要条件是所有Youla 系数约束均满足[56, 72]。在带有寄生元件，诸如串联电感和（或）并联电容的电阻负载的情况下，我们可以证明双口网络$N_\beta$总可以导出一种梯形网络，其元件值可以直接由显式公

式而进行计算。

令$z_2(s)=R_2$。则$N_\beta$的输入端接一个基准电阻$\hat{R}_2$时，从输出端看进去的阻抗为：

$$Z_{22\beta}(s)=R_2\ \frac{1+\hat{S}_{22\beta}(s)}{1-\hat{S}_{22\beta}(s)}=R_2\frac{q(x)\pm x^n}{q(x)\mp x^n} \tag{58}$$

可以看出，如果不考虑常数$R_2$和负号，(58)式是(39)式当$\delta$趋于零时的一种极限情况。于是，它就能展开成为一个连分式。在(56)式取正号时，我们有：

$$Z_{22\beta}(s)=L_1s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H}}}}, \tag{59}$$

其中

$$L_1=\frac{2R_2\sin\gamma_1}{\delta\omega_c}, \tag{60a}$$

$$L_{2m-1}C_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\delta^2\omega_c^2}, \tag{60b}$$

$$L_{2m+1}C_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\delta^2\omega_c^2} \tag{60c}$$

$m=1,2,\cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$；且

$$L_n=\frac{2R_2\sin\gamma_1}{\delta\omega_c},\quad n\text{为奇数} \tag{61a}$$

$$C_n=\frac{2\sin\gamma_1}{R_2\delta\omega_c},\quad n\text{为偶数} \tag{61b}$$

注意，(39)式是对变量$y$展开的，而(59)式是对$s$展开的，这样，上述公式就出现$\delta\omega_c$。该$\delta$是由(26b)所定义的量，并不是极限过程中所用的那个$\delta$。方程(60)和(61)可以进一步简化并合并成两个单一的方程：

$$L_{2m-1}=\frac{2R_2}{\delta\omega_c}\sin\gamma_{4m-3} \tag{62a}$$

$$C_{2m}=\frac{2}{R_2\delta\omega_c}\sin\gamma_{4m-1} \tag{62b}$$

$m=1,2,\cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$。这样，(59)式就表示一个$LC$梯形网络，如图6所示，其终端接电阻为$R_2$，其元件值由显式公式(62)给出。

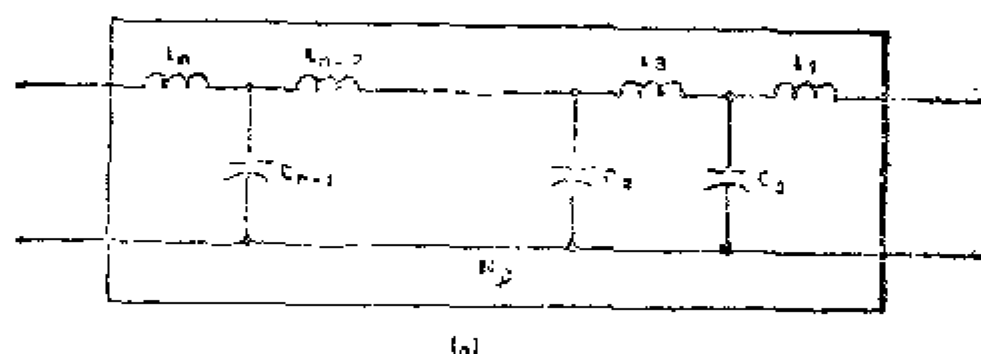
类似地，若在(56)式中取负号，我们有

$$Y_{22\beta}(s)=1/Z_{22\beta}(s)=C_1s+\cfrac{1}{L_2s+\cfrac{1}{C_3s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H}}}} \tag{63}$$

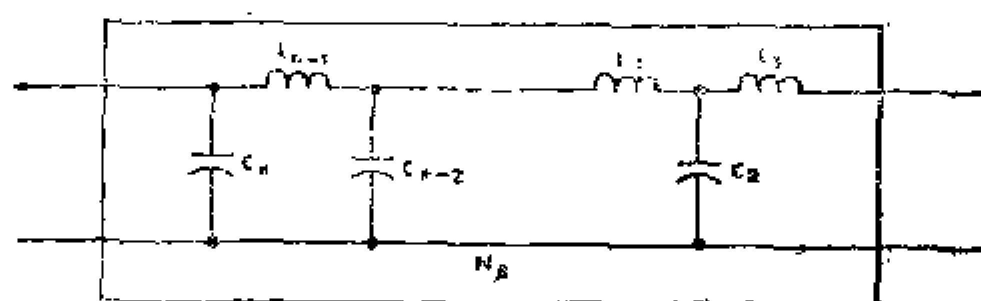
其中

$$C_{2m-1}=\frac{2}{R_2\delta\omega_c}\sin\gamma_{4m-3},\tag{64a}$$

$$L_{2m}=\frac{2R_2}{\delta\omega_c}\sin\gamma_{4m-1}\tag{64b}$$

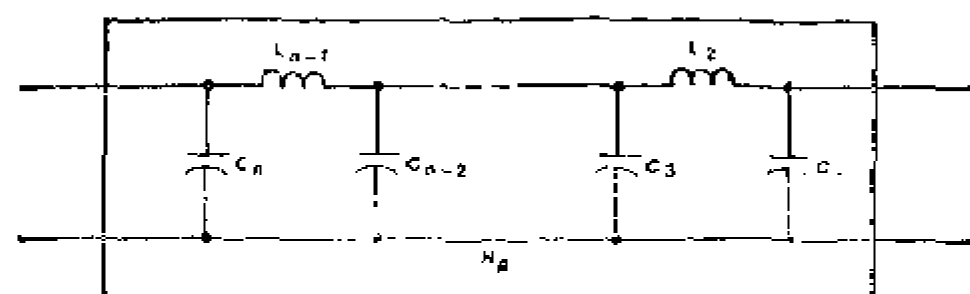


(a)

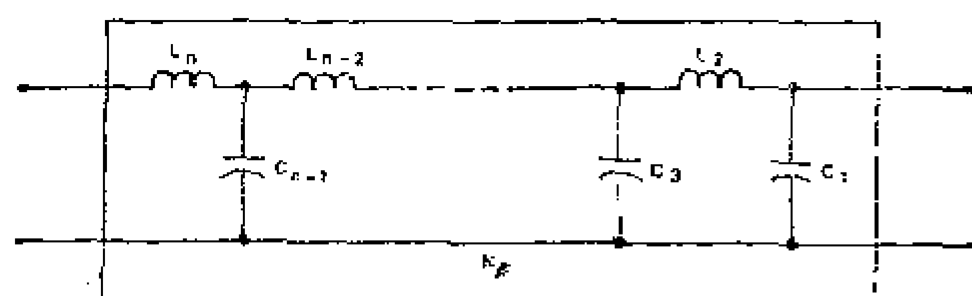


(b)

图6　无损耗双口网络$N_\beta$的$LC$梯形网络的实现($\hat{S}_{22\beta}(0)>0$)(a) $n$为奇数(b)$n$为偶数



(a)



(b)

图7　无损耗双口网络$N_\beta$的$LC$梯形网络的实现($\hat{S}_{22\beta}(0)<0$)(a) $n$为奇数(b) $n$为偶数

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$；这正是终端接电阻$R_2$的$LC$梯形网络，如图7所示。

比较上述几种实现我们看到，(56)式选取正号所得的网络元件其输出端口的某个串联电感归并到$N_\beta$中，(56)式选取负号即得一梯形网络，它允许某个并联电容归并到$N_\beta$中。

我们用下列例子来说明上述结果。

例2.

研究与例1相同的例题。则我们有：

$$R_2=200\Omega,\ \omega_c=10^8 rad/s,\tag{65a}$$

$$\delta = 2.23607,\ n = 5 \tag{65b}$$

当(56)式选取正号时，我们利用(62)式，得

$$L_1 = 0.553\mu\text{H}, \tag{66a}$$

$$C_2 = 36.180\text{pF}, \tag{66b}$$

$$L_3 = 1.789\mu\text{H}, \tag{66c}$$

$$C_4 = 36.180\text{pF}, \tag{66d}$$

$$L_5 = 0.553\mu H; \tag{66e}$$

同样，当(56)式选取负号时，由(64)式得：

$$C_1 = 13.820\text{pF}, \tag{67a}$$

$$L_2 = 1.447\mu\text{H}, \tag{67b}$$

$$C_3 = 44.721\text{pF}, \tag{67c}$$

$$L_4 = 1.447\mu\text{H}, \tag{67d}$$

$$C_5 = 13.820\text{pF} \tag{67e}$$

相应的网络实现由图5给出。

**5.低通等波纹放大器的显式公式**

研究$n$阶低通切比雪夫传输功率增益特性

$$G(\omega^2) = \frac{K_n}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)},\quad K_n \geqq 1, \tag{68}$$

式中$\varepsilon < 1$，$C_n(\omega)$为$n$阶切比雪夫多项式。和巴特沃思情况同样地推导，我们有：

$$S_{12g}(s)S_{12g}(-s) = \frac{K_n}{K_n+\epsilon^2 C_n^2(-jy)} = \frac{1}{1+\hat{\epsilon}^2 C_n^2(-jy)}, \tag{69}$$

$$S_{22a}(s)S_{22a}(-s) = \frac{1+\epsilon^2 C_n^2(-jy)}{K_n+\epsilon^2 C_n^2(-jy)} = \alpha^{-2}\frac{1+\epsilon^2 C_n^2(-jy)}{1+\hat{\epsilon}^2 C_n^2(-jy)}, \tag{70}$$

其中，同前一样，$y = s/\omega_c$，且

$$\alpha^2 = K_n, \tag{71a}$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon/\alpha \tag{71b}$$

**$N_a$的系数约束**

和(21)式一样，令$\hat{S}_{22a}(s)$为(70)式的最小相位因式分解，且将其显式表示为两个霍尔维茨多项式$p(y)$和$\hat{p}(y)$之比：

$$\hat{S}_{22a}(s) = \frac{p(y)}{\hat{p}(y)} = \frac{y^n + b_{n-1}y^{n-1} + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0}{y^n + \hat{b}_{n-1}y^{n-1} + \hat{b}_{n-2}y^{n-2} + \cdots + \hat{b}_1 y + \hat{b}_0} \tag{72}$$

同时，我们在(72)式中选取正号来满足系数的要求，即$b_i > 0$和$\hat{b}_i > 0$($i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$)。将(72)式相对于传输零点(它位于无穷远处)展开成罗朗级数，从而得到：

$$\hat{S}_{22a}(s) = S_0 + S_1/s + S_2/s^2 + S_3/s^3 + \cdots, \tag{73}$$

其中

$$S_0 = 1, \tag{74a}$$

$$S_1/\omega_c = b_{n-1} - \hat{b}_{n-1}, \tag{74b}$$

$$S_2/\omega_c^2 = b_{n-2} - \hat{b}_{n-2} - \hat{b}_{n-1}(b_{n-1} - \hat{b}_{n-1}), \tag{74c}$$

$$S_3/\omega_c^3 = b_{n-3} - \hat{b}_{n-3} - \hat{b}_{n-2}(b_{n-1} - \hat{b}_{n-1}) - \hat{b}_{n-1}b_{n-2} + \hat{b}_{n-1}\hat{b}_{n-2} + \hat{b}_{n-1}^2(b_{n-1} - \hat{b}_{n-1}) \tag{74d}$$

现在我们进一步研究由阻抗$Z_3(s)$引起的系数(74)式所加给系数约束(25)式的影响。为了满足$A_1=S_1$，我们要求

$$b_{n-1}-\hat{b}_{n-1}=-\frac{2}{RC\omega_c} \tag{75}$$

将已知的关系[6, 9]

$$b_{n-1}=\frac{\sinh a}{\sin\gamma_1},\quad \hat{b}_{n-1}=\frac{\sinh\hat{a}}{\sin\gamma_1} \tag{76}$$

以及

$$a=\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon},\quad \hat{a}=\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\hat{\epsilon}} \tag{77}$$

代入(75)式且连同(71)式一起求解$K_n$，我们便得到常数

$$K_n=\epsilon^2\sinh^2\left\{n\sinh^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}\right)+\frac{2\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right]\right\} \tag{78}$$

现在我们利用这个$K_n$来证明约束$A_2=S_2$总是满足的。为了看出这一点，我们利用(76)式和关系式[6, 9]

$$b_{n-2}=\frac{n}{4}+\frac{\sinh^2 a\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}, \tag{79}$$

从而得到

$$2b_{n-2}=b_{n-1}^2+\tfrac{1}{2}n \tag{80}$$

将(80)式代入(74c)式，连同(75)式一起，并注意到(80)式对各个$\hat{b}$均成立，于是我们得到所需的等式：

$$S_2=(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})^2\omega_c^2/2=2/R^2C^2=A_2 \tag{81}$$

最后，为了满足(25b)式的要求，和(30)式一样，我们定义临界电感$L_c$，并令

$$L_c=\frac{F_2}{A_3-S_3}\geqq L, \tag{82}$$

其中

$$F_2=-\frac{2}{RC^2}=(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_c/C, \tag{83a}$$

$$A_3=-\frac{2}{R^3C^3}=\tfrac{1}{4}(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})^3\omega_c^3, \tag{83b}$$

$$S_3/\omega_c^3=b_{n-3}-\hat{b}_{n-3}-(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})(\hat{b}_{n-2}-\hat{b}_{n-1}^2)-(b_{n-2}-\hat{b}_{n-2})\hat{b}_{n-1} \tag{83c}$$

由(76)和(79)式，我们有

$$2(b_{n-2}-\hat{b}_{n-2})=b_{n-1}^2-\hat{b}_{n-1}^2 \tag{84}$$

系数$b_{n-3}$，$\hat{b}_{n-3}$可以显式地表示为：

$$b_{n-3}=\frac{\sinh a}{\sin\gamma_1}\left(\frac{n}{4}-\frac{\cos^2\gamma_1\sin\gamma_1}{\sin\gamma_3}\right)+\frac{\sinh^3 a\cos\gamma_2}{2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}, \tag{85}$$

从而得到

$$b_{n-3}-\hat{b}_{n-3}=(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\left(\frac{n}{4}-\frac{\cos^2\gamma_1\sin\gamma_1}{\sin\gamma_3}\right)+(b_{n-1}^3-\hat{b}_{n-1}^3)\frac{\cos\gamma_2\sin\gamma_1}{2\sin\gamma_3} \tag{86}$$

将(83)式代入(82)式，连同(76)、(80)及(84)－(86)式一起，不等式(82)的左端可以简化为。

$$L_c=\frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{C\omega_c^2(\sinh^2 a+\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_2-2\sinh a\sinh\hat{a}\cos\gamma_2)},\tag{87}$$

显然它是正的，表明匹配是可能的，其充要条件是寄生电感$L$不大于临界电感$L_c$，即

$$L\leqq L_c>0\tag{88}$$

**$N_c$的显式公式**

如同巴特沃思响应那样，现在我们来推导用终端接一电阻器的$LC$梯形网络来实现$N_c$的显式公式，设$L\leqslant L_c$。

仿照(38)式，均衡器的末端阻抗$Z_{22c}(s)$可以写成如下形式：

$$Z_{22c}(s)=\cfrac{R}{-RCs-\cfrac{p(y)+\hat{p}(y)}{p(y)-\hat{p}(y)}}-Ls\tag{89}$$

正如Takahasi[6，8]所证明，此项$[p(y)+\hat{p}(y)]/[p(y)-\hat{p}(y)]$可显式地展成为一个如(39)式右端所示的连分式，其系数为：

$$C_1''=\frac{2\sin\gamma_1}{\sinh a-\sinh\hat{a}},\tag{90a}$$

$$C_{2m-1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{f_{2m-1}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\tag{90b}$$

$$C_{2m+1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\tag{90c}$$

式中，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$，且

$$f_m(\sinh a,\ \sinh\hat{a})=\sinh^2 a+\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{2m}-2\sinh a\sinh\hat{a}\cos\gamma_{2m}\tag{91}$$

如前那样，最末一个电抗元件可由下列公式来确定：

$$C_n''=\frac{2\sin\gamma_1}{H''(\sinh a+\sinh\hat{a})},\quad n\text{为奇数},\tag{92a}$$

或

$$L_n''=\frac{2\sin\gamma_1}{H''(\sinh a+\sinh\hat{a})},\quad n\text{为偶数},\tag{92b}$$

在连分式展开中置$s=0$且利用

$$b_0=2^{1-n}\sinh na,\quad n\text{为奇数},\tag{93a}$$

$$b_0=2^{1-n}\cosh na,\quad n\text{为偶数},\tag{93b}$$

常数$H''$可直接由下列公式进行计算：

$$H''=\frac{\sinh na-\sinh n\hat{a}}{\sinh na+\sinh n\hat{a}},\quad n\text{为奇数},\tag{94a}$$

$$H''=\frac{\cosh na+\cosh n\hat{a}}{\cosh na-\cosh n\hat{a}},\quad n\text{为偶数},\tag{94b}$$

注意到$\hat{a}>a$，故(90)、(92)和(94)式的所有系数均为负数。将(90)及(75)、(76)式合并而得：

$$C_1''=-RC\omega_c\tag{95}$$

同样，由(90b)和$m=1$连同(87)式一起，我们有

$$L_2'' = \frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{C_1''f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})} = \frac{L_c\omega_c^2 C}{C_1''} = -\frac{L_c\omega_c}{R} \tag{96}$$

将(39)式的右端代入(89)式且利用(95)和(96)式，均衡器的末端阻抗$Z_{22c}(s)$可展成如(45)式右端所示的连分式。该连分式得到图4的梯形网络，其元件值可由下列公式显式地计算：

$$L_1 = L_c, \tag{97a}$$

$$C_{2m}L_{2m-1} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\quad m\leqq\tfrac{1}{2}(n-1), \tag{97b}$$

$$C_{2m}L_{2m+1} = \frac{4\sin\gamma_{4m+1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2 f_{2m+1}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\quad m<\tfrac{1}{2}(n-1), \tag{97c}$$

式中，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$，$n>1$且

$$C_{n-1} = \frac{2(\sinh n\hat{a}+\sinh na)\sin\gamma_1}{R\omega_c(\sinh\hat{a}-\sinh a)(\sinh n\hat{a}-\sinh na)},\quad n\text{为奇数}, \tag{98a}$$

$$L_{n-1} = \frac{2R(\cosh n\hat{a}-\cosh na)\sin\gamma_1}{\omega_c(\sinh\hat{a}+\sinh a)(\cosh n\hat{a}+\cosh na)},\quad n\text{为偶数}, \tag{98b}$$

终接电阻，当$n$为奇数时为$\hat{R}_3 = -RH''$，$n$为偶数时为$\hat{R}_3 = -R/H''$。

例3

研究与例1相同的问题，只不过现在我们希望获得一个传输功率增益为等波纹的特性。为了便于比较，我们选取$n=5$，且令通带容差在3dB以内，相应的波动因子为$\varepsilon=0.9976$。

我们首先由(78)式计算常数$K_5$，得到

$$K_5 = 0.9976^2\sinh^2\left[5\sinh^{-1}\left(\sinh\left(\frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.9976}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\sin 18^\circ}{100\times 50\times 10^{-12}\times 10^8}\right)\right]$$
$$=23564.76 \text{ 或 } 43.72\text{dB} \tag{99}$$

由(71)和(77)式，我们得到

$$\hat{\varepsilon} = 0.9976/153.50818 = 0.0064987, \tag{100a}$$

$$a = \frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.9976} = 0.17662, \tag{100b}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{5}\sinh^{-1}\frac{1}{0.0064987} = 1.14586 \tag{100c}$$

所要求的无损耗匹配网络$N_a$的元件值由公式(87)和(97)直接计算如下：

$$L_1 = \frac{4\sin 18^\circ\sin 54^\circ}{50\times 10^{-12}\times 10^{16}f_1(\sinh 0.17662,\sinh 1.14586)}$$
$$=1.01563\mu\text{H}, \tag{101a}$$

$$C_2 = \frac{4\sin 54^\circ\sin 90^\circ}{1.01563\times 10^{-6}\times 10^{16}f_2(\sinh 0.17662,\sinh 1.14586)}$$
$$=114.64375\text{pF}, \tag{101b}$$

$$L_3 = \frac{4\sin 90^\circ\sin 126^\circ}{114.64675\times 10^{-12}\times 10^{16}f_3(\sinh 0.17662,\sinh 1.14586)}$$
$$\approx 0.91363\mu H, \tag{101c}$$

$$C_4=\frac{4\sin 126^\circ \sin 162^\circ}{0.91365\times10^{-6}\times10^{16}f_4(\sinh 0.17662,\sinh 1.14586)}$$
$$=39.35167\text{pF} \tag{101d}$$

作为另一种方法，电容$C_4$也可由(98a)而算得：

$$C_4=\frac{2(\sinh 5\times1.14586+\sinh 5\times0.17662)\sin 18^\circ}{100\times10^8(\sinh 0.17662+\sinh 1.14586)(\sinh 5\times1.14586-\sinh 5\times0.17662)}$$
$$=39.35167\text{pF}, \tag{102}$$

它和(101d)完全一致。由(94a)式，可得终接电阻为：

$$\hat{R}_2=100\frac{\sinh 5\times1.14586-\sinh 5\times0.17662}{\sinh 5\times1.14586+\sinh 5\times0.17662}=98.70557\Omega \tag{103}$$

**$N_\beta$的显式公式**

由(55)及(69)式，最小相移因式分解为：

$$\hat{S}_{22\beta}(s)=\pm\frac{p_m(y)}{\hat{p}(y)}, \tag{104}$$

其中

$$p_n(y)=j^n2^{1-n}C_n(-jy) \tag{105}$$

如同巴特沃思响应那样，令$z_2(s)=R_2$。则在$N_\beta$输入端接有$\hat{R}_2$时，从输出端看进去的阻抗为：

$$Z_{22\beta}(s)=R_2\frac{\hat{p}(y)\pm p_m(y)}{\hat{p}(y)\mp p_m(y)} \tag{106}$$

注意到，不考虑常数$R_2$和负号，(106)式正是(89)式对应项$[p(y)+\hat{p}(y)]/[p(y)-\hat{p}(y)]$在$\varepsilon\to\infty$或在$p(y)$中的$a\to0$时的极限情况。于是，根据(104)式选取正号或负号，它可展成(59)或(63)式所示的连分式。

在(104)式取正号时，可用终端所接电阻$R_2$的$LC$梯形网络来实现$N_\beta$，如图6所示。其元件值由下列公式显式地确定：

$$L_1=\frac{2R_2\sin\gamma_1}{\omega_c\sinh\hat{a}}, \tag{107a}$$

$$L_{2m-1}C_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2(\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{4m-2})}, \tag{107b}$$

$$L_{2m+1}C_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{4m})} \tag{107c}$$

$m=1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{2}n\right]$，且

$$L_n=\frac{2R_2\sin\gamma_1}{\omega_c\sinh\hat{a}},\quad n\text{为奇数}, \tag{108a}$$

$$C_n=\frac{2(\cosh n\hat{a}-1)\sin\gamma_1}{R_2\omega_c(\cosh n\hat{a}+1)\sinh\hat{a}},\quad n\text{为偶数} \tag{108b}$$

终端所接的电阻由下式给出：

$$\hat{R}_2=R_2,\quad n\text{为奇数} \tag{109a}$$
$$=R_2\frac{\cosh n\hat{a}+1}{\cosh n\hat{a}-1},\quad n\text{为偶数} \tag{109b}$$

同样，在(104)式取负号时，$N_\beta$可用图7所示的$LC$梯形网络来实现，其元件值由下式给出：

$$C_1=\frac{2\sin\gamma_1}{R_2\omega_c\sinh\hat{a}},\tag{110a}$$

$$C_{2m-1}L_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2(\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{4m-2})},\tag{110b}$$

$$C_{2m+1}L_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{4m})}\tag{110c}$$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$；且

$$C_n=\frac{2\sin\gamma_1}{R_2\omega_c\sinh\hat{a}},\quad n\text{为奇数}\tag{111a}$$

$$L_n=\frac{2R_2(\cosh n\hat{a}-1)\sin\gamma_1}{\omega_c(\cosh n\hat{a}+1)\sinh\hat{a}},\ n\text{为偶数}\tag{111b}$$

$$\hat{R}_2=R_2,\quad n\text{为奇数}\tag{112a}$$

$$=R_2\frac{\cosh n\hat{a}-1}{\cosh n\hat{a}+1},\ n\text{为偶数}\tag{112b}$$

如前那样，在(104)式取正号时所得网络允许在其输出端口的串联电感归并到$N_\beta$中，在选取负号时则产生一个梯形网络，而其第一个元件是一个并联电容。

例4

研究与例3相同的问题。则由（107)—(112）式，梯形网络$N_\beta$的元件值由下式计算，在(104)式取正号时为：

$$L_1=\frac{2\times200\sin18^\circ}{10^8\sinh1.14586}=0.87441\mu\text{H},\tag{113a}$$

$$C_2=\frac{4\sin18^\circ\sin54^\circ}{0.87441\times10^{-6}\times10^{16}(\sinh^21.14586+\sin^236^\circ)}$$

$$=48.79454\text{pF},\tag{113b}$$

$$L_3=\frac{4\sin54^\circ\sin90^\circ}{48.79454\times10^{-12}\times10^{16}(\sinh^21.14586+\sin^272^\circ)}$$

$$=2.28472\mu\text{H},\tag{113c}$$

$$C_4=\frac{4\sin90^\circ\sin126^\circ}{2.28472\times10^{-6}\times10^{16}(\sinh^21.14586+\sin^2108^\circ)}$$

$$=48.79454\text{pF},\tag{113d}$$

$$L_5=\frac{4\sin126^\circ\sin162^\circ}{48.79454\times10^{-12}\times10^{16}(\sinh^21.14586+\sin^2144^\circ)}$$

$$=0.87441\mu\text{H}\tag{113e}$$

在(104)式取负号时为：

$$C_1=21.860\text{pF},\tag{114a}$$

$$L_2=1.952\mu\text{H},\tag{114b}$$

$$C_3=57.118\text{pF},\tag{114c}$$

$$L_4=1.952\mu\text{H},\tag{114d}$$

$$C_5=21.860\text{pF}\tag{114e}$$

在上述两种情况中，终端所接电阻都是$\hat{R}_2=R_2=200\Omega$。

## 结　论

本文基于散射矩阵的复数归一化原理，给出了利用隧道二极管的非互易负阻放大器设计的一般关系式。利用这些一般关系以及由 Takahasi[8]和 Green[9]导出的低通 LC梯形网络的公式，得出了具有任意阶巴特沃思或切比雪夫传输功率增益特性的最佳非互易放大器元件值的显式公式，这就使Sard[2]的结果上升到一般情况且进行了推广。和 Youla 和 Smilen[1]所提出的理论不一样，我们包含了隧道二极管的等效电路中所用到的串联寄生电感。这些公式的意义在于它们将这种放大器的设计简化为简单的算术运算。


## 致谢（略）


## 参 考 文 献


[1] D. C. Youla and L. I. Smilen, "Optimum negative-resistance amplifiers", Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, Vol. 10, pp. 241-318, Apr. 1960.

[2] E. W. Sard, "Gain-bandwidth performance of maximally flat negative-conductance amplifiers", Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, Vol. 10, pp. 319-344, Apr. 1960.

[3] E. S. Kuh and J. D. Patterson, "Design theory of optimum negative-resistance amplifiers", *Proc. IRE*, Vol. 49, pp. 1043-1050, June 1961.

[4] Y. T. Chan and E. S. Kuh, "A general matching theory and its application to tunnel diode amplifiers", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, pp. 6-18, Mar. 1966.

[5] E. S. Kuh and R. A. Rohrer, "Theory of Linear Active Networks", Holden-Day, San Francisco, Calif., 1967.

[6] W. K. Chen, "Theory and Design of Broadband Matching Networks", Pergamon Press, Oxford, 1976.

[7] D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 30-50, Mar. 1964.

[8] H. Takahasi, "On the ladder-type filter network with Tchebysheff response", *J. Inst. Elec. Commun. Engrs. Japan*, Vol. 34, pp. 65-74, Feb. 1951.

[9] E. Green, "Synthesis of ladder networks to give Butterworth or Chebyshev response in the pass band", *Proc. IEE*, Lond., Vol. 101, pt. IV, pp. 192-203, Aug. 1954.

[10] D. C. Youla, "An extension of the concept of scattering matrix", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 310-312, June 1964.

[11] R. M. Fano, "Theoretical limitation on the broadband matching of arbitrary impedances", *J. Franklin Inst.*, Vol. 249, pp. 57-83, 139-154, Jan., Feb. 1950.

# 二十四、最佳宽带阻抗匹配网络综合的显式公式（I）


## 摘　　要

本文证明了最实际的RLC型负载在一个有限频带内可以与电阻性信号源进行最佳匹配，以实现任意阶的巴特沃思或切比雪夫传输功率增益特性。证明和推广了参考文献中所给出的方法。本文提出了最佳设计这种匹配网络的显示公式，从而避免了在选取最佳设计参数中使用设计曲线或解非线性方程。这些公式的意义在于把设计问题简化为算术运算。还给出了说明性的例子，阐明了公式的具体应用。


**1.引言**

电子电路、滤波器和级间放大器的设计中，一个基本问题是在一个给定的信号源和给定的负载之间设计一个耦合网络，使得在一个感兴趣的频带内从信号源到负载所传输功率为最大。我们把这种网络的功能称为阻抗匹配或阻抗均衡。

Bode〔1〕首先研究了阻抗匹配问题，建立了一类非常有用的、但仅限于 RC 型或RL型负载的基本增益-带宽制约关系。Fano〔2〕推广了Bode的工作，并以十分普遍的方法解决了在一个任意无源负载和电阻性信号源之间的阻抗匹配问题。基于复数归一化原理，Youla〔3〕导出了一种新理论，它避开了Fano工作中所遇到的某些困难。最近，Chien〔4〕和 Satyanarayana〔5〕把Youla的工作推广到可具有频变信号源的情况。

在最实际的情况下，信号源通常可以表示为一个理想的电压源串联一个纯电阻器，它也可以是另一个其它网络的戴维南等效网络。负载阻抗是由一个电阻器和一个电容器的并联组合，然后再与一个电感器相串联，如图1所示。这一负载阻抗也可包括了一个实际器件的寄生效应。问题是在一个频带内，以一定的容差与此负载阻抗相匹配，它常常在宽带匹配放大器的设计中出现。Fano〔2〕曾研究了这个问题并得到了初步解答，他指出了如何综合一个切比雪夫匹配网络。

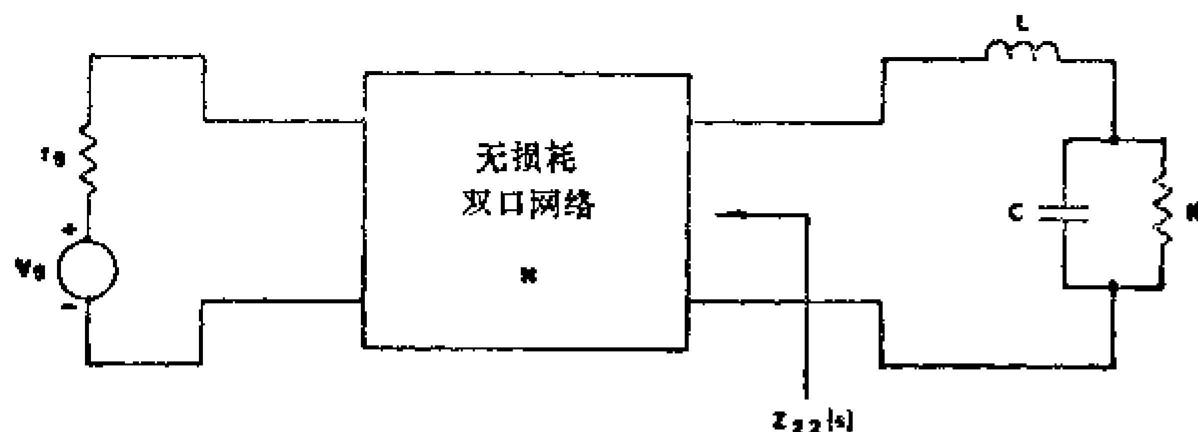



图1　在有限的频带内可以得到低通匹配的宽带匹配问题的示意图

Matthaei[6]改进和推广了Fano 的设计方法，提供了选择最佳设计参数的实用方法。在Matthaei称为情况1的一类特殊情况中，Levy[7]曾导出了一种简单理论。因为一般说来设计方程是非线性的，为选择最佳参数需要利用图解结果。

本文的目的在两个方面。首先，我们将证明示于图1的任意 RLC 型负载可在有限的频带内与电阻性信号源之间进行最佳匹配，以实现任意阶的巴特沃思或切比雪夫传输功率特性，证实与推广了Matthaei[6]给出的方法。第二，对于图1的任意RLC 型负载，我们将导出设计最佳的巴特沃思和切比雪夫匹配网络的显式公式，因此，避免了在选取最佳设计参数中使用曲线和解非线性方程。因而，我们把这些匹配网络的设计简化为算术运算。

**2.巴特沃思响应的基本约束**

参看图1，我们的目的是使RLC型负载与电阻性信号源相匹配，且实现一个$n$阶巴特沃思传输功率特性，

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}},\quad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{1}$$

其最大的可达直流增益为$K_n$，$\omega_c$为3分贝带宽。令$S_{22}^i(s)$是归一化到下列负载阻抗$z_2(s)$的、在无损耗匹配网络$N$的输出端口以电流为基的反射系数，

$$z_2(s)=Ls+\frac{R}{RCs+1} \tag{2}$$

因此我们有[8]，[9]

$$S_{22}^i(s)=\frac{Z_{22}-z_2(-s)}{Z_{22}(s)+z_2(s)} \tag{3}$$

$Z_{22}(s)$是当输入端口接$r_g$时，从输出端口看进去的策动点阻抗。令

$$A(s)=\frac{s-1/RC}{s+1/RC} \tag{4}$$

是由$z_2(-s)$的开右半复频平面的极点所定义的实正则全通函数，其极点在$1/RC$处。因此由下列关系式[9]所定义的函数

$$\rho(s)=A(s)S_{22}^i(s) \tag{5}$$

是一个有界实函数，且在闭右半复频平面内解析。因为双口网络$N$是无损耗的，故传输功率增益可用有界实反射系数表示为以下关系式：

$$G(\omega^2)=1-|\rho(j\omega)|^2 \tag{6}$$

把(1)式代入(6)式且借助于解析延拓理论得到：

$$\rho(s)\rho(-s)=\delta^{2n}\frac{1+(-1)^n(y/\delta)^{2n}}{1+(-1)^n y^{2n}} \tag{7}$$

其中

$$\delta=(1-K_n)^{1/2n} \tag{8}$$

$$y=s/\omega_c \tag{9}$$

在$K_n=1$的情况下，(7)式的分子简化为$(-1)^n y^{2n}$。

为便于讨论，令$\rho(s)$是(7)式的最小相位解，且它可表示为两个霍尔维茨多项式之比：

$$\begin{aligned}\rho(s)&=\delta^n\frac{q(y/\delta)}{q(y)}\\&=\frac{y^n+a_{n-1}\delta y^{n-1}+a_{n-2}\delta^2y^{n-2}+\cdots+a_1\delta^{n-1}y+\delta^n}{y^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_1y+1}\end{aligned} \tag{10}$$

(7) 式在闭右半复频平面内解析的最一般解为：

$$\rho(s) = \pm\eta(s)\rho(s) \tag{11}$$

其中$\eta(s)$是一个任意实正则全通函数。

现在我们来证明一阶实正则全通函数已足够实现匹配。于是令

$$\rho(s) = \delta^{n}\,\frac{s-\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{q(y/\delta)}{q(y)} \tag{12}$$

式中$\sigma$是非负的实数。

为了得到负载施加给匹配网络$N$的基本约束，我们求助于Youla的理论〔3〕。根据他的理论，负载$z_2(s)$在无穷远处拥有一个第IV类3阶零点。为了应用他的理论，我们进一步计算所需的函数以及在这一传输零点处的罗朗级数展开式。其结果为：

$$A(s) = \frac{RCs-1}{RCs+1}$$

$$= 1 - 2/RCs + 2/R^2C^2s^2 - 2/R^3C^3s^3 + \cdots \tag{13a}$$

$$= A_0 + A_1/s + A_2/s^2 + A_3/s^3 + \cdots \tag{13b}$$

$$F(s) = 2r_2(s)A(s) = -2/RC^2s^2 + 4/R^2C^3s^3 + \cdots \tag{14a}$$

$$= F_0 + F_1/s + F_2/s^2 + F_3/s^3 + \cdots \tag{14b}$$

其中$r_2(s)$表示$z_2(s)$的偶部；且

$$\rho(s) = \rho_0 + \rho_1/s + \rho_2/s^2 + \rho_3/s^3 + \cdots \tag{15}$$

其中

$$\rho_0 = 1 \tag{16a}$$

$$\rho_1/\omega_c = (\delta-1)a_{n-1} - 2\hat{\sigma} \tag{16b}$$

$$\rho_2/\omega_c^2 = (\delta^2-1)a_{n-2} - (\delta-1)(a_{n-1}+2\hat{\sigma})a_{n-1} + 2\hat{\sigma}^2 \tag{16c}$$

$$\begin{aligned}\rho_3/\omega_c^3 = {} & (\delta^3-1)a_{n-3} - (\delta^2-1) \\ & \cdot(2\hat{\sigma}+a_{n-1})a_{n-2} + (1-\delta)a_{n-1}a_{n-2} \\ & + (\delta-1)(2\hat{\sigma}^2 + a_{n-1}^2 + 2\hat{\sigma}a_{n-1})a_{n-1} - 2\hat{\sigma}^3\end{aligned} \tag{16d}$$

其中$\hat{\sigma} = \sigma/\omega_c$，

$$a_{n-1} = 1/\sin\gamma_1 \tag{17a}$$

$$a_{n-2} = 1/(2\sin^2\gamma_1) = \frac{1}{2}a_{n-1}^2 \tag{17b}$$

$$a_{n-3} = \frac{\cos\gamma_2}{2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3} = \frac{a_{n-1}^2\cos\gamma_2}{2\sin\gamma_3} \tag{17c}$$

$$\gamma_m = m\pi/2n,\quad m = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{18}$$

对于一个第IV类3阶传输零点，由负载加给系数(13)—(16)式的基本约束变为〔3〕，〔9〕：

$$A_k = \rho_k,\quad k = 0,\ 1,\ 2 \tag{19a}$$

$$F_2/(A_3-\rho_3) \geqslant L \tag{19b}$$

因此条件$A_0 = \rho_0$总是满足的。为了满足条件$A_1 = \rho_1$，我们要求

$$-2/RC = [(\delta-1)a_{n-1} - 2\hat{\sigma}]\omega_c \tag{20}$$

从而得到

$$\delta = 1 - \frac{2(1-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_c} \tag{21}$$

将其代入(8)式得到直流增益

$$K_n=1-\left[1-\frac{2(1-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right]^{2n} \tag{22}$$

现在我们来说明，利用(21)式给出的$\delta$，第三个约束$A_2=\rho_2$总是满足的。

$$\rho_2/\omega_c^2=(\delta^2-1)a_{n-2}-(\delta-1)(a_{n-1}+2\sigma)a_{n-1}+2\sigma^2$$

$$=\frac{1}{2}[(\delta-1)a_{n-1}-2\sigma]^2=-\frac{2}{R^2C^2\omega_c^2}=A_2/\omega_c^2 \tag{23}$$

最后，我们有约束(19b)式。为了满足这一要求，我们定义

$$L_a=\frac{F_2}{A_3-\rho_3} \tag{24}$$

把从(13)，(14)和(16d)式所得到的$A_3$，$F_2$和$\rho_3$，代入(24)式连同(17)和(21)式一起，再经过一些数学运算之后，电感$L_a$可得到简化，其结果是意外的简单，且为：

$$L_a=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{25}$$

因此，在具有(22)式所确定的$K_n$时，可进行匹配的充要条件是串联电感$L$不超过$L_a$。为了证明对图1的任意$RLC$型负载可以进行匹配，我们必须说明存在一个非负的实数$\sigma$，使得$L_a$至少可以做得与给定的$L$一样大，且满足(22)式的约束($0\leqslant K_n\leqslant 1$)。为了实现这一点，令

$$x=RC\omega_c \tag{26}$$

$$u=\frac{(1-\delta)x}{2\sin\gamma_1} \tag{27}$$

利用(26)和(27)式，(21)和(25)式可写成：

$$\sigma/\omega_c=(1-u)/x \tag{28}$$

$$\omega_c L_a=\frac{4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{u[4\sin^2\gamma_1(u-x\sin\gamma_1)^2+x^2\sin^2\gamma_2+4(1-u)\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{29}$$

显然，在$0\leqslant u\leqslant 1$时，上式为正值，正如(28)式所要求。从(27)式我们有

$$\delta=1-\frac{2u\sin\gamma_1}{x} \tag{30}$$

为了完成证明，我们必须证明存在一个非负实数$u$，$0\leqslant u\leqslant 1$，使得$L_a$至少做得和$L$一样大且满足约束(30)式($0\leqslant\delta\leqslant 1$)。为此，分两种情况进行讨论。

**情况1**：$x\geqslant 2\sin\gamma_1$。在此情况下，最大可能的$u$为1。把$u=1$代入(29)式，从而得到：

$$L_{a1}=L_a|_{u=1}=\frac{xR\sin\gamma_3}{\sin\gamma_1[(x-\sin\gamma_1)^2+\cos^2\gamma_1]\omega_c}>0 \tag{31}$$

为充分地讨论，需研究两种子情况：

**子情况1**：$L\leqslant L_{a1}$。则为使$K_n$最大，我们选取$u=1$，从而得到$\sigma=0$和

$$K_n=1-\left(1-\frac{2\sin\gamma_1}{x}\right)^{2n} \tag{32}$$

**子情况2**：$L>L_{a1}$。为使$K_n$最大，我们在(29)式中令$L_a=L$，从而得到一个用$u$表示的三次方程：

$$g(u)=c_1u^3+c_2u^2+c_3u+c_4=0 \tag{33}$$

其中

$$c_1 = 4\sin^2\gamma_1 \tag{34a}$$
$$c_2 = -4\sin\gamma_1(2x\sin^2\gamma_1 + \sin\gamma_3) \tag{34b}$$
$$c_3 = 4x^2\sin^4\gamma_1 + x^2\sin^2\gamma_2 + 4\sin\gamma_1\sin\gamma_3 \tag{34c}$$
$$c_4 = -(4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L\omega_c \tag{34d}$$

现在我们必须证明，在$0\leqslant u\leqslant 1$的范围内，三次方程(33)式拥有一个实根。为此，我们作出$g(u)$为$u$的函数的图形。在$u=0$时，$g(u)=c_4$为负值，在$u=1$时，由$L_{a1}$的真正定义，我们有

$$g(1)=c_1+c_2+c_3+c_4\geqslant c_1+c_2+c_3+c_4'=0 \tag{35}$$

其中

$$c_4' = -(4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L_{a1}\omega_c \tag{36}$$

事实上，$g(u)$的斜率总是正的：

$$\frac{dg(u)}{du}=3c_1u^2+2c_2u+c_3$$
$$=4(u-1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+4(x-2u\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1$$
$$>0 \tag{37}$$

从这些观察我们可看到$g(u)$为$u$的函数的图形必然具有如图2所示的形式。这条曲线与$u$轴的交点给出了所要求的$u$值，当将其代入(30)式中，将得到如(22)式所示的最大可达的直流增益$K_n$。

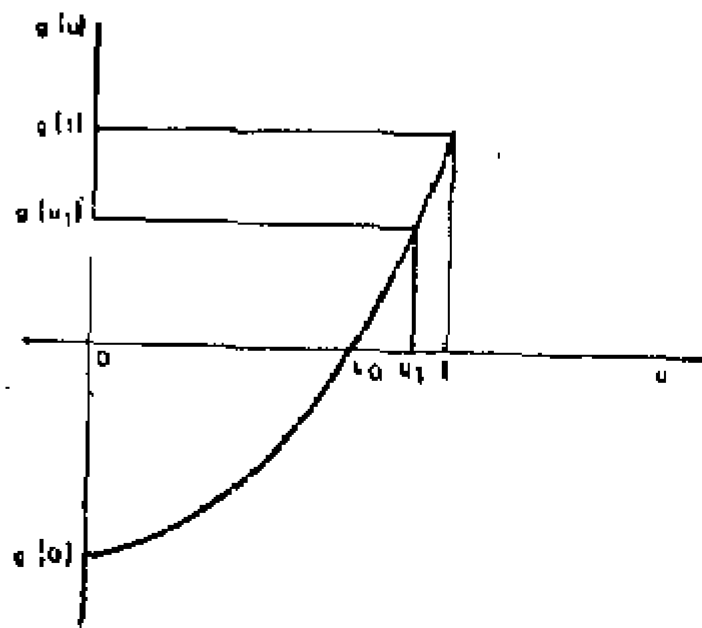


图2 在$0\leqslant u\leqslant 1$的范围内，三次方程(33)式或利用适当修正的三次方程(97)的图解

**情况2：** $x<2\sin\gamma_1$。从(30)式可明显看出，最大可达值$u$为$x/(2\sin\gamma_1)<1$，它相应于$\delta=0$。把这一值代入(29)式，得到：

$$L_{a2}=L_a|_{u=\frac{x}{2\sin\gamma_1}}$$
$$=\frac{8R\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}{[(x-\sin\gamma_3)^2+(1+4\sin^2\gamma_1)\sin\gamma_1\sin\gamma_3]\omega_c}>0 \tag{38}$$

正象情况1一样，需研究两种子情况：

**子情况1.** $L\leqslant L_{a2}$。则为使$K_n$最大，我们选取$u=x/(2\sin\gamma_1)$，从而得到$\delta=0$，$K_n=1$和

$$\frac{\sigma}{\omega_c}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2\sin\gamma_1}\right)>0 \tag{39}$$

**子情况2.** $L>L_{a2}$。正如以前一样，我们作出$g(u)$以$u$为函数的图形。在$u=0$时，$g(u)=c_4$是负的，在$u=u_1=x/(2\sin\gamma_1)$时我们有：

$$g(u_1)=c_1u_1^3+c_2u_1^2+c_3u_1+c_4$$
$$\geqslant c_1u_1^3+c_2u_1^2+c_3u_1+c_4''=0 \tag{40}$$

其中

$$c_4''=-(4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L_{a2}\omega_c \tag{41}$$

因为(37)式仍然成立，所以$g(u)$为$u$的函数的图形再次具有图2所示的形式，从而得到所希望的结果。

因此，我们已经证明了图1的负载$RLC$型可以在一个频带内与一个电阻性信号源进行匹配，从而实现任意阶的最大平坦增益响应。

**3.巴特沃思响应的显式公式**

在本节中，我们将导出设计最佳巴特沃思匹配网络的显式公式。

把(3)，(4)式代入(5)式连同(2)式一起求解$Z_{22}(s)$，从而得到匹配网络的末端阻抗：

$$Z_{22}(s)=-\frac{R[\rho(s)-1]}{RCs[1-\rho(s)]-[1+\rho(s)]}-Ls$$

$$=\frac{R}{-RCs+\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}}-Ls \tag{42}$$

根据Youla理论，假若满足前一节中的系数约束，则$Z_{22}(s)$保证是正实的。

利用(12)式连同(10)式一起，$[1+\rho(s)]/[1-\rho(s)]$可以显式地表示成连分式的形式：

$$\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{s[q(y)+\delta^n q(y/\delta)]+\sigma[q(y)-\delta^n q(y/\delta)]}{s[q(y)-\delta^n q(y/\delta)]+\sigma[q(y)+\delta^n q(y/\delta)]}$$

$$=C'_a s+\frac{1}{L'_a s+Z(s)} \tag{43}$$

其中$Z(s)$是展开式的余项，且

$$C'_a=\frac{2}{(1-\delta)a_{n-1}\omega_c+2\sigma} \tag{44}$$

$$L'_a=\frac{8\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-\delta)x[\omega_c^2C_a'^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{45}$$

其中我们在导出(45)式时而引用了(21)式。再次利用该式，我们能证明：

$$C'_a=RC \tag{46a}$$

$$L'_a=L_a/R \tag{46b}$$

把这两式代入(42)式，则末端阻抗可表示为：

$$Z_{22}(s)=(L_a-L)s+RZ(s) \tag{47}$$

其中

$$Z(s)=\frac{1-\rho(s)}{1-RCs+\rho(s)(1+RCs)}-\frac{L_a s}{R} \tag{48}$$

为了便于我们推导显式公式，必须区分四种情况，每一种情况对应于前节末尾所叙述的一种情况。

**情况1.** $x\geqslant 2\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{a1}$。在这种情况下，$\sigma=0$和最大可达$K_n$由(32)式给出。在$\sigma=0$时，(42)式简化为：

$$Z_{22}(s)=\frac{R}{-RCs+\dfrac{q(y)+\delta^n q(y/\delta)}{q(y)-\delta^n q(y/\delta)}}-Ls \tag{49}$$

正象Takahasi[10]所说明，在(49)式右边第一项之分母的第2项可显式地展成连分式的形式，且由[9]给出：

$$\frac{q(y)+\delta^n q(y/\delta)}{q(y)-\delta^n q(y/\delta)}=C_1^y y+\cfrac{1}{L_2^y y+\cfrac{1}{C_3^y y+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H^y}}}} \tag{50}$$

其中

$$C_1^y=\frac{2\sin\gamma_1}{1-\delta} \tag{51a}$$

$$C''_{2m-1}L''_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{1-2\delta\cos\gamma_{4m-2}+\delta^2} \tag{51b}$$

$$C''_{2m+1}L''_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2} \tag{51c}$$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$，其中$\left[\frac{1}{2}n\right]$表示不大于$\frac{1}{2}n$的最大整数。常数项$H''$可以直接从(50)式、令$s=0$且借助于$q(0)=1$来确定。其结果为：

$$H''=\left[\frac{1+\delta^n}{1-\delta^n}\right]^{\pm 1} \tag{52}$$

式中±号是分别根据$n$为偶数还是奇数而确定。最后一个的电抗元件可由下列公式确定：

$$C''_n=\frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)H''},\quad n\text{为奇数} \tag{53a}$$

$$L''_n=\frac{2\sin\gamma_1}{(1+\delta)H''},\quad n\text{为偶数} \tag{53b}$$

把(50)式代入(49)式连同(31)和(44)—(46)式一起，末端阻抗可表示为连分式：

$$Z_{22}(s)=(L_{a1}-L)s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{H}}}} \tag{54}$$

其中

$$L_1=L_{a1} \tag{55a}$$

$$C_{2m}L_{2m-1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m}+\delta^2)},\quad m\leqslant\frac{1}{2}(n-1) \tag{55b}$$

$$C_{2m}L_{2m+1}=\frac{4\sin\gamma_{4m+1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2(1-2\delta\cos\gamma_{4m+2}+\delta^2)},\quad m<\frac{1}{2}(n-1) \tag{55c}$$

其中 $m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$，$n>1$和

$$C_{n-1}=\frac{2(1+\delta^n)\sin\gamma_1}{R(1-\delta^n)(1+\delta)\omega_c},\quad n\text{为奇数} \tag{56a}$$

$$L_{n-1}=\frac{2R(1-\delta^n)\sin\gamma_1}{(1+\delta^n)(1+\delta)\omega_c},\quad n\text{为偶数} \tag{56b}$$

这表明$Z_{22}(s)$可实现为终端接一个电阻器的$LC$梯形网络，如图3所示。梯形网络的终端阻抗可从(49)式、令$s=0$而得到，即

$$R_{22}=R\frac{1-\delta^n}{1+\delta^n} \tag{57}$$

**情况2.** $x\geqslant 2\sin\gamma_1$和$L>L_{a1}$。从(33)式，$g(u)$ 的所要求的实根$u_0$可利用三次方程的标准公式[11]而进行计算。在此处我们的目的是导出该根的显式公式，将其代入(28)式则得到所要求的$\sigma$值。

参看(34)式，我们首先计算量$p=(3c_1c_3-c_2^2)/9c_1^2$，在进行了一些数学运算之后，它可简化且可表示为下列形式：

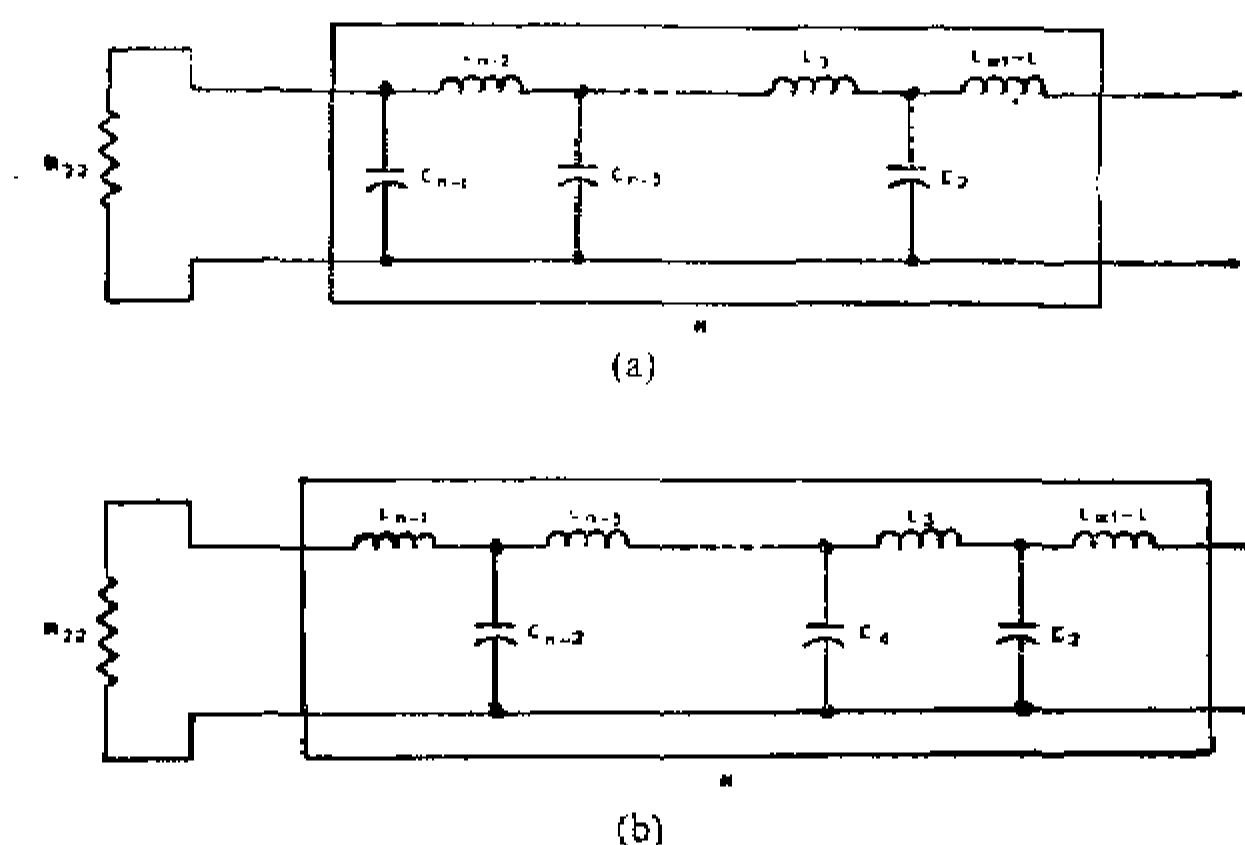


图3　匹配网络的末端阻抗实现为一个终端接电阻器的$LC$梯形网络
(a) $n$为奇数　(b) $n$为偶数

$$p=\frac{3c_1c_3-c_2^2}{9c_1^2}=\frac{(x-2\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_3}{9\sin\gamma_1}>0 \tag{58}$$

这表明(33)式所要求的实根$u_0$可以显式地表示为：

$$u_0=\frac{2x\sin^2\gamma_1+\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}-2\sqrt{p}\sinh\frac{\phi}{3} \tag{59}$$

其中

$$\phi=\sinh^{-1}\frac{w}{(\sqrt{p})^3} \tag{60}$$

$$w=\frac{(2x\sin^2\gamma_1-\sin\gamma_3)}{54\sin^3\gamma_1}[3(x-2\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+(2x\sin^2\gamma_1+\sin\gamma_3)^2]-\frac{xR\sin\gamma_3}{2\omega_c L\sin\gamma_1} \tag{61}$$

把(59)式代入(28)式得到所要求的$\sigma$值：

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left[1+2\sqrt{p}\sinh\frac{\phi}{3}-\frac{2x\sin^2\gamma_1+\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}\right] \tag{62}$$

我们注意到在推导(59)式中，已经引用$w$为非负值这一事实。为了看清这一点，我们假定$w$为非负值。则根据三次方程理论，对于$\sqrt{p}$我们必须选取负号，这表明$2\sqrt{p}\sinh\phi/3$是负值。它表示

$$u_0=1+\frac{2(x-2\sin\gamma_1)\sin\gamma_1}{3}-2\sqrt{p}\sinh\frac{\phi}{3}>1 \tag{63}$$

这将与早先的推断(第2节情况1)的子情况2)相矛盾，因为(33)式的唯一实根必须在0和1之间

出现。因此，$w$必须是非负值。最后，利用(62)式，常数$K_n$可由(22)式确定。

**情况3**. $x<2\sin\gamma_1$和 $L\leqslant L_{c2}$。则为使$K_n$最大，我们必须选取 $u=u_-=x/(2\sin\gamma_1)$，从而得到$\delta=0$，$K_n=1$和如(39)式所示的$\sigma$值。

**情况4**. $x<2\sin\gamma_1$和$L>L_{c2}$。因为在此情况下，(58)式仍然成立,所要求的$\sigma$值可用(62)式计算。利用这一$\sigma$值，直流增益$K_n$由(22)式确定。

我们将用下列例子来说明上述结果。

例1. 令

$$R=100\,\Omega$$
$$C=100\text{pF}$$
$$L=0.5\mu\text{H}$$
$$n=5$$
$$\omega_c=10^8\text{rad/s}$$

我们首先计算：

$$x=RC\omega_c=1>2\sin 18^\circ=0.61803 \tag{64}$$

从(31)式进一步计算

$$L_{c1}=\frac{100\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ[(1-\sin 18^\circ)^2+\cos^2 18^\circ]10^8}=1.89443\mu\text{H} \tag{65}$$

因为$L<L_{c1}$，适用于情况1，故匹配网络$N$可实现为一个$LC$梯形网络。从(32)式，最大可达直流增益$K_5$为：

$$K_5=1-(1-2\sin 18^\circ)^{10}=0.99993 \tag{66}$$

从而得到$\delta=(1-K_5)^{1/10}=0.38197$。应用公式(55)，得出$LC$梯形网络的元件值如下：

$$C_2=\frac{4\sin 54^\circ\sin 90^\circ}{1.89443\cdot 10^{-3}\cdot 10^{16}(1-2\cdot 0.38197\cos 72^\circ+0.14590)}$$
$$=187.74978\text{pF} \tag{67a}$$

$$L_3=\frac{4\sin 90^\circ\sin 126^\circ}{187.74987\cdot 10^{-12}\cdot 10^{16}(1-2\cdot 0.38197\cos 108^\circ+0.14590)}$$
$$=1.24721\mu\text{H} \tag{67b}$$

$$C_4=\frac{4\sin 126^\circ\sin 162^\circ}{1.24721\cdot 10^{-3}\cdot 10^{16}(1-2\cdot 0.38197\cos 144^\circ+0.14590)}$$
$$=45.45455\text{pF} \tag{67c}$$

最末一个电抗元件$C_4$可直接从(56a)式确定，从而得到：

$$C_4=\frac{2(1+0.38197^5)\sin 18^\circ}{100\cdot(1-0.38197^5)(1+0.38197)\cdot 10^8}=45.45455\text{pF} \tag{68}$$

最后，梯形网络的终端电阻由(57)式确定。

$$R_{22}=100\frac{1-0.38197^5}{1+0.38197^5}=98.38699\,\Omega \tag{69}$$

例2. 研究与例1相同的问题，只不过现在把串联电感从0.5$\mu$H改为3$\mu$H，其余均与前同。因此适用于情况2且需外加一个全通函数，从(58)、(60)和(61)式，我们得到：

$$p=0.04244 \tag{70a}$$
$$w=0.25990 \tag{70b}$$

$$\phi = 4.08543 \tag{70c}$$

把这些值代入(62)式，得到所要求的$\sigma$值：

$$\sigma = 0.67265 \cdot 10^{8} \tag{71}$$

从而得到

$$\delta = 1 - 2(1 - 0.67265)\sin 18^{\circ} = 0.79768 \tag{72a}$$

$$K_5 = 1 - \delta^{10} = 0.89570 \tag{72b}$$

再从(12)和(17)式或参考文献[9]，[12]的设计表格，得到

$$\rho(s) = \frac{(y - 0.67265)(y^5 + 2.58136y^4 + 3.33171y^3 + 2.65765y^2 + 1.31021y + 0.32297)}{(y + 0.67265)(y^5 + 3.23607y^4 + 5.23607y^3 + 5.23607y^2 + 3.23607y + 1)} \tag{73}$$

作为校核，我们从(25)式计算$L_a$，得到$L_a = 3\mu H$，这正如所料。

最后，从(47)和(48)式，匹配网络的末端阻抗可确定为：

$$Z_{22}(s) = 100Z(s) = 100\frac{1.03554y^5 + 3.01209y^2 + 3.48051y + 1.30749}{0.97952y^4 + 2.84914y^3 + 3.74014y^2 + 2.53964y + 0.66911} \tag{74}$$

上式保证为正实函数。因为在(73)式中采用一个全通函数，则(74)式不能实现为终端接一个电阻器的梯形网络。所以必须采用稍有不同的设计方法。下面，我们将讨论应用情况2、3和4（即需要一个全通函数）中的各种方法之一。

从(48)式容易验证，$Z(s)$的偶部在$s = \sigma$处拥有一个正实零点，即$Z(\sigma) = -Z(-\sigma)$，这一零点可用一个如图4所示的Darlington $C$-型节，这至少导致$Z(s)$减少2阶。利用Youla设计表[13]，此节的元件值可显式地用$\sigma$、$Z(\sigma)$及其导数$Z'(\sigma)$来表示如下：

$$L_p = \frac{Z(\sigma) + \sigma Z'(\sigma)}{2\sigma} \tag{75a}$$

$$L_s = \frac{[Z(\sigma) - \sigma Z'(\sigma)]^2}{2\sigma[Z(\sigma) + \sigma Z'(\sigma)]} \tag{75b}$$

$$C_p = \frac{2}{\sigma[Z(\sigma) - \sigma Z'(\sigma)]} \tag{75c}$$

$$M = \frac{Z(\sigma) - \sigma Z'(\sigma)}{2\sigma} \tag{75d}$$

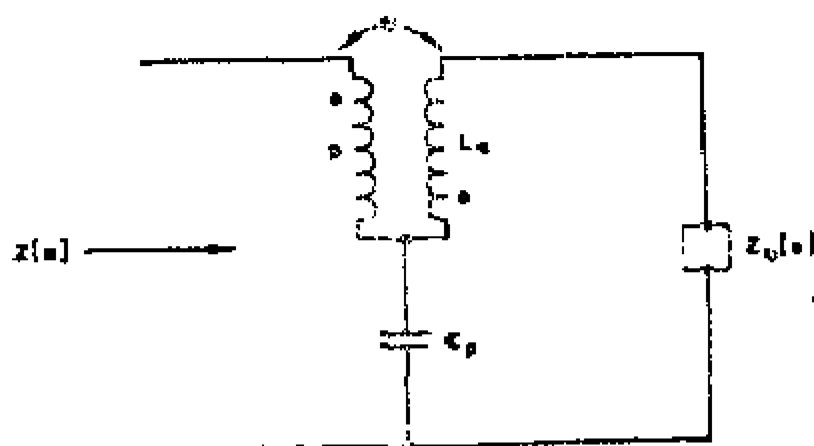



图4 Darlington $C$-型节

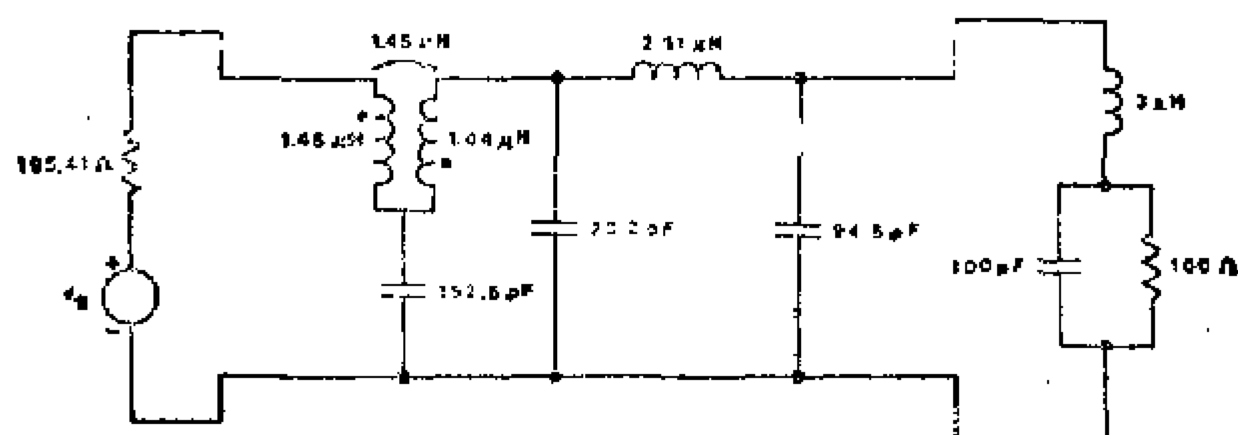



图5 拥有5阶最大平坦传输功率增益特性的最佳匹配网络及其负载

我们注意，在连分式展开式中全通环的运算中，应该从表示一个串联线圈的任意一项开始，利用这种方法，这一线圈与全通环中的$L_p$的合并将得到一个小于1的耦合系数。而该网络的任意未实现部分的阻抗$Z_a(s)$则可用一个简单的连分式展开式实现为一个终端接1欧姆电阻器的$LC$梯形网络。

例3．我们希望把阻抗$Z_{22}(s)$的(74)式实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗双口网络的输入阻抗。

首先我们校核$Z(\sigma)=-Z(-\sigma)$，然后将其展成连分式的形式，从而得到：

$$Z_{22}(s)=\cfrac{100}{0.94590y+\cfrac{1}{2.31186y+\cfrac{1}{0.23165y+\cfrac{1}{Z_a(y)}}}} \tag{76}$$

其中

$$Z_a(y)=1.93361\frac{y+0.67619}{y+0.66912} \tag{77}$$

容易验证$Z_a(y)$的偶部在$y=\sigma/\omega_c=0.67265$处拥有一个零点，这是必需的。因此，$Z_a(y)$可以用一个终端接电阻器的 Darlington $C$-型节来实现。利用(75)式，将$Z_a(y)$代替$Z(s)$，我们得到：

$$L_p=1.44110\text{H} \qquad L_s=1.45634\text{H} \tag{78a}$$

$$M=1.44870\text{H} \qquad C_p=1.52563\text{F} \tag{78b}$$

在经过解除归一化之后，带负载的匹配网络$N$用图5表示，其中包含了一个全耦合变压器。为了在实现中避免这一全耦合变压器，我们应该用$0.23165y+1/Z_a(y)$来代替$Z_a(y)$，从而开始全通循环的实现。用这种方法，电感$2.31186\mu H$和$L_p$的合并将给出一个非全耦合的变压器，这一点将在例5中说明，此处不作重复。

**4．切比雪夫的基本约束**

现在，我们把注意力转向切比雪夫响应，它比巴特沃思响应更为复杂。我们的目标是使图1所示的$RLC$型负载与一个电阻性信号源相匹配，从而实现一个具有最大可达增益$K_n$的$n$阶切比雪夫传输功率增益特性：

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+\epsilon^2C_n^2(\omega/\omega_c)}, \quad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{79}$$

其中$C_n(\omega)$是第I类的$n$阶切比雪夫多项式，$\epsilon<1$。仿照(7)式，我们有：

$$\rho(s)\rho(-s)=(1-K_n)\frac{1+\hat{\epsilon}^2C_n^2(-jy)}{1+\epsilon^2C_n^2(-jy)} \tag{80}$$

如以前一样，$y=s/\omega_c$，$\hat{\epsilon}=\epsilon(1-K_n)^{-\frac{1}{2}}$。

如(10)式中那样，令$\hat{\rho}(s)$是(80)式的最小相位分解，且可显式地表示为两个霍尔维茨多项式之比：

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(s)&=\frac{\hat{p}(y)}{p(y)}\\&=\frac{y^n+\hat{b}_{n-1}y^{n-1}+\hat{b}_{n-2}y^{n-2}+\cdots+\hat{b}_1y+\hat{b}_0}{y^n+b_{n-1}y^{n-1}+b_{n-2}y^{n-2}+\cdots+b_1y+b_0}\end{aligned} \tag{81}$$

在闭右半复频平面内解析的(80)式的最一般解由(11)式给出。在此处我们的目的证明，一阶实正则全通函数是以实现这一匹配。因此，令

$$\rho(s)=\frac{s-\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{\hat{p}(y)}{p(y)} \tag{82}$$

$\sigma$是非负实数。

$\rho(s)$在无穷远的传输零点处的罗朗级数展开式可得到为：

$$\rho(s)=\rho_0+\rho_1/s+\rho_2/s^2+\rho_3/s^3+\cdots \tag{83}$$

其中

$$\rho_0=1 \tag{84a}$$

$$\rho_1/\omega_c=\hat{b}_{n-1}-b_{n-1}-2\hat{\sigma} \tag{84b}$$

$$\rho_2/\omega_c^2=\hat{b}_{n-2}-b_{n-2}-(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})(b_{n-1}+2\hat{\sigma})+2\hat{\sigma}^2 \tag{84c}$$

$$\begin{aligned}\rho_3/\omega_c^3=&\hat{b}_{n-3}-b_{n-3}-(\hat{b}_{n-2}-b_{n-2})\\&\cdot(b_{n-1}+2\hat{\sigma})+b_{n-2}(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\\&+(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})(b_{n-1}^2+2\hat{\sigma}b_{n-1}+2\hat{\sigma}^2)-2\hat{\sigma}^3\end{aligned} \tag{84d}$$

其中　$\hat{\sigma}=\sigma/\omega_c$，

$$a=\frac{1}{n}\sinh^{-1}1/\epsilon,\qquad \hat{a}=\frac{1}{n}\sinh^{-1}1/\hat{\epsilon} \tag{85}$$

$$b_{n-1}=\frac{\sinh a}{\sin\gamma_1} \tag{86a}$$

$$\begin{aligned}b_{n-2}&=\frac{1}{4}n+\frac{\sinh^2 a\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}\\&=\frac{1}{4}n+\frac{\sinh^2 a}{2\sin^2\gamma_1}=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}b_{n-1}^2\end{aligned} \tag{86b}$$

$$\begin{aligned}b_{n-3}=&\frac{\sinh a}{\sin\gamma_1}\left(\frac{1}{4}n-\frac{\cos^2\gamma_1\sin\gamma_1}{\sin\gamma_3}\right)\\&+\frac{\sinh^3 a\cos\gamma_1}{2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}\end{aligned} \tag{86c}$$

$\gamma_n$在(18)式中给出。各个系数$\hat{b}$可简单地在各式中用$\hat{a}$代替$a$而得到。

对于第IV类传输零点，系数约束由(19)式给出。像在巴特沃思响应中一样，为了满足约束$A_1=\rho_1$，我们要求

$$-2/RC=(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})\omega_c-2\sigma \tag{87}$$

从而得到

$$K_n=1-\epsilon^2\sinh^2\left(n\sinh^{-1}\left[\sinh a-\frac{2(1-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right]\right) \tag{88}$$

利用(87)式，不难验证也满足$A_2=\rho_2$的约束。最后，为了满足(19b)式的要求，我们定义电感

$$L_\beta=\frac{F_2}{A_3-\rho_3} \tag{89}$$

从(13)，(14)和(84d)得到的$A_3$，$F_2$和$\rho_3$代入（89）式连同(86)式和（87）式一起，在进行了一些数学运算之后，$L_\beta$可简化且可用已知的参数来显式地表示。这一结果出于意料地简单且为

$$L_\beta=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{90}$$

其中*

$$f_m(\sinh a,\sinh\hat{a})=\sinh^2 a+\sinh^2\hat{a}+\sin^2\gamma_{2m}-2\sinh a\sinh\hat{a}\cos\gamma_{2m},\quad m=1,\ 2,\ \cdots,\left[\frac{1}{2}n\right] \tag{91}$$

因此，利用(88)式所确定的$K_n$，可进行匹配的充要条件是$L$不超过$L_\beta$。现在我们说明存在一个非负的实数$\sigma$使得$L_\beta$至少可做得和$L$一样大，且满足(88)式（$0\leqslant K_n\leqslant1$）。为此目的，像(26)式那样，令$x=RC\omega_c$，且

$$v=\frac{x(\sinh a-\sinh\hat{a})}{2\sin\gamma_1} \tag{92}$$

利用(87)式连同(86)式一起得到

$$v=1-RC\sigma \tag{93a}$$

$$\sinh\hat{a}=\sinh a-\frac{2v\sin\gamma_1}{x} \tag{93b}$$

把(93)式代入(90)式，$L_\beta$可写成：

$$\omega_c L_\beta=\frac{4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{v[4\sin^2\gamma_1(v-x\sinh a\sin\gamma_1)^2+x^2\cosh^2 a\sin^2\gamma_2+4(1-v)\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{94}$$

显然在$0\leqslant v\leqslant1$时，上式为正，正如(93a)所要求，它表示为：

$$\sigma=\frac{1}{RC}(1-v) \tag{95}$$

正象巴特沃思响应那样，需区分两种情况来研究。

**情况1.** $x\sinh a\geqslant2\sin\gamma_1$。在这一情况下，最大可能的$v$值是1。把$v=1$代入(94)式，从而得到

$$L_{\beta1}=L_\beta|_{v=1}=\frac{xR\sin\gamma_3}{\sin\gamma_1[(1-x\sinh a\sin\gamma_1)^2+x^2\cosh^2 a\cos^2\gamma_1]\omega_c}>0 \tag{96}$$

为了作适当的讨论，又分两种子情况来研究。

**子情况1.** $L\leqslant L_{\beta}$。为使$K_n$最大，我们选取$v=1$，从而得到$\sigma=0$以及如(88)式所示的$K_n$。

**子情况2.** $L>L_\beta$。为使$K_n$最大，在(94)式中令$L_\beta=L$，从而导致一个用$v$表示的三次方程：

$$h(v)=d_1v^3+d_2v^2+d_3v+d_4=0 \tag{97}$$

其中

$$d_1=4\sin^2\gamma_1 \tag{98a}$$

$$d_2=-4\sin\gamma_1(2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\sin\gamma_3) \tag{98b}$$

$$d_3=4x^2\sin^2\gamma_1\sinh^2 a+x^2\sin^2\gamma_2+4\sin\gamma_1\sin\gamma_3 \tag{98c}$$

---

* $f_m(\sinh a,\ \sinh\hat{a})$的一般形式在第5节中是需要的。

$$d_4 = -(4xR\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L\omega_c \tag{98d}$$

现在我们必须证明三次方程（97）在$0\leqslant v\leqslant 1$的范围内拥有一个实根。为此，我们作出$h(v)$为$u$的函数的图形。在$v=0$时，$g(v)=d_4$，它是非负的。在$v=1$时，利用$L_{\beta 1}$的定义，如(35)式那样，我们有$h(1)\geqslant 0$。还有$h(v)$的斜率总是正的，

$$\frac{dh(v)}{dv} = 4(v-1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3$$
$$+4(x\sinh a - 2v\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1$$
$$+x^2\sin^2\gamma_1 > 0 \tag{99}$$

从这些结果，我们可看出$h(v)$为$u$的函数的图形，在用$h(v)$代替$g(u)$，$v$代替$u$后，是与图 2 所示的图形相同。这一曲线与$v$轴的交点给出所要求的$v$值，再将此$v$值代入（95）式，连同(88)式一起得到最大可达的常数$K_n$。

**情况2．** $x\sinh a < 2\sin\gamma_1$。显然，正如(88)式所得连同(93a)一起，最大可能的$v$值为：

$$v = v_1 = \frac{x\sinh a}{2\sin\gamma_1} \tag{100}$$

它对应于$K_n=1$。把这$v$值代入(94)式得到：

$$L_{\beta 2} = L_\beta\big|_{v=v_1} = \frac{8R\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}{\sinh a[(x\sinh a - \sin\gamma_3)^2 + (1+4\sin^2\gamma_1)\sin\gamma_1\sin\gamma_3 + x^2\sin^2\gamma_2]\omega_c} > 0 \tag{101}$$

如同情况1一样，又分两种情况来研究。

**子情况1．** $L\leqslant L_{\beta 2}$。因此为使$K_n$最大，我们选取$v=v_1$，$K_n=1$且

$$\frac{\sigma}{\omega_c} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x\sinh a}{2\sin\gamma_1}\right) > 0 \tag{102}$$

**子情况2．** $L > L_{\beta 2}$。如同以前一样，我们能证明$h(0)<0$和$h(v_1)\geqslant 0$。因此(99)式仍然有效，所以$h(v)$为$u$的函数的图形在分别用$h(v)$，$v$和$v_1$代替$g(u)$，$u$和$u_1$后再一次具有图2所示的形式。

因此，我们已经证明，在一个频带内，可在图1中的任意$RLC$型负载与电阻性信号源之间进行匹配，且实现任意阶的等波纹增益响应。

**5．切比雪夫响应的显式公式**

在本节中，我们导出设计最佳切比雪夫的匹配网络公式。

仿照第 3 节中所概括的适用于巴特沃思响应的方法，我们研究下列一项连分式展开式：

$$\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{s[p(y)+\hat{p}(y)]+\sigma[p(y)-\hat{p}(y)]}{s[p(y)-\hat{p}(y)]+\sigma[p(y)+\hat{p}(y)]}$$
$$= C'_\beta s + \frac{1}{L'_\beta s + Z(s)} \tag{103}$$

其中

$$C'_\beta = \frac{2\sin\gamma_1}{(\sinh a - \sinh a)\omega_c + 2\sigma\sin\gamma_1} \tag{104}$$

$$L'_\beta = \frac{(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_c + 2\sigma}{(1-RC\sigma)(b_{n-2}+\hat{b}_{n-2})\omega_c^2 + \sigma(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_c - RC\omega_c^3(b_{n-3}-\hat{b}_{n-3})} \tag{105}$$

借助于(86)和(87)式，且进行一些数学运算后，上式可简化为：

$$L'_\beta = \frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2 f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{106}$$

从而得到

$$C'_\beta = RC \tag{107}$$

$$L'_\beta = L_\beta/R \tag{108}$$

将这些值代入(42)式，将$L_\beta$代替$L_a$，匹配网络的终端阻抗$Z_{22}(s)$可如(47)和(48)式那样表示。

正象巴特沃思响应那样，应区分四种情况：

**情况1.** $x\geqslant\sinh a\geqslant 2\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{\beta1}$。在此情况下，$\sigma=0$和最大可达常数$K_n$为：

$$K_n = 1-\epsilon^2\sinh^2\left[n\sinh^{-1}\left(\sinh a-\frac{2\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right)\right] \tag{109}$$

在$\sigma=0$时，(103)式简化为

$$\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{p(y)+\hat{p}(y)}{p(y)-\hat{p}(y)} \tag{110}$$

正如Takahasi[10]所说明，(110)式可展成如(50)式右边的连分式，连分式的系数为下列形式〔见(91)式〕：

$$C''_1 = \frac{2\sin\gamma_1}{\sinh a-\sinh\hat{a}} \tag{111a}$$

$$C''_{2m-1}L''_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{f_{2m-1}(\sinh a,\sinh\hat{a})} \tag{111b}$$

$$C''_{2m+1}L''_{2m} = \frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})} \tag{111c}$$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}n\right]$，常数项$H''$可直接从(110)式令$s=0$，且借助于下列事实而得到：

$$p(0)=b_0=2^{1-n}\sinh na,\ n\text{为奇数} \tag{112a}$$

$$=2^{1-n}\cosh na,\ n\text{为偶数} \tag{112b}$$

从而得到

$$H''=\frac{\sinh na-\sinh n\hat{a}}{\sinh na+\sinh n\hat{a}},\ n\text{为奇数} \tag{113a}$$

$$=\frac{\cosh na+\cosh n\hat{a}}{\cosh na-\cosh n\hat{a}},\ n\text{为偶数} \tag{113b}$$

最末一个电抗元件值可由下式确定：

$$C''_n=\frac{2\sin\gamma_1}{(\sinh a+\sinh\hat{a})H''},\ n\text{为奇数} \tag{114a}$$

$$L''_n=\frac{2\sin\gamma_1}{(\sinh a+\sinh\hat{a})H''},\ n\text{为偶数} \tag{114b}$$

把(50)式代入(49)式，连同(107)和(108)式一起，末端阻抗可表示为如(54)式右边的、带下列系数的连分式形式：

$$L_1 = L_{\beta1} \tag{115a}$$

$$C_{2m}L_{2m-1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\quad m\leqslant\frac{1}{2}(n-1) \tag{115b}$$

$$C_{2m}L_{2m+1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2 f_{2m+1}(\sinh a,\sinh\hat{a})},\quad m<\frac{1}{2}(n-1) \tag{115c}$$

其中$m=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$，$n>1$，和

$$C_{n-1}=\frac{2(\sinh na+\sinh n\hat{a})\sin\gamma_1}{\omega_c R(\sinh a+\sinh\hat{a})(\sinh na-\sinh n\hat{a})}，n\text{为奇数} \tag{116a}$$

$$L_{n-1}=\frac{2R(\cosh na-\cosh n\hat{a})\sin\gamma_1}{\omega_c(\sinh a+\sinh\hat{a})(\cosh na+\cosh n\hat{a})}，n\text{为偶数} \tag{116b}$$

因此，$Z_{22}(s)$可实现为一个终端接1欧姆电阻器的$LC$梯形网络，如图3所示，其中用$L_{\beta 1}$代替$L_{c1}$。梯形网络的终端电阻在$n$为奇数时，$R_{22}=RH''$，在$n$为偶数时，$R_{22}=R/H''$。

**情况2.** $x\sinh a\geqslant 2\sin\gamma_1$和$L>L_{\beta 1}$。参考(97)式，且仿照(58)式，我们能证明下列的一项

$$k=\frac{3d_1 d_3-d_2^2}{9d_1^2}$$

$$=\frac{(x\sinh a-2\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_3+3x^2\sin\gamma_1\cos^2\gamma_1}{9\sin\gamma_1}>0 \tag{117}$$

上式表明(97)式所要求的实根$v_0$可显式地表示为：

$$v_0=\frac{2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}-2\sqrt{k}\sinh\frac{\phi}{3} \tag{118}$$

其中

$$\phi=\sinh^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{k^3}} \tag{119}$$

$$\zeta=\frac{(2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\sin\gamma_3)}{54\sin^3\gamma_1}\cdot[3(x\sinh a-2\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+2.25x^2\sin^2\gamma_2+(2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\sin\gamma_3)^2]-\frac{xR\sin\gamma_3}{2\omega_c L\sin\gamma_1} \tag{120}$$

把(118)式代入(95)式得到所要求的$\sigma$值：

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left(1+2\sqrt{k}\sinh\frac{\phi}{3}-\frac{2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}\right) \tag{121}$$

象巴特沃思响应一样，在导出(118)式中，我们已经用了$\zeta$为非负值的这一事实。其证明完全可用类似的方法进行。此处从略。

**情况3.** $x\sinh a<2\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{\beta 2}$。因此，为使$K_n$最大，我们象(100)式中那样，选取$v=v_1$，从而得到$K_n=1$和从(95)式得到

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left(1-\frac{x\sinh a}{2\sin\gamma_1}\right)>0 \tag{122}$$

**情况4.** $x\sinh a<2\sin\gamma_1$和$L>L_{\beta 2}$。因为(117)式在此情况下仍然有效，故所要求的$\sigma$值可利用(121)式进行计算。利用这一$\sigma$值，常数$K_n$可由(88)式确定。

我们将用下列例子来说明上述结果。

例4．令

$$R=100\Omega$$
$$C=500\text{pF}$$
$$L=0.5\mu\text{H}$$
$$n=5$$
$$\epsilon=0.50885(1-\text{dB}波纹)$$

以及 $\omega_c=10^8\text{rad/s}$

我们首先计算

$$n\sinh a=5\sinh 0.28560=1.44747$$
$$>2\sin 18^\circ=0.61803 \tag{123}$$

其中$a=0.28560$。从(96)式我们进一步计算电感：

$$L_{\beta 1}=\frac{5\cdot 100\cdot\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ[(1-5\sinh 0.28560\sin 18^\circ)^2+25\cosh^2 0.28560\cos^2 18^\circ]10^8}$$
$$=0.52755\mu\text{H} \tag{124}$$

因为$L<L_{\beta 1}$，适用于情况1，匹配网络$N$可以实现为一个$LC$梯形网络，从(109)式，最大的可达$K_5$值为：

$$K_5=1-0.50885^2\sinh^2[5\sinh^{-1}(\sinh 0.28506$$
$$-0.4\sin 18^\circ)]=0.77954 \tag{125}$$

从而得到$\hat{\epsilon}=1.08373$和$\hat{a}=0.16514$，应用(115)式，得出所要求的$LC$梯形网络元件值如下：

$$C_2=\frac{4\sin 54^\circ\sin 90^\circ}{0.52755\cdot 10^{-6}\cdot 10^{16}f_2(\sinh 0.28560,\sinh 0.16514)}$$
$$=622.03127\text{pF} \tag{126a}$$

$$L_3=\frac{4\sin 90^\circ\sin 126^\circ}{6.22031\cdot 10^{-10}\cdot 10^{16}f_3(\sinh 0.28560,\sinh 0.16514)}$$
$$=0.49760\mu\text{H} \tag{126b}$$

$$C_4=\frac{4\sin 126^\circ\sin 162^\circ}{0.49760\cdot 10^{-6}\cdot 10^{16}f_4(\sinh 0.28560,\sinh 0.16514)}$$
$$=375.97653\text{pF} \tag{126c}$$

作为校核，最末一个电抗元件$C_4$也可从(116a)确定，从而得到$C_4=375.97653\text{pF}$，$LC$梯形网络的终端电阻可得到为：

$$R_{22}=RH''=100\frac{\sinh 5\cdot 0.28560-\sinh 5\cdot 0.16514}{\sinh 5\cdot 0.28560+\sinh 5\cdot 0.16514}$$
$$=36.09755\,\Omega \tag{127}$$

例5．令

$$R=100\,\Omega$$
$$C=100\text{pF}$$
$$L=1.5\mu\text{H}$$
$$n=4$$
$$\epsilon=0.50885(1\text{–dB}波纹)$$
$$\omega_c=10^8\text{rad/s}$$

我们首先计算

$$x\sinh a = 0.36463 < 2\sin 22.5^\circ = 0.76537$$

其中　$a = 0.35699$以及$x = 1$，从(107)式我们进一步计算电感

$$L_{\beta 2} = (8 \cdot 100 \sin^2 22.5^\circ \sin 67.5^\circ) 10^{-8} / \xi = 2.16139 \mu H \tag{128a}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi &= (\sinh 0.35699)[(\sinh 0.35699 - \sin 67.5^\circ)^2 + \sin^2 45^\circ \\ &\quad + (1 + 4\sin^2 22.5^\circ)\sin 22.5^\circ \sin 67.5^\circ] \\ &= 0.50079\end{aligned} \tag{128b}$$

因为$L < L_{\beta 2}$，适用于情况3，且可实现$K_4 = 1$。所要求的$\sigma$值可从(122)式直接确定，从而得到

$$\sigma = \left(1 - \frac{\sinh 0.35699}{2\sin 22.5^\circ}\right) 10^8 = 0.52359 \cdot 10^8 \tag{129}$$

最后，从(47)式和(48)式，用$L_{\beta 2}$代替$L_x$，匹配网络的终端阻抗$Z_{22}(s)$可进行计算。它可表示成：

$$Z_{22}(s) = 0.66139 \cdot 10^{-6} s + \cfrac{1}{1.19469 \cdot 10^{-10} s + \cfrac{1}{2.35354 \cdot 10^{-6} s + \cfrac{1}{Z_\beta(s)}}} \tag{130}$$

其中

$$Z_\beta(s) = 55.72136 \frac{s + 1.14394 \cdot 10^8}{s + 0.22936 \cdot 10^8} \tag{131}$$

容易验证$Z_\beta(s)$的偶部在$\sigma$处拥有一个零点。因此$Z_\beta(s)$可用一个终端接一个电阻器的Darlington C-型节来实现。利用(75)式，用$Z_\beta(s)$代替$Z(s)$，我们得到：

$$L_p = 0.73006 \mu H \qquad L_s = 3.48472 \mu H \tag{132a}$$

$$M = 1.59501 \mu H \qquad C_p = 223.691 pF \tag{132b}$$

其中$Z_\beta(\sigma) = 121.73877$、$Z'_\beta(\sigma) = -86.49494 \cdot 10^{-8}$，电感2.35354μH和$L_p = 0.73006$μH合并便得到一个耦合系数小于1的变压器。最后实现的网络示于图6。

例6.研究与例5中相同的问题，只不过串联电感从1.5μH变为3μH，其余均相同。因此适用于情况4，为实现此网络需要附加全通函数。从(117)、(119)和(120)式，我们得到：

$$k = 0.57236 \tag{133a}$$

$$\zeta = 0.40057 \tag{133b}$$

$$\phi = 1.50301 \tag{133c}$$

把这些值代入(121)式，从而得到所要求的$\sigma$值：

$$\sigma = 0.70004 \cdot 10^8 \tag{134}$$

$$\hat{e} = 1.77001 \tag{135}$$

$$K_4 = 0.91735 \tag{136}$$

作为校核，我们从(106)式计算$L'_\beta$，得到$L'_\beta = 3\mu H$，这正是所预料到的。最后我们从(47)和(48)式，用$L_\beta$代替$L_x$来计算末端阻抗$Z_{22}(s)$。这一阻抗可用一个连分式和一个Darlington C-型节来实现。如例3和例5中所说明。但是，为了节省篇幅，细节从略，剩下的实现工作是显而易见的。

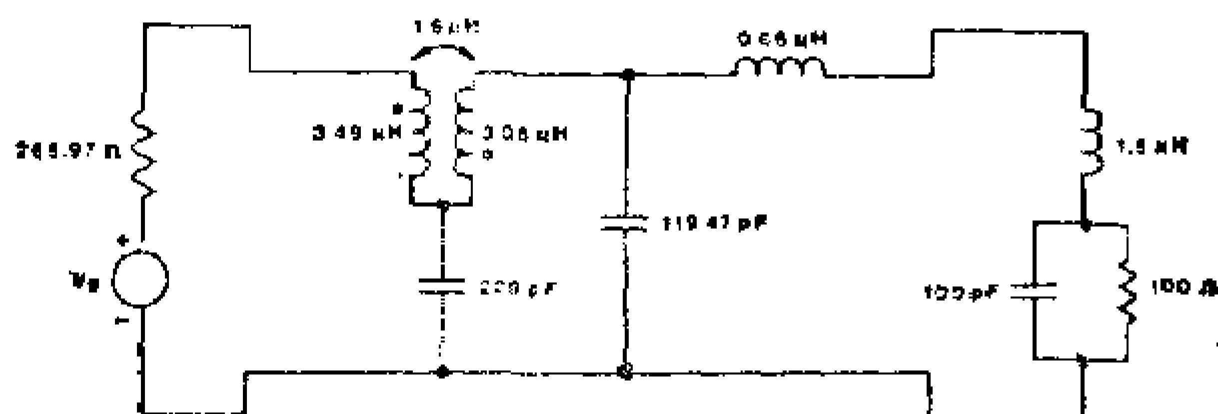



图6　最佳匹配网络及其负载，它拥有4阶等波纹的传输功率增益

## 结　　论

在通信系统的设计中，一个基本问题是在一个给定的信号源和一个给定的负载之间，设计一个无损耗的耦合网络，以使得从信号源到负载在有限的频带内所传输的功率为最大。在大多数实际情况下，这一负载是由一个电阻器和一个电容器相并联的组合然后再串联一个电感器。在本章中，我们证明了任意的$RLC$型负载可在一个有限的频带内与一个电阻性信号源相匹配，以实现任意阶的最大平坦或等波纹传输功率增益特性，证实和推广了参考文献中的方法。我们还导出了设计这些最佳匹配网络的显式公式。因此避免了在设计中使用设计曲线和选择参数时解非线性方程。因而，我们把这种匹配网络的设计简化为算术运算。

用类似的方法，我们能证明一个电阻器和一个电感器并联再串联一个电容器的任意负载与一个电阻性信号源之间利用至多一个1阶全通函数，在一个有限的频带内进行匹配，实现任意阶的最大平坦或等波纹传输功率增益特性。显式公式是对偶地导出的，正如〔18〕和〔19〕中所示。

## 参　考　文　献

〔1〕H. W. Bode; *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Princeton; NJ: Van Nostrand; 1945.

〔2〕R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances," *J. Franklin Inst.*; vol. 249, pp. 57-83 and 139-154, Jan. and Feb. 1950.

〔3〕D. C. Youla; "A new theory of broad-band matching," *IEEE Trans. Circuit Theory*; vol. CT-11, pp. 30-50, Mar. 1964.

〔4〕T. M. Chien; "A theory of broadband matching of a frequency-dependent generator and load;" *J. Franklin Inst.*; vol. 298, pp. 181-221, Sept. 1974.

〔5〕C. Satyanarayana, "A general theory of broadband matching," Ph. D. dissertation; Ohio University; Athens, OH, Mar. 1975.

〔6〕G. L. Matthaei; "Synthesis of Tchebycheff impedance-matching networks; filters and interstages," *IRE Trans. Circuit Theory*; vol. CT-3, pp. 163-172, Sept. 1956.

〔7〕R. Levy, "Explicit formulas for Chebyshev impedance-matching networks; filters and interstages," *Proc. IEE (London)*; vol. 111, pp. 1099-1106, June 1964.

〔8〕D. C. Youla; "An extension of the concept of scattering matrix," *IEEE Trans. Circuit Theory*; vol. CT-11, pp. 310-312, June 1964.

〔9〕W. K. Chen; *Theory and Design of Broadband Matching Networks*. New York: Pergamon Press; Apr. 1976.

〔10〕H. Takahasi; "On the ladder-type filter network with Tchebysheff response," *J. Inst. Elec. Commun. Engrs. Japan*, vol. 34, pp. 65-74, Feb. 1951.

[11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1965.
[12] L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1962.
[13] D. C. Youla, "A new theory of cascade synthesis," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-8, pp. 244-260, Sept. 1961.
[14] E. Green, "Synthesis of ladder networks to give Butterworth or Chebyshev response in the pass band," *Proc. IEE (London)*, vol. 101, pt. IV, pp. 192-203, Aug. 1954.
[15] W. K. Chen, "On the design of broadband elliptic impedance-matching networks," *J. Franklin Inst.*, vol. 301, pp. 451-463, June 1976.
[16] G. L. Zysman and H. J. Carlin, "Restrictions on linear phase, low-pass networks with prescribed parasitic loads," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-12, pp. 387-392, Sept. 1965.
[17] S. Plotkin and N. E. Nahi, "On limitations of broad-band impedance matching without transformers," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-9, pp. 125-132, June 1962.
[18] W. K. Chen, "Dual formulation of Youla's theory of broadband matching," *Electronics Letter*, vol. 12, pp. 337-338, June 1976.
[19] ——, "Explicit formulas for the synthesis of Chebyshev impedance-matching networks," *Electronics Letters*, vol. 12, pp. 412-413, Aug. 1976.

# 二十五、最佳宽带阻抗匹配网络综合的显式公式（II）


## 摘　要

在一个任意的$RLC$型负载和一个电阻性信号源之间，用一个无损耗的匹配网络在一个有限的频带内进行均衡，以实现一个任意阶的最大平坦或等波纹功率增益特性，本文给出了设计这一匹配网络的元件值的显式公式。这些公式是参考文献中所给公式的推广，它们在均衡器的末端反射系数中采用一个正则全通函数。因此，我们把这些实际匹配网络的设计简化为简单的算术运算。为了说明这些公式的应用，还给出了说明性的例子。


**1.引言**

在电子电路、滤波器和级间网络的设计中，一个实际问题是在如图1所示的负载与电阻性信号源（它也可以是其它网络的戴维南等效电路），在感兴趣的频带内，以一定的容差使得从信号源到负载所传输的功率为最大。这个问题的初步解是由Fano〔1〕进行过研究，他指出了如何综合一个切比雪夫匹配网络。Matthaei〔2〕改进和推广了Fano的设计方法，且提供了选择这些最佳设计参数的实际方法。在Matthaei所分类的特殊情况（作为情况1）中，Levy〔3〕导出了一种简化的理论。因为一般说来，设计方程是非线性的，所以为选取最佳的设计参数需要利用图解结果。

更近地，Chen〔4〕说明了如图1所示的任意$RLC$型负载可以与一个电阻性信号源进行匹配、从而在有限的频带内实现任意阶的巴特沃思或切比雪夫传输功率增益特性$G(\omega^2)$。如果$\rho(s)$是在输出端口的反射系数，它与$G(-s^2)$的关系为：

$$\rho(s)\rho(-s)=1-G(-s^2) \tag{1}$$

则（1）式在闭右半复频平面内解析的最一般解为：

$$\rho(s)=\pm\eta(s)\ \hat{\rho}(s) \tag{2}$$

其中$\eta(s)$是一个任意实正则全通函数，$\hat{\rho}(s)$是（1）式的一个最小相位解。正如〔4〕中所证明，这个一般解不一定是必要的，因为用一个1阶实正则全通函数足以实现匹配。因此，我们可以写成：

$$\rho(s)=\frac{s-\sigma}{s+\sigma}\hat{\rho}(s) \tag{3}$$

式中$\sigma$是一个非负的实数。这是由Matthaei〔2〕所分类的另一种情况（作为情况2），他还给出了在给定的切比雪夫增益响应时，为选取最佳参数的图解结果。基于Youla理论〔5〕，〔6〕，Chen〔4〕导出了计算任意阶巴特沃思和切比雪夫增益响应的最佳$\sigma$值的方法。由于所确定的全通函数，该匹配网络的末端阻抗变为〔4〕：

$$Z_{22}(s)=\frac{R}{-RCs+\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}}-Ls \tag{4}$$

它保证是一个正实函数。容易验证$Z_{22}(s)$的偶部在$s=\sigma$处拥有一个正实零点，即$Z_{22}(\sigma)+Z_{22}(-\sigma)=0$。这个零点可以用一个Darlington *C*-型节来实现，得到的网络至少比$Z_{22}(s)$低2阶〔7〕。

在情况1时，即$\sigma=0$，$Z_{22}(s)$可利用前向除法和倒置展成一个连分式。该展开式的每一项表示了终端接1欧姆电阻器的*LC*梯形网络的支路阻纳，为了避免冗长而烦琐的运算，为使设计简化，常常需要在降低阶次情况下进行有效数字的运算，Chen〔4〕得出这一匹配网络的元件值用给定的负载所表示的显式公式。从而把情况1的方法简化为简单的算术运算。

在情况2时，需要一个全通函数。在此情况下，〔4〕式不能用终端接1欧姆的电阻器的*LC*梯形网络来实现。因为$Z_{22}(s)$的偶部在$s=\sigma$处拥有一个正实零点，故需要一个Darlington *C*-

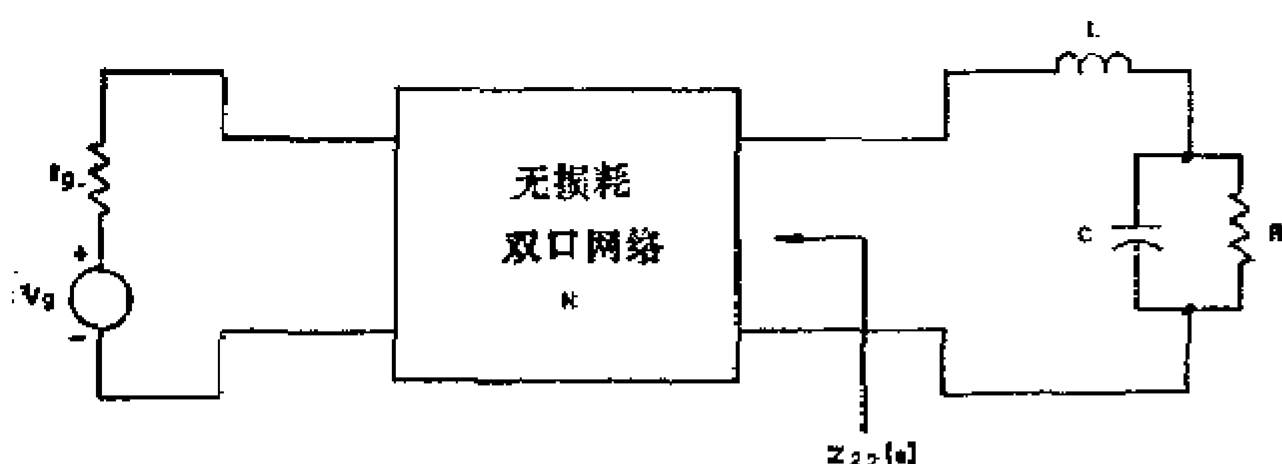



图1 一个实际负载下宽带匹配的示意图，可在一个有限频带内得到低通匹配

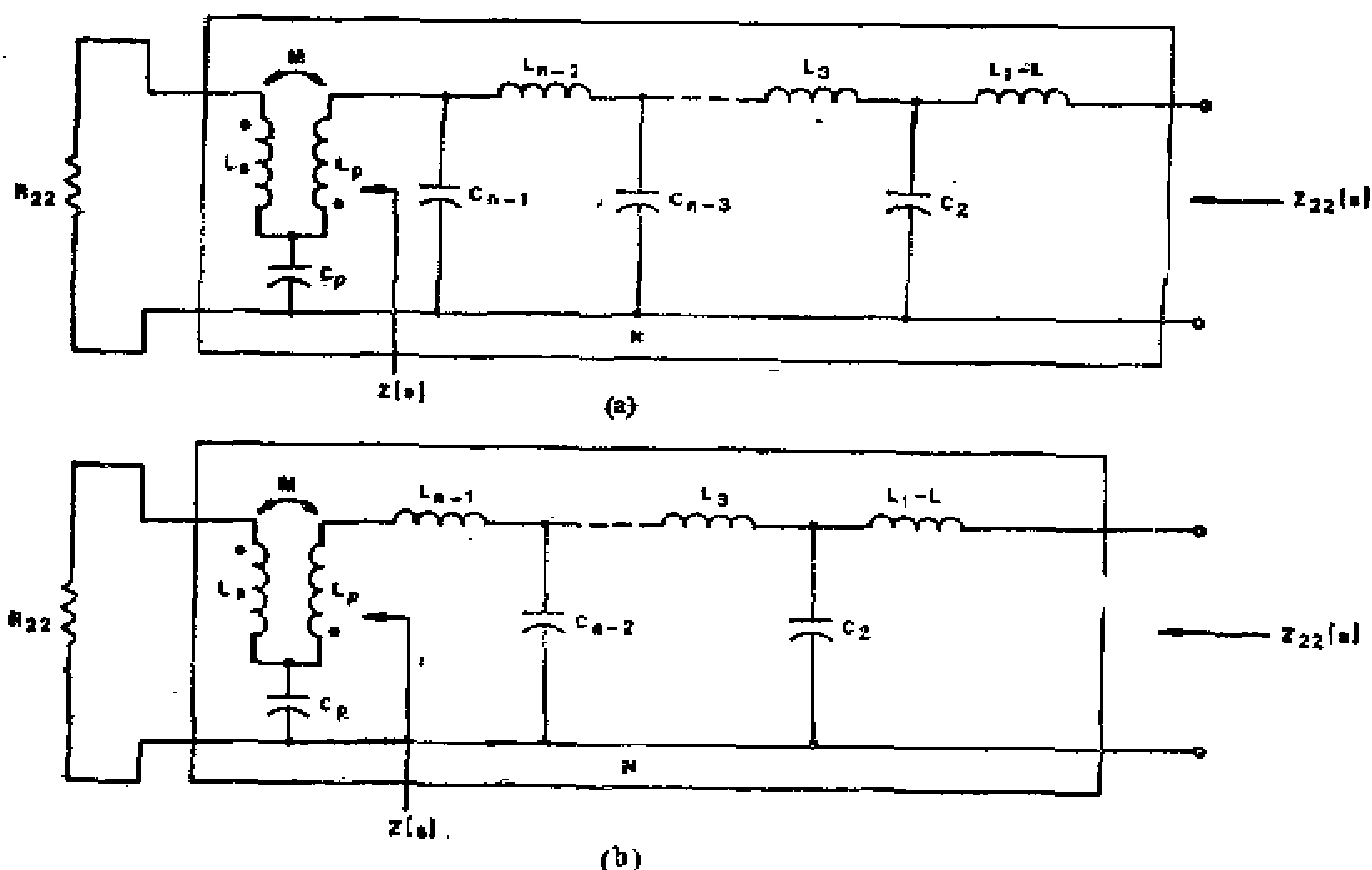



图2 终端接Darlington *C*-型节的*LC*梯形阻抗匹配网络的实现 (*a*)*n*为奇数 (*b*)*n*为偶数

型节。相应于该节的全通环的运算可在$Z_{22}(s)$的连分式的任意一节开始。为了进行定义和在我们的场合下，我们假设这一全通环是在其末端开始进行运算的。因此，所要求的展开式可取下列形式：

$$Z_{22}(s)=(L_1-L)s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cfrac{1}{\ddots\, B_{n-1}s+\cfrac{1}{(w_1s+w_2)/(w_3s+w_4)}}}} \tag{5}$$

其中，在$n$为奇数时，$B_{n-1}=C_{n-1}$，在$n$为偶数时，$B_{n-1}=L_{n-1}$，此处$n$表示巴特沃思或切比雪夫增益响应的阶数。这表明$Z_{22}(s)$可以实现为一个终端接电阻器的无损耗双口网络的输入阻抗，如图2所示。

本文的目的是导出图2的匹配网络的元件值用给定的负载来表示的显式公式。

**2．巴特沃思阻抗匹配网络**

研究$n$阶巴特沃思传输功率增益特性

$$G(\omega^2)=\frac{K_n}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}},\quad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{6}$$

其中$\omega_c$是3分贝带宽。在有全通因子时$\sigma$由〔4〕中的公式来确定，均衡器的末端反射系数变为：

$$\rho(s)=\delta^n\frac{s-\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{q(y/\delta)}{q(y)} \tag{7}$$

其中

$$y=s/\omega_c\quad \delta^{2n}=1-K_n \tag{8a}$$

以及

$$q(y)=y^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_1y+1 \tag{8b}$$

其中

$$a_k=\prod_{m=1}^{k}\frac{\cos\gamma_{m-1}}{\sin\gamma_m},\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{9}$$

和

$$\gamma_m=m\pi/2n,\quad m=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

正如〔4〕所指出，最大的直流增益为：

$$K_n=1-\left[1-\frac{2(1-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right]^{2n} \tag{11}$$

同时我们有不等式

$$L\leqslant L_a=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{12}$$

利用(7)式连同(8)－(11)式一起，〔$1+\rho(s)$〕/〔$1-\rho(s)$〕可显式地展成下列连分式：

$$\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{[q(y)+\delta^nq(y/\delta)]s+[q(y)-\delta^nq(y/\delta)]\sigma}{[q(y)-\delta^nq(y/\delta)]s+[q(y)+\delta^nq(y/\delta)]\sigma}$$

$$
= C_1''y + \cfrac{1}{L_2''y + \cfrac{1}{C_3''y + \cfrac{1}{\ddots\ B_n''y + \cfrac{1}{(w_1''y + w_2'')/(w_3''y + w_4'')}}}} \tag{13}
$$

其中，当$n$为奇数时，$B_n'' = C_n''$，当$n$为偶数时，$B_n'' = L_n''$，以及

$$
C_1'' = \frac{2\omega_c \sin\gamma_1}{(1-\delta)\omega_c + 2\sigma\sin\gamma_1} = RC\omega_c \tag{14}
$$

和

$$
L_2'' = \frac{2[\omega_c(1-\delta) + 2\sigma\sin\gamma_1]^2 \sin\gamma_3}{(1-\delta)[\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 2\sigma\{\omega_c(1-\delta) + 2\sigma\sin\gamma_1\}\sin\gamma_3]} \tag{15a}
$$

$$
= \frac{4\omega_c \sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{(1 - RC\sigma)[RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3]} \tag{15b}
$$

$$
C_3'' = \frac{(1 - RC\sigma)[RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3]^2 \sin\gamma_5}{D_3''} \tag{16a}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
D_3'' = {} & RC\omega_c(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) \\
& \cdot[\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_4 + 1)\sin\gamma_1 \\
& + \sigma\{RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) \\
& + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3\}\sin\gamma_5]
\end{aligned} \tag{16b}
$$

和

$$
L_4'' = \frac{N_4''}{D_4''} \tag{17a}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
N_4'' = {} & 4RC\omega_c(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1)\cdot[\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_4 + 1)\sin\gamma_1 \\
& + \sigma\{RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3\}\sin\gamma_5]^2 \sin\gamma_7
\end{aligned} \tag{17b}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4'' = {} & (1 - RC\sigma)(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_4 + 1) \\
& \cdot[RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3] \\
& \cdot[\omega_c^2\{RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3\}\cdot(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_6 + 1) \\
& + 4\sigma\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_4 + 1)\sin\gamma_1 \sin\gamma_7 \\
& + 4\sigma^2\{RC\omega_c^2(\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1) \\
& + 4\sigma\sin\gamma_1 \sin\gamma_3\}\sin\gamma_5 \sin\gamma_7]\sin\gamma_1
\end{aligned} \tag{17c}
$$

在上述连分式的推导中各系数的代数推导是非常复杂的，为了节省篇幅我们仅给出最后的结果。它们的正确性可用任意数值的例子来进行验证。

为了继续进行我们的显式公式的推导，我们研究乘积$C_1''L_2''$，$L_2''C_3''$和$C_3''L_4''$，在进行了若干代数运算之后，它们可以写成下列形式：

$$
C_1''L_2'' = \frac{4\sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{\delta^2 - 2\delta\cos\gamma_2 + 1} \cdot \frac{1 + H_1/H_2}{1 + H_3/H_4} \tag{18a}
$$

其中

$$
H_1 = 2\sigma\sin\gamma_1 \tag{18b}
$$

$$H_2=\omega_c(1-\delta) \tag{18c}$$

$$H_3=2\sigma[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1]\sin\gamma_3 \tag{18d}$$

$$H_4=\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1) \tag{18e}$$

$$L_2''C_3''=\frac{4\sin\gamma_3\sin\gamma_5}{\delta^2-2\delta\cos\gamma_4+1}\cdot\frac{1-H_3/H_4}{1-H_5/H_6} \tag{19a}$$

其中

$$H_5=2\sigma\{\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)$$
$$+2\sigma[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1]\sin\gamma_3\}\sin\gamma_5 \tag{19b}$$

$$H_6=\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_4+1)[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1] \tag{19c}$$

$$C_3''L_4''=\frac{4\sin\gamma_5\sin\gamma_7}{\delta^2-2\delta\cos\gamma_6+1}\cdot\frac{1+H_5/H_6}{1+H_7/H_8} \tag{20a}$$

其中

$$H_7=2\sigma\{\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_4+1)$$
$$\cdot[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1]+2\sigma(\sin\gamma_5)$$
$$\cdot[\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)+2\sigma(\sin\gamma_3)$$
$$\cdot[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1]]\}\sin\gamma_7 \tag{20b}$$

$$H_8=\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_6+1)[\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)$$
$$+2\sigma[\omega_c(1-\delta)+2\sigma\sin\gamma_1]\sin\gamma_3] \tag{20c}$$

从上述各方程中，我们得到各个$H$之间的递归关系为：

$$H_{2m+1}=2\sigma(H_{2m-1}+H_{2m})\sin\gamma_{2m+1},\quad m=0,\ 1,\ 2,\cdots,n \tag{21a}$$

$$H_{2m}=\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_{2m-2}+1)(H_{2m-3}+H_{2m-4}),\quad m=2,3,\cdots,n \tag{21b}$$

其中$H_0=1$，和$H_{-u}=0$，适用于根据定义的$u>0$。因此，(18a)、(19a)和(20a)可以推广为：

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [n/2]$时，$[n/2]$表示不大于$n/2$的最大整数，

$$C_{2m-1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\delta^2-2\delta\cos\gamma_{4m-2}+1}\cdot\frac{1+H_{4m-3}/H_{4m-2}}{1+H_{4m-1}/H_{4m}},\quad n>1 \tag{22a}$$

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [(n-1)/2]$时，

$$C_{2m+1}''L_{2m}''=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\delta^2-2\delta\cos\gamma_{4m}+1}\cdot\frac{1+H_{4m-1}/H_{4m}}{1+H_{4m+1}/H_{4m+2}},\quad n>2 \tag{22b}$$

把(13)式代入(4)式，且引用$C_1''=RC\omega_c$这一结果，如(5)式所示的$Z_{22}(s)$的连分式展开式的系数可利用下列递归关系来计算：

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [(n-1)/2]$、$n>2$时，

$$L_1=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_2+1)+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{23a}$$

$$C_{2m}L_{2m-1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_{4m}+1)}$$
$$\cdot\frac{1+H_{4m-1}/H_{4m}}{1+H_{4m+1}/H_{4m+2}} \tag{23b}$$

在$m=1,\ 2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ n>3$时，

$$C_{2m}L_{2m+1}=\frac{4\sin\gamma_{4m+1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2(\delta^2-2\delta\cos\gamma_{4m+2}+1)}$$

$$\cdot \frac{1+H_{4m+1}/H_{4m+2}}{1+H_{4m+3}/H_{4m+4}} \tag{23c}$$

可以看出，当令$\sigma$为零时，上述公式即简化为情况1所导出的公式[4]，Darlington $C$-型节即退化为由两根导线所组成的双口网络。因此，这些结果是[4]中所得结果的直接推广。

**Darlington $C$-型节的显式公式**

为了导出如图2所示的Darlington $C$-型节的元件值$L_p, L_s$, $M$和$C_p$的显式公式，我们首先详细地进行计算低阶情况下的余部，然后导出最后的结果。

参看(13)式，令

$$W_n''(y)=\frac{w_1''y+w_2''}{w_3''y+w_4''} \tag{24}$$

我们看出，如果$n$是奇数，$W_n''(s)$是一个阻抗函数，如果$n$是偶数，则$W_n''(s)$是一个导纳函数。现在我们着手给出$n=2$，3和4时的$W_n''(s)$如下：

$$W_2''(y)=\frac{[(\omega_c-C_1''\sigma)(1+\delta^2)+\sigma(1-\delta)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1-\delta^2)}{[(\omega_c-L_2''\sigma)(1-\delta^2)+\sigma(1+\delta)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1+\delta^2)} \tag{25a}$$

$$W_3''(y)=\frac{[(\omega_c-L_2''\sigma)(1-\delta^3)+\sigma(1+\delta^2)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1+\delta^3)}{[[\omega_c-\sigma(C_1''+C_3'')](1+\delta^3)+\sigma(1-\delta^2)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1-\delta^3)} \tag{25b}$$

$$W_4''(y)=\frac{[[\omega_c-\sigma(C_1''+C_3'')](1+\delta^4)+\sigma(1-\delta^3)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1-\delta^4)}{[[\omega_c-\sigma(L_2''+L_4'')](1-\delta^4)+\sigma(1+\delta^3)/\sin\gamma_1]y+\sigma(1+\delta^4)} \tag{25c}$$

从这些关系式，我们能导出$W_n''(y)$的一般表达式如下：

在$n$为偶数时，

$$W_n''(y)=\frac{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum\limits_{m=1}^{n/2}C_{2m-1}''\right)(1+\delta^n)+\sigma(1-\delta^{n-1})/\sin\gamma_1\right]y+\sigma(1-\delta^n)}{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum\limits_{m=1}^{n/2}L_{2m}''\right)(1-\delta^n)+\sigma(1+\delta^{n-1})/\sin\gamma_1\right]y+\sigma(1+\delta^n)} \tag{26a}$$

在$n$为奇数时，

$$W_n''(y)=\frac{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum\limits_{m=1}^{(n-1)/2}L_{2m}''\right)(1-\delta^n)+\sigma(1+\delta^{n-1})/\sin\gamma_1\right]y+\sigma(1+\delta^n)}{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum\limits_{m=1}^{(n+1)/2}C_{2m-1}''\right)(1+\delta^n)+\sigma(1-\delta^{n-1})/\sin\gamma_1\right]y+\sigma(1-\delta^n)} \tag{26b}$$

因为如果$n$为偶数时，$W_n''(y)$为导纳，如果$n$为奇数时，则$W_n''(y)$是如图2所示，从网络的余部的Darlington $C$-型节的输入端看进去的阻抗$Z(s)$，它可用（26）式代入（13）式连同（5）式而得到：

$$\frac{Z(s)}{R}=\frac{\left[\left(1-\frac{\sigma}{R}\sum\limits_{m=1}^{k}L_{2m-1}\right)(1-\delta^n)+\sigma(1+\delta^{n-1})/(\omega_c\sin\gamma_1)\right]s+\sigma(1+\delta^n)}{\left[\left(1-R\sigma\sum\limits_{m=1}^{k}C_{2m}\right)(1+\delta^n)+\sigma(1-\delta^{n-1})/(\omega_c\sin\gamma_1)\right]s+\sigma(1-\delta^n)} \tag{27}$$

其中$C_0=C$，$C_n=0$，在$n$为奇数时，$\lambda=(n-1)/2$，在$n$为偶数时，$\lambda=n/2$。注意在推导(27)式中我们已经利用了$C_1''=RC\omega_c$的这一结果，以及

$$C''_{2m-1}=\omega_c RC_{2(m-1)},\quad m=2,\ 3,\ \cdots,\ [(n+1)/2] \tag{28a}$$

$$L''_{2m}=\omega_c L_{2m-1}/R,\quad m=1,2,\cdots,[n/2] \tag{28b}$$

借助于Youla设计表[7]，图2的Darlington $C$-型节的元件值可显式地确定如下：

$$L_p=\frac{Z(\sigma)+\sigma Z'(\sigma)}{2\sigma}=\frac{c_1c_3\sigma^2+2c_1c_4\sigma+c_2c_4}{2\sigma(c_3\sigma+c_4)^2} \tag{29a}$$

$$L_s=\frac{[Z(\sigma)-\sigma Z'(\sigma)]^2}{2\sigma[Z(\sigma)+\sigma Z'(\sigma)]}$$

$$=\frac{(c_1c_3\sigma^2+2c_2c_3\sigma+c_2c_4)^2}{2\sigma(c_1c_3\sigma^2+2c_1c_4\sigma+c_2c_4)(c_3\sigma+c_4)^2} \tag{29b}$$

$$C_p=\frac{2}{\sigma[Z(\sigma)-\sigma Z'(\sigma)]}=\frac{2(c_3\sigma+c_4)^2}{\sigma(c_1c_3\sigma^2+2c_2c_3\sigma+c_2c_4)} \tag{29c}$$

$$M=\frac{Z(\sigma)-\sigma Z'(\sigma)}{2\sigma}=\frac{c_1c_3\sigma^2+2c_2c_3\sigma+c_2c_4}{2\sigma(c_3\sigma+c_4)^2} \tag{29d}$$

其中$Z'(\sigma)$表示$Z(s)$在$s=\sigma$处所算得的导数，且

$$c_1=\left(R-\sigma\sum_{m=1}^{\lambda}L_{2m-1}\right)(1-\delta^n)+R\sigma(1+\delta^{n-1})/(\omega_c\sin\gamma_1) \tag{30a}$$

$$c_2=R\sigma(1+\delta^n) \tag{30b}$$

$$c_3=\left(1-R\sigma\sum_{m=0}^{\lambda}C_{2m}\right)(1+\delta^n)+\sigma(1-\delta^{n-1})/(\omega_c\sin\gamma_1) \tag{30c}$$

$$c_4=\sigma(1-\delta^n) \tag{30d}$$

其中$C_0=C$，$C_n=0$，在$n$为奇数时，$\lambda=(n-1)/2$，在$n$为偶数时，$\lambda=n/2$。终端所接电阻可从(27)式令$s=0$而确定，从而得到：

$$R_{22}=R(1+\delta^n)/(1-\delta^n) \tag{31}$$

**说明性的例子**

例1. 令

$$R=50\Omega\qquad L=0.7\mu H$$
$$C=100pF\quad \omega_c=2\cdot10^8 rad/s$$
$$n=5 \tag{32}$$

因此，利用[4]中所导出的公式和符号，我们得到：

$$p=0.042441$$
$$w=0.228730$$
$$\phi=3.957772 \tag{33}$$

从而得到

$$\sigma=1.273703\cdot10^8$$
$$K_8=0.921265$$
$$\delta=0.775562 \tag{34}$$

从(23a) 我们计算

$$L_1 = \frac{4\cdot 50\sin 18^\circ \sin 54^\circ}{(1-50\cdot 10^{-10}\sigma)[50\cdot 10^{-10}\cdot 4\cdot 10^{16}(\delta^2-2\delta\cos 36^\circ+1)+4\sigma\sin 18^\circ\sin 54^\circ]}$$

$$= 0.7\mu\text{H} \tag{35}$$

这正是所预料的。应用(23)式得到匹配网络梯形部分元件值如下：

$$C_2 L_1 = \frac{4\sin 54^\circ \sin 90^\circ}{4\cdot 10^{16}(\delta^2-2\delta\cos 72^\circ+1)}\cdot\frac{1+H_5/H_4}{1+H_5/H_6}$$

$$=0.728958\cdot 10^{-16} \tag{36a}$$

其中$H_3=2.547406\cdot 10^{16}$，$H_4=1.386443\cdot 10^{16}$，$H_5=10.021109\cdot 10^{24}$以及$H_6=5.548329\cdot 10^{24}$，从而得到

$$C_2=104.1369\text{pF} \tag{36b}$$

因此

$$C_2 L_3 = \frac{4\sin 90^\circ \sin 126^\circ}{4\cdot 10^{16}(\delta^2-2\delta\cos 108^\circ+1)}\cdot\frac{1+H_5/H_6}{1+H_7/H_8}$$

$$=0.551028\cdot 10^{-16} \tag{37a}$$

其中$H_7=32.086968\cdot 10^{32}$和$H_8=32.742522\cdot 10^{32}$，

从而得到

$$L_3=0.529137\mu\text{H} \tag{37b}$$

以及

$$C_4 L_3 = \frac{4\sin 126^\circ \sin 162^\circ}{4\cdot 10^{16}(\delta^2-2\delta\cos 144^\circ+1)}\cdot\frac{1+H_7/H_8}{1+H_9/H_{10}}$$

$$=0.134662\cdot 10^{-16} \tag{38a}$$

其中$H_9=51.033238\cdot 10^{40}$，$H_{10}=177.889011\cdot 10^{40}$，

从而得到

$$C_4=25.4493\text{pF} \tag{38b}$$

余部函数从（27）式确定，且为：

$$Z(s)=\frac{c_1 s+c_2}{c_3 s+c_4}=\frac{63.669701s+81.554995\cdot 10^8}{0.723474s+0.916306\cdot 10^8} \tag{39}$$

从（29）式，Darlington C-型节的元件值可得到如下：

$$L_p=0.346445\mu\text{H}$$

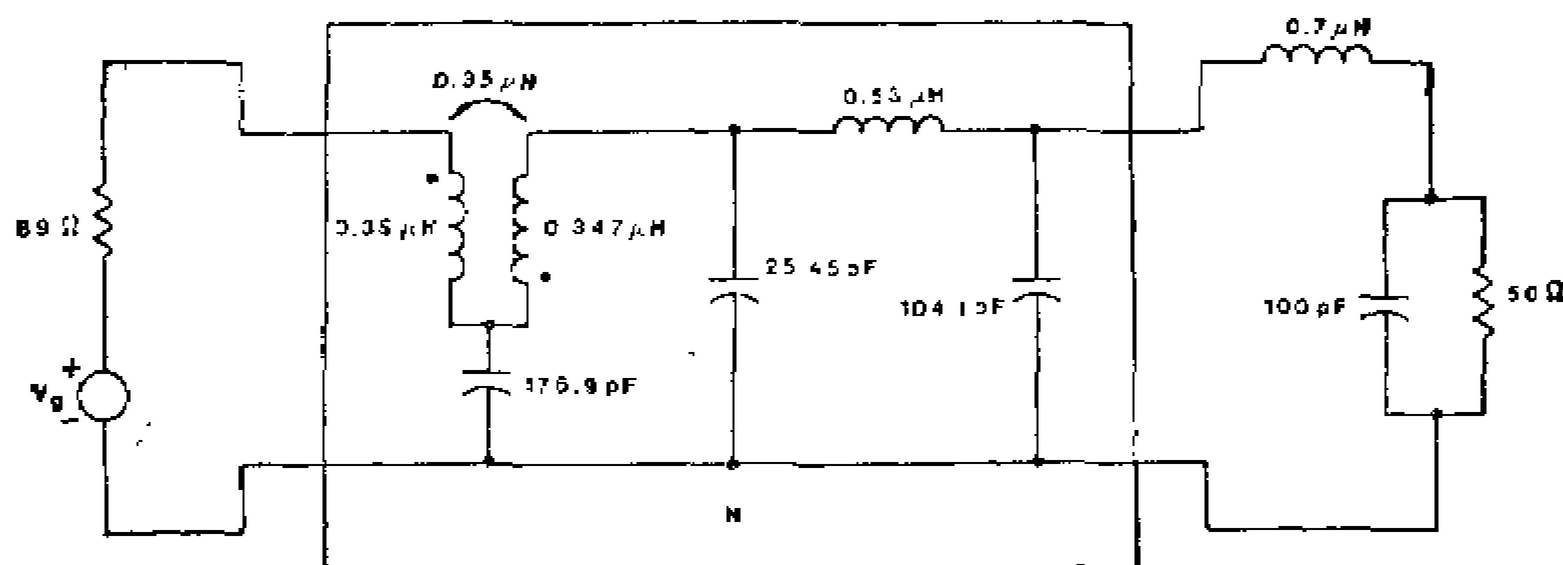



图3 最佳阻抗匹配网络及其负载，它拥有5阶最大平坦传输功率增益特性

$$L_4 = 0.350359\mu H$$
$$C_p = 176.9225pF$$
$$M = 0.348402\mu H \quad (40)$$

终端所接的电阻可从（39）式令$s=0$而确定，从而得到：

$$R_{22} = Z(0) = 89.0041\Omega \quad (41)$$

它也与（31）式相一致。该匹配网络的最后实现示于图3。

例2. 令

$$R = 45\Omega \qquad L = 1\mu H$$
$$C = 100pF \quad \omega_c = 10^8 rad/s$$
$$n = 6 \quad (42)$$

则利用[4]中所导出的公式和符号，我们得到：

$$p = 0.001389$$
$$w = 0.208136$$
$$\phi = 8.992594 \quad (43)$$

从而得到

$$\sigma = 1.681057 \cdot 10^8$$
$$K_6 = 0.980633$$
$$\delta = 0.719872 \quad (44)$$

从（23）式我们算出$L_1 = 1\mu H$，以及从（23b）和（23c），我们有：

$$C_2 = \frac{4\sin 45^\circ \sin 75^\circ}{10^{16}(\delta^2 - 2\delta\cos 60^\circ + 1)} \cdot \frac{1 + H_3/H_4}{1 + H_5/H_6} = 325.9525pF \quad (45)$$

其中$H_3 = 2.734710 \cdot 10^{16}$，$H_4 = 0.271361 \cdot 10^{16}$，$H_5 = 9.762373 \cdot 10^{24}$以及$H_6 = 0.918341 \cdot 10^{24}$，则

$$L_3 = \frac{4\sin 75^\circ \sin 105^\circ}{3.259525 \cdot 10^6(\delta^2 - 2\delta\cos 90^\circ + 1)} \cdot \frac{1 + H_6/H_6}{1 + H_7/H_8}$$
$$= 1.019879\mu H \quad (46)$$

其中$H_7 = 34.686180 \cdot 10^{32}$和$H_8 = 4.563864 \cdot 10^{32}$，以及

$$C_4 = \frac{4\sin 105^\circ \sin 135^\circ}{1.019879 \cdot 10^{10}(\delta^2 - 2\delta\cos 120^\circ + 1)} \cdot \frac{1 + H_7/H_8}{1 + H_9/H_{10}} = 209.9227pF \quad (47)$$

其中$H_9 = 93.312018 \cdot 10^{40}$以及$H_{10} = 23.904373 \cdot 10^{40}$

则

$$L_5 = \frac{4\sin 135^\circ \sin 165^\circ}{2.099227 \cdot 10^8(\delta^2 - 2\delta\cos 150^\circ + 1)} \cdot \frac{1 + H_9/H_{10}}{1 + H_{11}/H_{12}}$$
$$= 0.318803\mu H \quad (48)$$

其中$H_{11} = 101.999258 \cdot 10^{48}$和$H_{12} = 108.529141 \cdot 10^{48}$

余部阻抗函数可从（27）式确定，且为：

$$Z(s) = \frac{c_1 s + c_2}{c_3 s + c_4} = \frac{49.087336s + 86.175099}{0.898977s + 1.447112} \quad (49)$$

把各个$C$值代入（29）式，从而得到Darlington $C$-型节的各元件值为：

$$L_p = 0.165931\mu H$$

$$L_s = 0.180960\mu\text{H}$$
$$C_p = 204.2114\text{pF}$$
$$M = 0.173283\mu\text{H} \tag{50}$$

终端所接电阻可从（31）式确定，且为：

$$R_{22} = 45\,\frac{1+\delta^6}{1-\delta^6} = 59.549717\Omega \tag{51}$$

它也与直接从(49)式令$s=0$而相一致。该匹配网络的最后实现由图4给出。电感0.318803μH和$L_p=0.165931\mu$H的合并便得到一个耦合系数小于1的变压器。如果终端所接的电阻是不同于$R_{22}$值，则在匹配网络的输入端需要一个匝比为$\sqrt{r_g}:\sqrt{R_{22}}$的理想变压器。

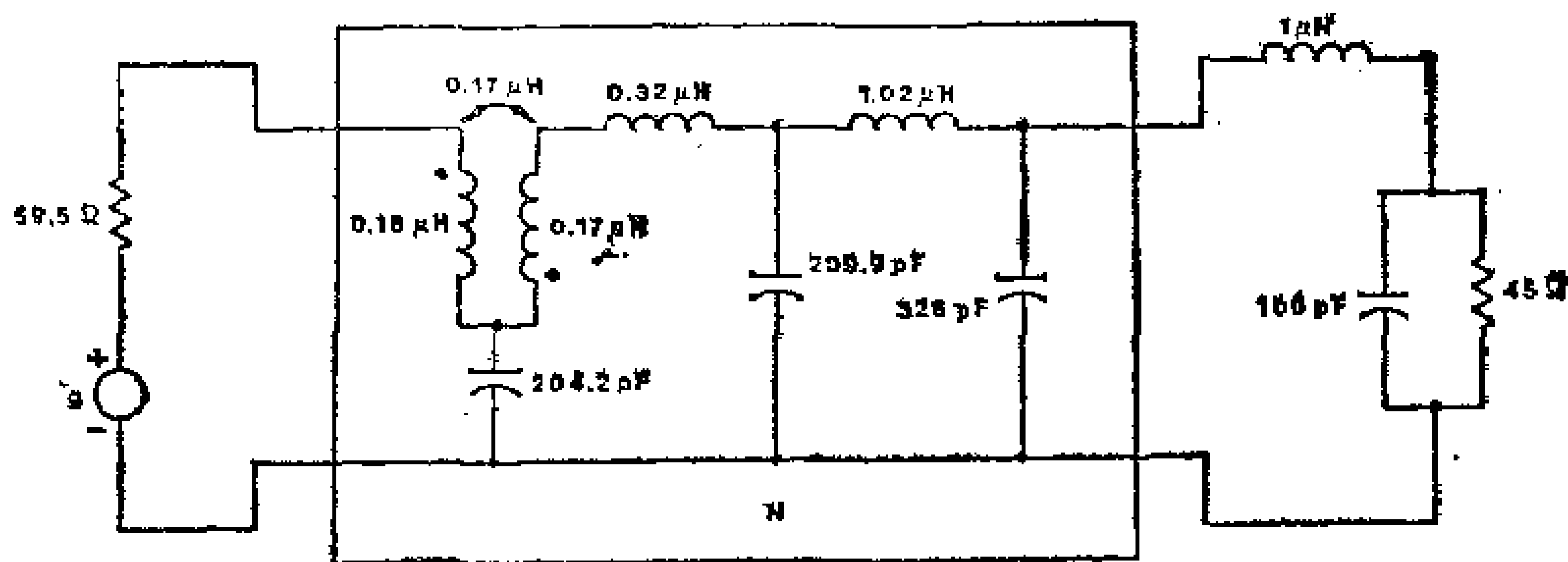



图4　最佳阻抗匹配网络及其负载，它拥有6阶最大平坦传输功率增益特性

**3．切比雪夫阻抗匹配网络**

现在，我们把注意力转向切比雪夫响应方面，它比巴特沃思响应的情况更为复杂。我们的目的是导出图2所示的阻抗匹配网络元件值的显式公式，它拥有$n$阶切比雪夫功率增益特性：

$$G(\omega^2) = \frac{K_n}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)},\quad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{52}$$

所具有的最大可达常数为$K_n$，其中$C_n(\omega)$是第一类$n$阶切比雪夫多项式，且$\epsilon<1$。利用由〔4〕的公式而确定的全通因子$\sigma$，均衡器的末端反射系数变为：

$$\rho(s) = \frac{s-\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{\hat{p}(y)}{p(y)} \tag{53}$$

其中，和以前一样，$y=s/\omega_c$以及

$$p(y) = y^n + b_{n-1}y^{n-1} + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0 \tag{54}$$

其中

$$b_{n-u} = \xi_{n-u}d^{-u}/2^u,\quad u=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{55a}$$

$$\xi_{n-u} = \sum_{x=0}^{u}(-1)^x d^{2x}a_x a_{u-x} - \sum_{x=1}^{[u/2]}(-1)^x\binom{n-u+2}{x}d^{2x}\xi_{n-u+2} \tag{55b}$$

$$\alpha = -\ln d = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} \tag{55c}$$

以及$a_0=1$，$\xi_n=1$，$a_i$在(9)式中定义过，在$u=1$时，(55$b$)式的第二个和式为零；以及

$$\hat{p}(y)=y^n+\hat{b}_{n-1}y^{n-1}+\hat{b}_{n-2}y^{n-2}+\cdots+\hat{b}_1y+\hat{b}_0 \tag{56}$$

其中各个$\hat{b}$可从(55)式，简单地在(55$c$)中$\hat{a}$用代替$a$而进行计算，即

$$\hat{a}=-\ln d=\frac{1}{n}\sinh^{-1}[(1-K_n)^{1/2}/\epsilon] \tag{57}$$

其余均与前相同。

正如[4]中所指出，最大可达的$K_n$为：

$$K_n=1-\epsilon^2\sinh^2\left[n\sinh^{-1}\left[\sinh a-\frac{2(1-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_c}\right]\right] \tag{58}$$

以及我们有不等式

$$L\leqslant L_g$$

$$=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2f_1(\sinh a,\ \sinh\hat{a})+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{59}$$

其中

$$f_m(u,\ v)=u^2+v^2+\sin^2\gamma_{2m}-2uv\cos\gamma_{2m},$$

$$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [n/2] \tag{60}$$

利用(53)式连同(54)～(57)式一起，$[1+\rho(s)]/[1-\rho(s)]$可展开成如(13)式那样的连分式。在展开式中相应的系数为：

$$C_1''=\frac{2\omega_c\sin\gamma_1}{(\sinh a-\sinh\hat{a})\omega_c+2\sigma\sin\gamma_1}=RC\omega_c, \tag{61a}$$

$$L_2''=\frac{4\omega_c\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{61b}$$

把(61$a$)式的RC代入(61$b$)式，得到

$$L_2''=\frac{2[\omega_c(\sinh a-\sinh\hat{a})+2\sigma\sin\gamma_1]^2\sin\gamma_3}{(\sinh a-\sinh\hat{a})[\omega_c^2f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})+2\sigma[\omega_c(\sinh a-\sinh\hat{a})+2\sigma\sin\gamma_2]\sin\gamma_3]} \tag{61c}$$

正如以前那样，上述关系式的代数推导是极为复杂的，为了节省篇幅，此处只给出最后的结果。为了继续完成我们的推导，我们形成乘积

$$C_1''L_2''=\frac{4\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{\omega_c^2f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})}\cdot\frac{1+\bar{H}_1/\bar{H}_2}{1+\bar{H}_3/\bar{H}_4} \tag{62}$$

其中

$$\bar{H}_1=2\sigma\sin\gamma_1 \tag{63a}$$

$$\bar{H}_2=\omega_c(\sinh a-\sinh\hat{a}) \tag{63b}$$

$$\bar{H}_3=2\sigma[\omega_c(\sinh a-\sinh\hat{a})+2\sigma\sin\gamma_1]\sin\gamma_3 \tag{63c}$$

$$\bar{H}_4=\omega_c^2f_1(\sinh a,\sinh\hat{a}) \tag{63d}$$

仿照(21)式，我们得到下列各个$\bar{H}$之间的递归关系：

$$\bar{H}_{2m+1}=2\sigma(\bar{H}_{2m-1}+\bar{H}_{2m})\sin\gamma_{2m+1},$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{64a}$$

$$\bar{H}_{2m}=\omega_c^2f_{m-1}(\sinh a,\sinh\hat{a})(\bar{H}_{2m-6}+\bar{H}_{2m-4}),$$

$$m=2,\ 3,\ \cdots,\ n \tag{64b}$$

其中$\widetilde{H}_0=1$，$\widetilde{H}_{-u}=0$，由定义$u>0$。因此，(62)式可以推广成：

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [n/2]$时，

$$C''_{2m-1}L''_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-3}\sin\gamma_{4m-1}}{\omega_c^2 f_{2m-1}(\sinh a,\sinh\hat{a})}\cdot\frac{1+\widetilde{H}_{4m-3}/\widetilde{H}_{4m-2}}{1+\widetilde{H}_{4m-1}/\widetilde{H}_{4m}} \tag{65a}$$

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [(n-1)/2]$时，

$$C''_{2m+1}L''_{2m}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})}\cdot\frac{1+\widetilde{H}_{4m-1}/\widetilde{H}_{4m}}{1+\widetilde{H}_{4m+1}/\widetilde{H}_{4m+2}} \tag{65b}$$

把(13)式代入(4)式且引用$C''_1=RC\omega_c$这一结果，如(5)式所示的$Z_{22}(s)$的连分式之展开式的系数可直接用下列递归公式进行计算：

$$L_1=\frac{4R\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(1-RC\sigma)[RC\omega_c^2 f_1(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\sin\gamma_1\sin\gamma_3]} \tag{66a}$$

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [(n-1)/2]$，$n>2$时，

$$C_{2m}L_{2m-1}=\frac{4\sin\gamma_{4m-1}\sin\gamma_{4m+1}}{\omega_c^2 f_{2m}(\sinh a,\sinh\hat{a})}\cdot\frac{1+\widetilde{H}_{4m-1}/\widetilde{H}_{4m}}{1+\widetilde{H}_{4m+1}/\widetilde{H}_{4m+2}} \tag{66b}$$

在$m=1,\ 2,\ \cdots,\ [n/2]-1$，$n>3$时

$$C_{2m}L_{2m+1}=\frac{4\sin\gamma_{4m+1}\sin\gamma_{4m+3}}{\omega_c^2 f_{2m+1}(\sinh c,\sinh\hat{a})}\cdot\frac{1+\widetilde{H}_{4m+1}/\widetilde{H}_{4m+2}}{1+\widetilde{H}_{4m+3}/\widetilde{H}_{4m+4}} \tag{66c}$$

如同巴特沃思响应的情况一样，当令$\sigma$为零时，公式(66)则简化为[4]的情况1，因此这些结果是[4]中所得结果的推广。

**Darlington $C$-型节的显式公式**

为了导出如图2所示的Darlington $C$-型节的元件值$L_p$，$L_s$，$M$和$C_p$的显式公式，我们首先计算(24)式中定义的余部阻纳$W''_i(y)$，利用详细计算低阶时的情况，然后导出最后的结果。这些结果为：

$$W''_2(y)=\frac{[(\omega_c-\sigma C''_1)(b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0-\hat{b}_0)}{[(\omega_c-\sigma L''_2)(b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0+\hat{b}_0)} \tag{67a}$$

$$W''_3(y)=\frac{[(\omega_c-\sigma L''_2)(b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0+\hat{b}_0)}{[[\omega_c-\sigma(C''_1+C''_3)](b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0-\hat{b}_0)} \tag{67b}$$

$$W''_4(s)=\frac{[[\omega_c-\sigma(C''_1+C''_3)](b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0-\hat{b}_0)}{[[\omega_c-\sigma(L''_2+L''_4)](b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)]y+\sigma(b_0+\hat{b}_0)} \tag{67c}$$

从这些关系，我们能导出$W''_n(y)$的一般表达式如下：

在$n$为偶数时，

$$W''_n(y)=\frac{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum_{m=1}^{n/2}C''_{2m-1}\right)(b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)\right]y+\sigma(b_0-\hat{b}_0)}{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum_{m=1}^{n/2}L''_{2m}\right)(b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)\right]y+\sigma(b_0+\hat{b}_0)} \tag{68a}$$

在$n$为奇数时，

$$W''_n(y)=\frac{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum_{m=1}^{(n-1)/2}L''_{2m}\right)(b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)\right]y+\sigma(b_0+\hat{b}_0)}{\left[\left(\omega_c-\sigma\sum_{m=1}^{(n+1)/2}C''_{2m-1}\right)(b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)\right]y+\sigma(b_0-\hat{b}_0)} \tag{68b}$$

因为如果$n$为偶数，$W''_n(y)$为导纳，如果$n$为奇数，则$W''_n(y)$为阻抗。在图2中从 Darlington $C$-型节的输入端看进去的余部阻抗$Z(s)$为：

$$\frac{Z(s)}{R}=\frac{\left[\left(1-\frac{\sigma}{R}\sum_{m=1}^{\lambda}L_{2m-1}\right)(b_0-\hat{b}_0)+\sigma(b_1+\hat{b}_1)/\omega_c\right]s+\sigma(b_0+\hat{b}_0)}{\left[\left(1-R\sigma\sum_{m=0}^{\lambda}C_{2m}\right)(b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)/\omega_c\right]s+\sigma(b_0-\hat{b}_0)} \tag{69}$$

其中$C_0=C$，$C_n=0$以及在$n$为奇数时，$\lambda=(n-1)/2$，而在$n$为偶数时，$\lambda=n/2$，

$$b_0=2^{1-n}\sinh na,\qquad n\text{为奇数} \tag{70a}$$

$$=2^{1-n}\cosh na,\qquad n\text{为偶数} \tag{70b}$$

$$\hat{b}_0=2^{1-n}\sinh n\hat{a},\qquad n\text{为奇数} \tag{71a}$$

$$=2^{1-n}\cosh n\hat{a},\qquad n\text{为偶数} \tag{71b}$$

$b_1$和$\hat{b}_1$由（55）式确定。

图2中的Darlington $C$-型节的元件值可再次地由（29）式，利用各个C来确定如下：

$$c_1=\left(R-\sigma\sum_{m=1}^{\lambda}L_{2m-1}\right)(b_0-\hat{b}_0)+R\sigma(b_1+\hat{b}_1)/\omega_c \tag{72a}$$

$$c_2=R\sigma(b_0+\hat{b}_0) \tag{72b}$$

$$c_3=\left(1-R\sigma\sum_{m=0}^{\lambda}C_{2m}\right)(b_0+\hat{b}_0)+\sigma(b_1-\hat{b}_1)/\omega_c \tag{72c}$$

$$c_4=\sigma(b_0-\hat{b}_0) \tag{72d}$$

最后，终端所接电阻$R_{22}$可从（69）式令$s=0$而确定，从而得到：

$$R_{22}=R\frac{b_0+\hat{b}_0}{b_0-\hat{b}_0}$$

$$=R\,\frac{\sinh na+\sinh n\hat{a}}{\sinh na-\sinh n\hat{a}},\qquad n\text{为奇数} \tag{73a}$$

$$= R\frac{\cosh na + \cosh n\hat{a}}{\cosh na - \cosh n\hat{a}}, \qquad n\text{为偶数} \tag{73b}$$

说明性的例子

例3：令

$$\begin{aligned} &R = 150\Omega \qquad L = 1\mu H \\ &C = 100pF \qquad \omega_c = 2\cdot 10^8 rad/s \\ &n = 4 \qquad \epsilon = 0.508847(1\text{-dB波纹}) \end{aligned} \tag{74}$$

利用[4]中所导出的公式和符号，我们得到：

$$\begin{aligned} &k = 2.589609 \qquad \phi = 0.491252 \\ &\zeta = 2.130520 \end{aligned} \tag{75}$$

从而得到

$$\begin{aligned} &\sigma = 0.297048\cdot 10^8 \qquad K_4 = 0.738066 \\ &\hat{\epsilon} = 0.994240 \qquad \hat{a} = 0.221366 \end{aligned} \tag{76}$$

其中$a = 0.356994$。由（66a）我们算得：

$$L_1 = \frac{4\cdot 150\sin 22.5°\sin 67.5°}{(1 - 150\cdot 10^{-10}\sigma)[150\cdot 10^{-10}\cdot 4\cdot 10^{16} f_1(\sinh a,\ \sinh\hat{a}) + 4\sigma\sin 22.5°\sin 67.5°]}$$

$$= 1\mu H \tag{77}$$

这正是预料到的，因为它属于[4]中所定义的情况2。

应用（66）式得到匹配网络的梯形部分的元件值如下：

$$C_2 = \frac{4\sin 67.5°\sin 112.5°}{L_1\cdot 4\cdot 10^{16} f_2(\sinh a, \sinh\hat{a})} \cdot \frac{1 + \hat{H}_3/\hat{H}_4}{1 + \hat{H}_5/\hat{H}_6} = 51.309064pF \tag{78a}$$

其中$f_2(\sinh a,\ \sinh\hat{a}) = 1.182760$，$\hat{H}_3 = 0.280060\cdot 10^{16}$，$\hat{H}_4 = 2.270706\cdot 10^{16}$，$\hat{H}_5 = 1.400047\cdot 10^{24}$以及$\hat{H}_6 = 2.413988\cdot 10^{24}$；

以及

$$L_3 = \frac{4\sin 112.5°\sin 157.5°}{C_2\cdot 4\cdot 10^{16} f_3(\sinh a, \sinh\hat{a})} \cdot \frac{1 + \hat{H}_5/\hat{H}_6}{1 + \hat{H}_7/\hat{H}_8} = 1.233199\mu H \tag{78b}$$

其中 $f_3(\sinh a,\ \sinh\hat{a}) = 0.797844$，$\hat{H}_7 = 0.867123\cdot 10^{32}$，以及$\hat{H}_8 = 8.140451\cdot 10^{32}$

从（55）式我们得到：

$$b_1 = 0.742619 \qquad \hat{b}_1 = 0.406051 \tag{79}$$

余部阻抗$Z(s)$可从（69）式确定，它为：

$$Z(s) = \frac{c_1 s + c_2}{c_3 s + c_4} = \frac{33.818061s + 20.180723\cdot 10^8}{0.197553s + 0.029211\cdot 10^8} \tag{80}$$

从（29）式连同（72）式一起，Darlington C-型节元件值可得到为：

$$\begin{aligned} &L_p = 3.847601\mu H \qquad L_s = 15.527877\mu H \\ &M = 7.729493\mu H \qquad C_p = 146.6202pF \end{aligned} \tag{81}$$

最后，终端所接电阻$R_{22}$可从（73a）式确定，从而得到：

$$R_{22} = 150\frac{\cosh 4a + \cosh 4\hat{a}}{\cosh 4a - \cosh 4\hat{a}} = 690.8560\Omega \tag{82}$$

阻抗匹配网络的最后实现在图5中示出。

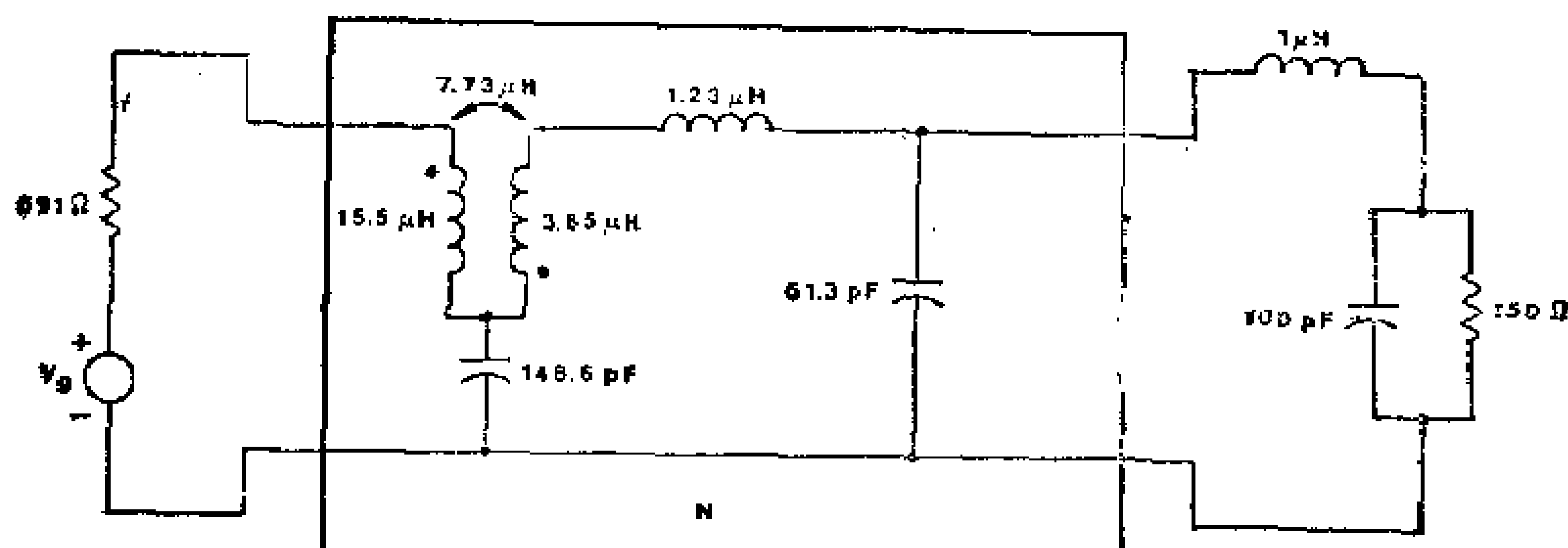



图5 最佳阻抗匹配网络及其负载，它拒有4阶等波纹的传输功率增益特性

**例4.** 令

$$R = 150\Omega \qquad L = 1.5\mu H$$
$$C = 100pF \qquad \omega_c = 10^8 rad/s$$
$$n = 5 \qquad \epsilon = 0.349311 (0.5\text{-dB波纹}) \tag{83}$$

则从[4]中所导出的公式我们得到：

$$\sigma = 0.080421 \cdot 10^8 \qquad K_5 = 1$$
$$\hat{\epsilon} = \infty \qquad \hat{a} = 0 \tag{84}$$

其中$a = 0.354827$。从(66a)我们算得：

$$L_1 = \frac{4 \cdot 150 \sin 18° \sin 54°}{(1 - 150 \cdot 10^{-10}\sigma)[150 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{18} f_1(\sinh a, 0) + 4\sigma \sin 18° \sin 54°]}$$
$$= 2.144081\mu H \tag{85}$$

其中$f_1(\sinh a, 0) = 0.476767$。

应用公式（66）得到阻抗匹配网络的梯形部分的元件值如下：

$$C_2 = \frac{4\sin 54° \sin 90°}{L_1 \cdot 10^{16} f_2(\sinh a, 0)} \cdot \frac{1 + \tilde{H}_3/\tilde{H}_4}{1 - \tilde{H}_5/\tilde{H}_6} = 135.0972 pF \tag{86}$$

其中$f_2(\sinh a, 0) = 1.035784$，$\tilde{H}_3 = 0.053614 \cdot 10^{16}$，$\tilde{H}_4 = 0.476767 \cdot 10^{16}$，$\tilde{H}_5 = 0.085308 \cdot 10^{24}$以及$\tilde{H}_6 = 0.426766 \cdot 10^{24}$；以及

$$L_3 = \frac{4\sin 90° \sin 126°}{C_2 \cdot 10^{16} f_3(\sinh a, 0)} \cdot \frac{1 + \tilde{H}_5/\tilde{H}_6}{1 - \tilde{H}_7/\tilde{H}_8} = 2.474717\mu H \tag{87}$$

其中$f_3(\sinh a, 0) = 1.035784$，$\tilde{H}_7 = 0.066633 \cdot 10^{32}$，以及$\tilde{H}_8 = 0.549360 \cdot 10^{32}$；以及

$$C_4 = \frac{4\sin 126° \sin 162°}{L_3 \cdot 10^{16} f_4(\sinh a, 0)} \cdot \frac{1 + \tilde{H}_7/\tilde{H}_8}{1 + \tilde{H}_9/\tilde{H}_{10}} = 84.4457 pF \tag{88}$$

其中$f_4(\sinh a, 0) = 0.476767$，$\tilde{H}_9 = 0.030617 \cdot 10^{40}$，以及$\tilde{H}_{10} = 0.244140 \cdot 10^{40}$。

从(55)式我们得到

$$b_1 = 0.752518 \text{和} \hat{b}_1 = 0.312500 \tag{89}$$

余部阻抗可从(69)式确定，它为：

$$Z(s) = \frac{c_1 s + c_2}{c_3 s + c_4} = \frac{33.039904 s + 2.158380 \cdot 10^8}{0.145340 s + 0.014389 \cdot 10^8} \tag{90}$$

它连同（29）式一起，给出Darlington$C$-型节的元件值，

$$L_p = 12.669800\mu H \qquad L_s = 8.360045\mu H$$
$$M = 10.291749\mu H \qquad C_p = 1.502353nF \tag{91}$$

终端所接电阻$R_{22}$从（73a）式计算，它为：

$$R_{22} = 150\frac{\sinh 5a + \sinh 0}{\sinh 5a - \sinh 0} = 150\Omega \tag{92}$$

它也可从（90）式，令$s = 0$而容易地得出。

该网络的最后实现示于图6。

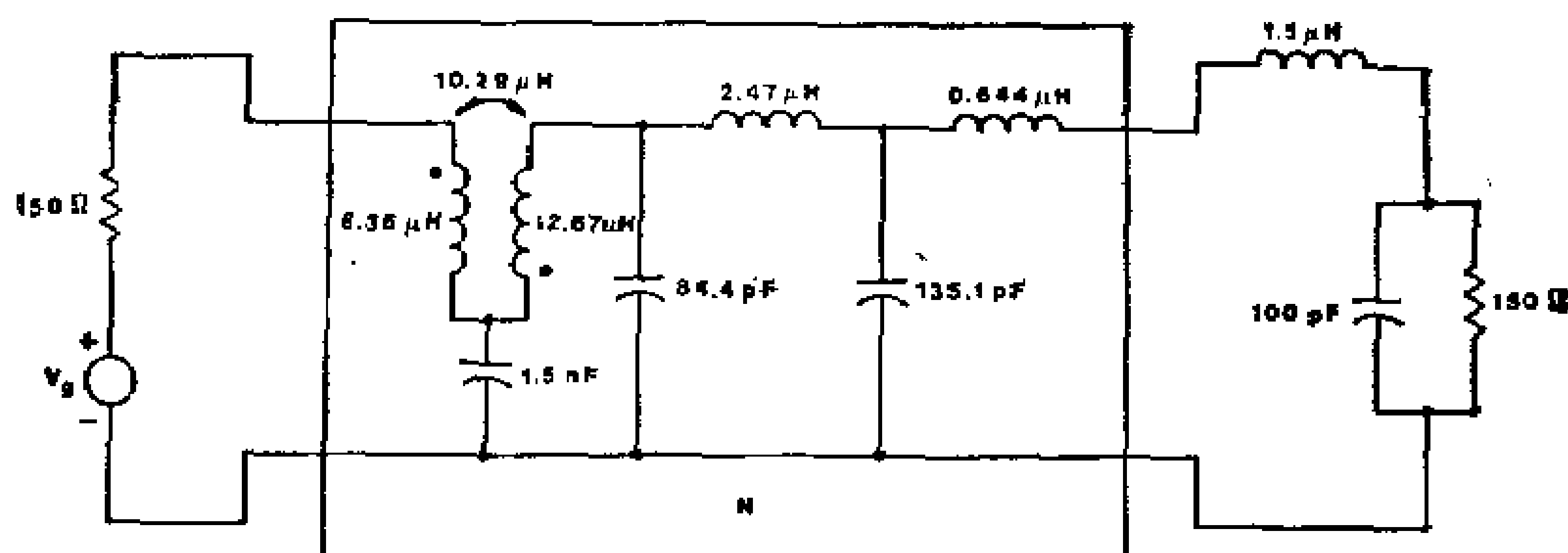



图6　最佳阻抗匹配网络及其负载，它拥有5阶等波纹传输功率增益特性

## 结　论

在本文中，我们提出了使图1所示的$RLC$型负载与一个给定的电阻性信号源在有限的频带内进行匹配，而给出无损耗均衡器的元件值的显式公式，从而实现任意阶的最大平坦或等波纹传输功率增益特性。这些公式的意义在于避免了使用设计曲线和在选定最佳参数时求解非线性方程。因而我们把设计这些匹配网络简化为简单的算术运算。

## 参　考　文　献


［1］R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances," *J. Franklin Inst.*, vol. 249, pp. 57-83, Jan. 1950, and pp. 139-154, Feb. 1950.

［2］G. L. Matthaei, "Synthesis of Tchebycheff impedance-matching networks, filters and interstages," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-3, pp. 163-172, Sept. 1956.

［3］R. Levy, "Explicit formulas for Chebyshev impedance-matching networks, filters and interstages," *Proc. IEE*, vol. 111, pp. 1099-1106, June 1964.

［4］W. K. Chen, "Synthesis of optimum Butterworth and Chebyshev broad-band impedance-matching networks," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-24, pp. 157-169, Apr. 1977.

［5］D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching," *IEEE Trans.Circuit Theory*, vol. CT-11, pp. 30-50 Mar. 1964.

［6］W. K. Chen, *Theory and Design of Broadband Matching Networks.* Oxford, England, Pergamon Press, 1976.

［7］D. C. Youla, "A new theory of cascade synthesis," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-8, pp. 244-260, Sept. 1961.

# 二十六、最佳带通巴特沃思和切比雪夫阻抗匹配网络综合的显式公式

## 摘　　要

本文导出了一类最实际的$RLC$型负载网络，且具有任意阶巴特沃思和切比雪夫响应，在实现带通阻抗匹配网络时，计算其最佳设计参数的显式公式。证明了在其均衡器的末端反射系数中至多利用一个2阶全通函数，可实现带通阻抗匹配的充要条件是给定负载的串联电感不超过某一个临界值。这与在低通情况下的结论恰相反，在后一种情况下，我们早先曾指出过，对一个任意的$RLC$型负载网络，仅需一个1阶全通函数即可实现匹配。这些结果的意义在于我们把这些带通阻抗匹配网络的设计简化为简单的算术运算。

**1．引言**

在通信系统中，一个实际问题是如图1所示，使一个负载与一个电阻性信号源（它也可表示另一个其它网络的等效网络）之间进行匹配，使得在给定的频带内，以一个给定的容差从信号源到负载所传输的功率为最大。这一问题的初步解答是由 Fano[1] 所给出的，他指出了

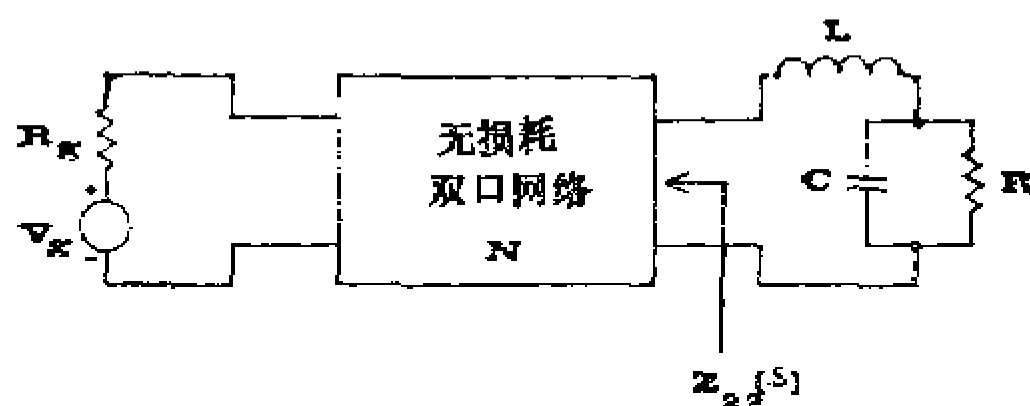



图1　$RLC$型负载的阻抗匹配问题

如何综合一个低通切比雪夫匹配网络。Matthaei[2] 修改和推广了Fano的设计方法且给出了选取最佳参数的实际方法。在由Matthaei所分类的特殊情况（作为情况1）下，Levy[3] 曾导出过一种简化理论。因为这些方法是非线性的，在选取最佳设计参数时需用图解曲线。

最近，我们已经说明了[4，5]，如图1所示的$RLC$ 型负载可以与一个电阻性信号源进行最佳匹配。在一个有限的频带内实现一个任意阶的低通巴特沃思和切比雪夫传输功率增益特性，同时导出了匹配网络的元件值用给定负载表示的显式公式。此处出现的一个问题是利用频率变换是否能将显式公式推广到带通情况下，其答案是否定的，因为通常的低通到带通变换首先应用到均衡器的末端反射系数上，从而导致了完全不同的一组系数约束。本文的目的是导出带通阻抗匹配网络的综合的显式公式。

**2．初步研究**

在通常的低通到带通变换中，

$$s=\frac{\omega_0}{B}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right) \tag{1}$$

令

$$\omega_0^2=\omega_1\omega_2 \tag{2}$$

$$B=(\omega_2-\omega_1)/\omega_0=1/\delta \tag{3}$$

其中$\omega_1$和$\omega_2$分别表示带通频率的下界频率和上界频率。因此，$\omega_0$是$\omega_1$和$\omega_2$的几何平均值，它是带通中心频率，$B$是带通匹配时的归一化带宽，其倒数用$\delta$表示。

参看图1中的网络，令$S'_{22}(s)$是带通匹配网络$N$归一化到下列阻抗

$$z_2(s)=Ls+R/(RCs+1) \tag{4}$$

的在输出端口以电流为基的反射系数。

因此，我们有

$$S'_{22}(s)=\frac{Z_{22}(s)-z_2(-s)}{Z_{22}(s)+z_2(s)} \tag{5}$$

$Z_{22}(s)$是输入端口接以$R_g$时，从输出端口看进去的策动点阻抗。令

$$A(s)=\frac{s-1/RC}{s+1/RC} \tag{6}$$

是由$Z_2(-s)$在开右半复频平面的极点（它位于$1/RC$处）所定义的实正则全通函数。则由下列关系所定义的函数

$$\rho(s)=A(s)S'_{22}(s) \tag{7}$$

是一个在闭右半复频平面内解析的有界实函数。因为网络 $N$ 是无损耗的，故传输功率增益$G(\omega^2)$可用实穷界反射系数表示为：

$$G(\omega^2)=1-|\rho(j\omega)|^2 \tag{8}$$

为了得到负载加给带通匹配网络N的基本约束，我们借助于Youla理论[6]。根据他的理论，负载$z_2(s)$在无穷远处拥有第IV类3阶零点。为了应用这一理论，我们需要进一步计算所需的系数和在传输零点处进行罗朗级数的展开，其结果为：

$$\begin{aligned}A(s)&=\frac{RCs-1}{RCs+1}\\&=A_0+A_1/s+A_2/s^2+A_3/s^3+\cdots\\&=1-2/RCs+2/R^2C^2s^2-2/R^3C^3s^3+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}F(s)&=2r_2(s)A(s)\\&=F_0+F_1/s+F_2/s^2+F_3/s^3+\cdots\\&=-2/RC^2s^2+4/R^2C^3s^3+\cdots\end{aligned} \tag{10}$$

其中$r_2(s)$表示$z_2(s)$的偶部，且

$$\rho(s)=\rho_0+\rho_1/s+\rho_2/s^2+\rho_3/s^3+\cdots \tag{11}$$

对于第IV类3阶传输零点，负载对系数(9)—(11)式的基本约束变为[6]，[7]：

$$A_k=\rho_k,\qquad k=0,\ 1,\ 2 \tag{12a}$$

$$F_2/(A_3-\rho_3)\geq L \tag{12b}$$

### 3. 巴特沃思响应的基本约束

研究具有最大可达直流增益$K_n$的低通巴特沃思传输功率增益特性

$$\hat{G}(\hat{\omega}^2)=\frac{K_n}{1+(\hat{\omega}/\omega_0)^{2n}},\qquad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{13}$$

其中$\omega_0$是3分贝带宽。应用低通到带通的变换(1)以及引用解析延拓理论，相应的带通传输功率增益函数可写成：

$$G(-s^2)=\frac{K_n}{1+(-1)^n(\delta y+\delta/y)^{2n}},\qquad 0\leqslant K_n\leqslant 1 \tag{14}$$

其中$y=s/\omega_0$是归一化的复频率变量。从(8)式我们得到

$$\rho(s)\rho(-s)=q^{2n}\frac{1+(-1)^n(\delta y/q+\delta/yq)^{2n}}{1+(-1)^n(\delta y+\delta/y)^{2n}} \tag{15}$$

其中

$$q=(1-K_n)^{1/2n} \tag{16}$$

在$K_n=1$的情况下，(15) 式的分子简化为$(-1)^n(\delta y+\delta/y)^{2n}$。

为便于我们的讨论，令$\hat{\rho}(s)$是 (15) 式的最小相位解，它可显式地表示成两个霍尔维茨多项式之比：

$$\hat{\rho}(s)=q^n\frac{P(\delta y/q+\delta/yq)}{P(\delta y+\delta/y)} \tag{17}$$

其中

$$P(y)=y^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_1y+1 \tag{18}$$

是$1+(-1)^ny^{2n}=0$的开左半复频平面的零点而形成的霍尔维茨多项式。借助于众所周知的二项式展开，得到

$$\begin{aligned}y^nq^nP(\delta y/q+\delta/yq)&=\delta^ny^{2n}+qa_{n-1}\delta^{n-1}y^{2n-1}\\&\quad+(n\delta^n+q^2a_{n-2}\delta^{n-2})y^{2n-2}\\&\quad+[(n-1)qa_{n-1}\delta^{n-1}+q^3a_{n-3}\delta^{n-3}]y^{2n-3}\\&\quad+\cdots+qa_{n-1}\delta^{n-1}y+\delta^n\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}y^nP(\delta y+\delta/y)&=\delta^ny^{2n}+a_{n-1}\delta^{n-1}y^{2n-1}\\&\quad+(n\delta^n+a_{n-2}\delta^{n-2})y^{2n-2}\\&\quad+[(n-1)a_{n-1}\delta^{n-1}+a_{n-3}\delta^{n-3}]y^{2n-3}\\&\quad+\cdots+a_{n-1}\delta^{n-1}y+\delta^n\end{aligned} \tag{20}$$

(15)式的最一般解由下式给出：

$$\rho(s)=\pm\eta(\delta s+\delta\omega_0^2/s)\hat{\rho}(s) \tag{21}$$

它在闭右半复频平面内解析且可直接从相应的低通响应转换而得。其中$\eta(s)$是一个任意的实正则全通函数。

我们在此处是研究如图1所示的负载用2阶实正则全通函数而进行带通匹配的网络。因此，令$\eta(s)=(s-\sigma)/(s+\sigma)$是1阶实正则全通函数，从而得到

$$\rho(s)=\frac{\delta s+\delta\omega_0^2/s-\sigma}{\delta s+\delta\omega_0^2/s+\sigma}\hat{\rho}(s) \tag{22}$$

其中$\sigma$是非负的实数。

把 (17) 式代入 (22) 式连同(19)、(20)和(22)式一起，像(11)式那样在无穷远处展开成罗朗级数，则

$$\rho_0=1 \tag{23a}$$

$$\rho_1/\omega_0=[(q-1)a_{n-1}-2\hat{\sigma}]/\delta \tag{23b}$$

$$\rho_2/\omega_0^2=[(q^2-1)a_{n-2}-(q-1)(a_{n-1}+2\hat{\sigma})a_{n-1}+2\hat{\sigma}^2]/\delta^2 \tag{23c}$$

$$\begin{aligned}\rho_3/\omega_0^3=(&(q^3-1)a_{n-3}-(q^2-1)(a_{n-1}+2\hat{\sigma})a_{n-2}\\&-(q-1)a_{n-1}a_{n-2}\\&+(q-1)(a_{n-1}^2+2\hat{\sigma}a_{n-1}+2\hat{\sigma}^2)a_{n-1}-2\hat{\sigma}^3\\&-\delta^2[(q-1)a_{n-1}-2\hat{\sigma}])/\delta^3\end{aligned} \tag{23d}$$

在[4]中

$$\hat{\sigma}=\sigma/\omega_0 \tag{24}$$

$$\gamma_m=m\pi/2n,\quad m=1,2,\cdots,n \tag{25}$$

$$a_{n-1}=1/\sin\gamma_1 \tag{26a}$$

$$a_{n-2}=1/(2\sin^2\gamma_1)=\frac{1}{2}a_{n-1}^2 \tag{26b}$$

$$a_{n-3}=\frac{\cos\gamma_2}{2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}=\frac{a_{n-1}^2\cos\gamma_2}{2\sin\gamma_3} \tag{26c}$$

从(9)式和(23a)式，(12a)的约束$A_0=\rho_0$总是满足的。为了满足约束$A_1=\rho_1$，我们要求

$$-2/RC=[(q-1)a_{n-1}-2\hat{\sigma}]\omega_0/\delta \tag{27}$$

从而得到

$$q=1-\frac{2(\delta-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_0} \tag{28}$$

当将其代入(16)式时，得到频带中心处的增益

$$K_n=1-\left[1-\frac{2(\delta-RC\sigma)\sin\gamma_1}{RC\omega_0}\right]^{2n} \tag{29}$$

现在，我们说明，利用(28)式给出的$q$值，第三个约束$A_2=\rho_2$总是如下地满足

$$\begin{aligned}\rho_2/\omega_0^2&=[(q^2-1)a_{n-2}-(q-1)\\&\quad\cdot(a_{n-1}+2\hat{\sigma})a_{n-1}+2\hat{\sigma}^2]/\delta^2\\&=[(q-1)a_{n-1}-2\hat{\sigma}]^2/2\delta^2\\&=2/R^2C^2\omega_0^2=A_2/\omega_0^2\end{aligned} \tag{30}$$

最后，我们有约束(12b)，为了满足这一要求，我们定义

$$L_a=\frac{F_2}{A_3-\rho_3} \tag{31}$$

从(9)，(10)和(23d)所得的$A_3$，$F_2$和$\rho_3$代入(31)式连同(26)式和(28)式一起，在经过若干数学运算之后，临界电感$L_a$可以简化且为

$$L_a=(4R\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/D_a \tag{32a}$$

其中

$$\begin{aligned}D_a=(\delta-RC\sigma)[&RC\omega_0^2(q^2-2q\cos\gamma_2+4\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+1)\\&+4\sigma\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3]+4\sigma R^2C^2\omega_0^2\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3\end{aligned} \tag{32b}$$

因此，在具有(29)式所确定的$K_n$和仅仅利用一个2阶全通函数，带通匹配是可行的，其充要条件是串联电感$L$不超过临界电感$L_a$。为了便于我们讨论，令

$$x=RC\omega_0 \tag{33}$$

$$u=x(1-q)/(2\sin\gamma_1) \tag{34}$$

利用这些值代入(28)和(32)式，得到

$$\sigma/\omega_0=(\delta-u)/x \tag{35}$$

$$\omega_0 L_a=(4xR\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/D_a' \tag{36}$$

其中

$$D_a'=u[4(u-x\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1+x^2\sin^2\gamma_2+4(\delta-u)\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3] +4x^2\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3 \tag{37}$$

因为$\sigma$必须是非负的，如(35)式所见，$u$限制在$0\leqslant u\leqslant\delta$的范围内。在$0\leqslant u\leqslant\delta$时，(37)式和$L_a$显然是非负的。当$u=0$时，$L_a$的最大值得到为

$$L_{a,max}=1/C\omega_0^2 \tag{38}$$

换句话说，只利用一个2阶全通函数，仅当串联电感不超过$L_{a,max}$时，带通匹配才是可能的。这一点与低通情况正相反，在后者情况下我们证明过任意给定的$RLC$型负载可以仅用一个1阶全通函数即可进行匹配[4]。

为了继续我们的讨论，下面我们说明条件(38)也是充分的。具体地说，我们将证明，对于任意一个给定的$L\leqslant L_{a,max}$，存在一个非负的实数$\sigma$使得$L_a$至少做得与给定的$L$一样大，且满足(29)式的要求($0\leqslant K_n\leqslant 1$)。为此，要分两种情况进行研究。

**情况1**，$x\geqslant 2\delta\sin\gamma_1$　在此情况下，最大可能的$u$是$\delta$。把$u=\delta$代入(36)式连同(37)式一起得到

$$L_{a_1}=L_a|_{u=\delta}$$

$$=\frac{xR\delta^2\sin\gamma_3}{[(\delta-x\sin\gamma_1)^2+x^2\cos^2\gamma_1]\omega_0\sin\gamma_1+x^2\delta^2\omega_0\sin\gamma_3}>0 \tag{39}$$

为了进行适当的讨论，又要分两种情况进行研究。

**子情况1**．$L\leqslant L_{a_1}$。则为使$K_n$最大，从(29)式对应于最小的$\sigma$，我们从(35)式选取$u=\delta$，从而得到$\sigma=0$和

$$K_{n,max}=1-(1-2\delta x^{-1}\sin\gamma_1)^{2n} \tag{40}$$

**子情况2**．令$L_{a_1}<L\leqslant L_{a,max}=1/c\omega_0^2$。为使$K_n$最大，我们在(36)式中令$L_a=L$，则得到一个用$u$表示的三次方程：

$$g(u)=c_1u^3+c_2u^2+c_3u+c_4=0 \tag{41}$$

其中

$$c_1=4\sin^2\gamma_1 \tag{42a}$$

$$c_2=-4(2x\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3)\sin\gamma_1 \tag{42b}$$

$$c_3=4x^2\sin^4\gamma_1+x^2\sin^2\gamma_2+4\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3 \tag{42c}$$

$$c_4=-(1-LC\omega_0^2)(4Rx\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L\omega_0 \tag{42d}$$

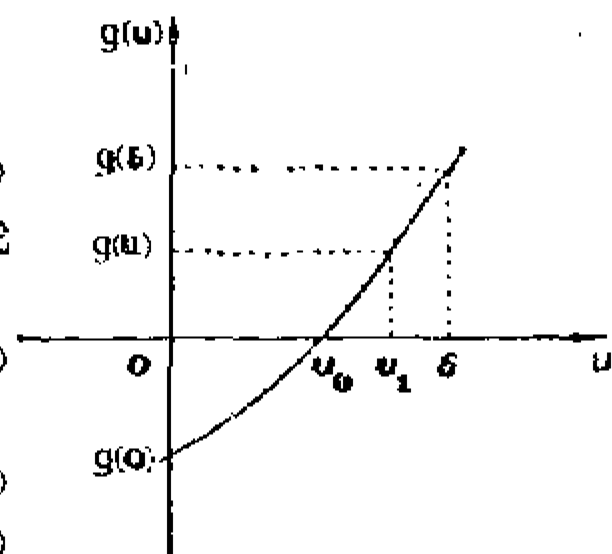



图2　在0到$\delta$的范围内，三次方程$g(u)$存在一个实根的证明

现在我们必须证明在$0\leqslant u<\delta$的范围内，在(41)式中拥有一个$u$的实根。为此，我们作出$g(u)$为$u$以函数的图形。对于$u=0$，$g(0)=c_4$，因为根据假设$L\leqslant 1/c\omega_0^2$，故$c_4$是一个非负值；对于$u=\delta$，利用$L_{a_1}$的定义，我们有

$$g(\delta)=c_1\delta^3+c_2\delta^2+c_3\delta+c_4>c_1\delta^3+c_2\delta^2+c_3\delta+c_4'=0 \tag{43}$$

其中

$$c_4'=-(1-L_{a_1}C\omega_0^2)(4Rx\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L_{a_1}\omega_0<0 \tag{44}$$

事实上，$g(u)$的斜率总是正的，

$$\frac{dg(u)}{du}=3c_1u^2+2c_2u+c_3$$

$$=4(u-\delta)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+4(x-2u\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1>0 \tag{45}$$

从以上看出，$g(u)\sim u$图形是单调增长的且必然具有图2所示的图形。该曲线与$u$轴的交点给出了所要求的$u$值，当该$u$值代入(35)式时，将得到$\sigma$的最佳值。利用这一$\sigma$值，我们可由(29)式计算最大可达频带中心的增益$K_{n,\max}$。

情况2：$x<2\delta\sin\gamma_1$。从(34)式显然可看出，最大可达的$u$为$x/(2\sin\gamma_1)<\delta$，它相应于$q=0$。把这一$u$值代入(36)式，连同(37)式一起得到

$$L_{\sigma_1}=L_\sigma|_{u=x/(2\sin\gamma_1)}=\frac{8R\delta^3\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}{[(x-\delta\sin\gamma_3)^2+(1+4\sin^2\gamma_1)\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+8x\delta^2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3]\omega_0}>0 \tag{46}$$

如同情况1，又分两种子情况进行研究。

**子情况1**，$L\leqslant L_{\sigma_1}$。为使$K_n$最大，我们选取$u=x/(2\sin\gamma_1)$，从(34)、(35)和(29)式以及$q=0$，我们得到：
$$\sigma=[\delta-x/(2\sin\gamma_1)]/RC>0 \tag{47}$$
以及

$$K_n=1$$

**子情况2**、$L_{\sigma_1}<L\leqslant L_{\sigma,\max}=1/c\omega_0^2$。如同以前那样，我们作出$g(u)$为$u$的函数的图形。在$u=0$时，$g(0)=c_4$为一个非正值，以及在$u=u_1=x/(2\sin\gamma_1)<\delta$时，我们有

$$g(u_1)=c_1u_1^3+c_2u_1^2+c_3u_1+c_4>c_1u_1^3+c_2u_1^2+c_3u_1+c_4''=0 \tag{48}$$

其中

$$c_4''=-(1-L_{\sigma_1}C\omega_0^2)(4Rx\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L_{\sigma_1}\omega_0<0 \tag{49}$$

因为(45)式仍然有效，所以$g(u)\sim u$的图形必然具有如图2所示的图形，从而得到所要求的结果。

**4.带通巴特沃思响应的显式公式**

在本节中，我们导出设计最佳的带通巴特沃思匹配网络的显式公式。

从(5)式连同(7)式一起，均衡器的末端阻抗$Z_{22}(s)$可表示为

$$Z_{22}(s)=\frac{F(s)}{A(s)-\rho(s)}-z_2(s)$$

$$=\frac{R}{-RCs-\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}}-Ls \tag{50}$$

根据Youla理论[6]、[7]，假若满足系数约束(12)式的话，上式保证是正实函数。

从(17)—(22)式，$[1+\rho(s)]/[1-\rho(s)]$可以显式地表示成连分数的形式，即为

$$\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{(\delta s+\delta\omega_0^2/s)[P(\delta y+\delta/y)+q^nP(\delta y/q+\delta/qy)]+\sigma[P(\delta y+\delta/y)-q^nP(\delta y/q+\delta/qy)]}{(\delta s+\delta\omega_0^2/s)[P(\delta y+\delta/y)-q^nP(\delta y/q+\delta/qy)]+\sigma[P(\delta y+\delta/y)+q^nP(\delta y/q+\delta/qy)]}$$

$$=C_a's+\frac{1}{L_a's+Z_a(s)} \tag{51}$$

其中$Z_a(s)$是该展开式的余部，且

$$C'_a = \frac{2\delta^{n-1}}{\delta^n[(1-q)a_{n-1}+2\sigma]\omega_0} = \frac{2\delta}{(1-q)a_{n-1}\omega_0+2\sigma} \tag{52}$$

$$L'_a = \frac{4\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(\delta-RC\sigma)[RC\omega_0^2(q^2-2q\cos\gamma_2+4\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+1)+4\sigma\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3]+4\sigma x^2\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{53}$$

其中我们在推导(53)式中已引用了(28)式，再一次借助于它，我们能证明

$$C'_a = RC \tag{54a}$$

$$L'_a = L_a/R \tag{54b}$$

从(50)式均衡器的末端阻抗可表示为：

$$Z_{22}(s) = \frac{1}{F_1(s)-Cs} - Ls \tag{55}$$

其中

$$F_1(s) = \frac{1+\rho(s)}{R[1-\rho(s)]} \tag{56}$$

它是当图1中输入端接以电阻器$R_g$时，从电阻$R$(向左)看进去的阻抗。

为了便于我们进行显式公式的推导，区分4种情况进行研究。每一种情况与前节末所示的一种情况相对应。

情况1：$x \geqslant 2\delta\sin\gamma_1$和$L \leqslant L_{c1}$。在这种情况下，$\sigma=0$和最大频带中心增益$K_{n,max}$由(40)式给出。应用(17)—(22)式，归一化的阻抗$RF_1(y)$可表示为：

$$RF_1(y) = \frac{A'_{2n}y^{2n}+A'_{2n-1}y^{2n-1}+A'_{2n-2}y^{2n-2}+\cdots+A'_{2n-2}y^2+A'_{2n-1}y+A'_{2n}}{B'_{2n-1}y^{2n-1}+B'_{2n-2}y^{2n-2}+\cdots+B'_{2n-2}y^2+B'_{2n-1}y} \tag{57}$$

其中

$$A'_{2n} = 2\delta^n \tag{58a}$$

$$A'_{2n-1} = \delta^{n-1}(1+q)a_{n-1} \tag{58b}$$

$$A'_{2n-2} = 2n\delta^n+\delta^{n-2}(1+q^2)a_{n-2} \tag{58c}$$

$$A'_{2n-3} = (n-1)(1+q)\delta^{n-1}a_{n-1}+\delta^{n-3}(1+q^3)a_{n-3} \tag{58d}$$

$$B'_{2n-1} = \delta^{n-1}(1-q)a_{n-1} \tag{59a}$$

$$B'_{2n-2} = \delta^{n-2}(1-q^2)a_{n-2} \tag{59b}$$

$$B'_{2n-3} = (n-1)(1-q)\delta^{n-1}a_{n-1}-\delta^{n-3}(1-q^3)a_{n-3} \tag{59c}$$

重复应用"前向除法、倒置、前向除法"以及"后退除法、倒置、后退除法"，从而得到：

$$F_1(s) = C_1s+\cfrac{1}{L_2s+\cfrac{1}{C_3s+\cfrac{1}{\ddots\,-\xi_{n-1}s+1/W_1(s)}}} \tag{60}$$

其中当$n$为奇数时，$\xi_{n-1}=L_{n-1}$，当$n$为偶数时，$\xi_{n-1}=C_{n-1}$，以及

$$C_1 = \frac{2\delta\sin\gamma_1}{(1-q)\omega_0R} = C \tag{61a}$$

$$L_2 = \frac{xR\delta^2\sin\gamma_3}{[(\delta-x\sin\gamma_1)^2+x^2\cos^2\gamma_1]\omega_0\sin\gamma_1+x^2\delta^2\omega_0\sin\gamma_3} = L_{c1} > L \tag{61b}$$

当$n$为奇数时，

$$W_1(s)=C_n s+1/L_{n+1}s+\cfrac{1}{1/C_{n+2}s+\cfrac{1}{1/L_{n+3}s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1/C_{2n-1}s+\cfrac{1}{1/L_{2n}s+1/R_{22}}}}}}\tag{62a}$$

此式表示导纳函数。

当$n$为偶数时，

$$W_1(s)=L_n s+\cfrac{1}{1/L_{n+1}s+\cfrac{1}{1/C_{n+2}s+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1/L_{2n-1}s+\cfrac{1}{1/C_{2n}s+R_{22}}}}}}\tag{62b}$$

此式表示阻抗函数。这表示均衡器的末端阻抗$Z_{22}(s)$可实现为一个终端接电阻器$R_{22}$的$LC$梯形网络，如图3中所示。

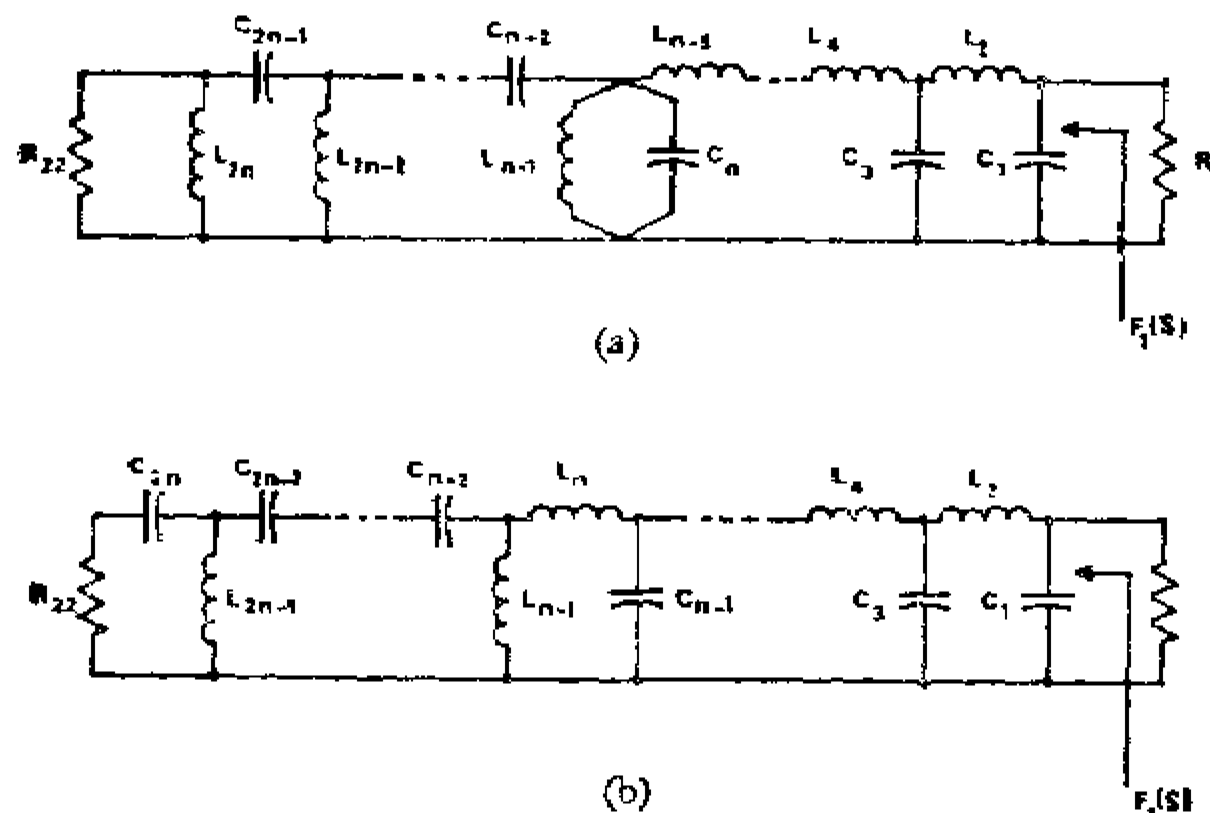



图3　均衡器的末端阻抗实现为一个终端接电阻器的$LC$梯形网络
(a)$n$为奇数　(b)$n$为偶数

**情况2.** $x\geqslant 2\delta\sin\gamma_1$和$L_{\sigma_1}<L\leqslant 1/C\omega_0^2$。从(41)式可知，所要求的$g(u)=0$的实根$u_0$可以利用解三次方程的标准公式进行计算。在此，我们的目的是导出该根的显示公式，当将其代入(35)式便得到所要求的$\sigma$值。

参看(42)式，我们首先计算$p=(3c_1c_3-c_2^2)/9c_1^2$，在进行了若干数学运算之后，可以简化且写成下列形式：

$$p=\frac{3c_1c_3-c_2^2}{9c_1^2}=\frac{(x-2\delta\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_3}{9\sin\gamma_1}>0\tag{63}$$

上式表明所要求的(41)式的实根$u_0$可以显式地表示成：

$$u_0=\frac{2x\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}-2\sqrt{p}\sinh\frac{\phi}{3} \tag{64}$$

其中

$$\phi=\sinh^{-1}\frac{r}{\sqrt{p^3}} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} r=&\frac{2x\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3}{54\sin^3\gamma_1}\cdot[3(x-2\delta\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3\\ &+(2x\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3)^2]\\ &-\frac{Rx\delta^3(1-LC\omega_0^2)\sin\gamma_3}{2\omega_0 L\sin\gamma_1} \end{aligned} \tag{66}$$

把(64)式代入(35)式得到所要求的$\sigma$值为

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left[\delta+2\sqrt{p}\ \sinh\frac{\phi}{3}-\frac{2x\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}\right] \tag{67}$$

最后，利用(67)式，最大频带中心增益$K_{n,max}$由(29)式确定。

**情况3.** $x<2\delta\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{c2}$。则为使$K_n$最大，我们选取$u=u_1=x/(2\sin\gamma)$，从而得到$q=0$，$K_n=1$和

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left(\delta-\frac{RC\omega_0}{2\sin\gamma_1}\right)>0 \tag{68}$$

**情况4.** $x<2\delta\sin\gamma$和$L_{c2}<L\leqslant 1/C\omega_0^2$。因为在此情况下(63)式仍然成立，故所要求的$\sigma$值可由(67)式确定。利用这一$\sigma$值，最大频带中心增益$K_{n,max}$由(29)式确定。

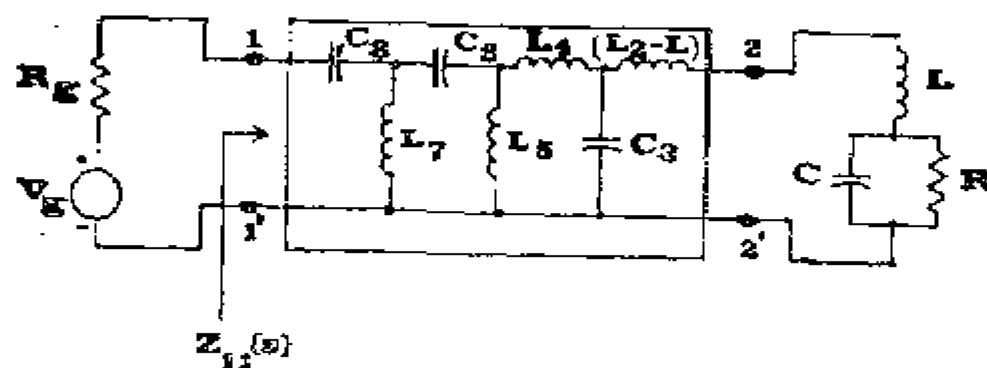



图4 四阶带通匹配网络及其负载

我们注意对于情况2、3和4来说，均衡器的末端阻抗$Z_{22}(s)$不能实现为一个终端接一个电阻器的$LC$梯形网络。类似于[5]中所讨论的方法，但应该遵照稍为不同的方法。尽管如此，归一化的导纳$RF_1(y)$可以显式地表示为：

$$RF_1(y)=\frac{A''_{2n+2}y^{2n+2}+A''_{2n+1}y^{2n+1}+A''_{2n}y^{2n}+\cdots+A''_{2n}y^2+A''_{2n+1}y+A''_{2n+2}}{B''_{2n+1}y^{2n-1}+B''_{2n}y^{2n}+B''_{2n-1}y^{2n-1}+\cdots+B''_{2n-1}y^3+B''_{2n}y^2+B''_{2n+1}y} \tag{69}$$

其中

$$A''_{2n+2}=2\delta^{n-1} \tag{70a}$$

$$A''_{2n+1}=\delta^n(1+q)a_{n-1} \tag{70b}$$

$$\begin{aligned} A''_{2n}=&2(n+1)\delta^{n+1}\\ &+\delta^{n-1}[(1+q^2)a_{n-2}+\delta(1-q)a_{n-1}] \end{aligned} \tag{70c}$$

$$A''_{2n-1}=n\delta^n(1+q)a_{n-1}$$

$$+\hat{\delta}^{n-2}[(1+q^3)a_{n-3}+\hat{\sigma}(1-q^2)a_{n-2}] \tag{70d}$$

$$B''_{2n+1}=\hat{\delta}^n[(1-q)a_{n-1}+2\hat{\sigma}] \tag{71a}$$

$$B''_{2n}=\hat{\delta}^{n-1}[(1-q^2)a_{n-2}+\hat{\sigma}(1+q)a_{n-1}] \tag{71b}$$

$$B''_{2n-1}=n\hat{\delta}^n[(1-q)a_{n-1}+2\hat{\sigma}]$$
$$+\hat{\delta}^{n-2}[(1-q^3)a_{n-3}+\hat{\sigma}(1+q^2)a_{n-2}] \tag{71c}$$

我们用下列例子来说明上述结果。

例1：令

$$R=100\Omega \quad C=350\text{pF} \quad L=0.2\mu\text{H}$$

$$n=4 \qquad \omega_1=10^8/\sqrt{2}\,\text{rad/s} \qquad \omega_2=\sqrt{2}\times 10^8\text{rad/s}$$

从(2)式和(3)式我们得到

$$\hat{\delta}=\sqrt{2} \quad \omega_0=10^8\text{rad/s} \tag{72}$$

因为

$$x=RC\omega_0=3.5\geqslant 2\hat{\delta}\sin\gamma_1=1.08239 \tag{73}$$

从(39)式我们算出

$$L_{a1}=0.24277\mu\text{H}>L \tag{74}$$

因此适用于情况1，带通匹配网络$N$可以实现为如图3(b)所示的$LC$梯形网络。从(40)式最大的频带中心增益$K_{4,max}$可得到为：

$$K_{4,max}=0.94818 \tag{75}$$

从(16)式得到

$$q=0.69075 \tag{76}$$

把这些值代入(58)和(59)式给出归一化的导纳$RF_1(y)$，其各个参数为：

$$\begin{aligned} &A'_8=8.00000 \qquad B'_7=2.28572\\ &A'_7=12.49638 \qquad B'_6=3.57038\\ &A'_6=42.08646 \qquad B'_5=9.33473\\ &A'_5=42.40261 \qquad B'_4=7.91312\\ &A'_4=69.40056 \end{aligned} \tag{77}$$

导纳$F_1(s)$可以展成(60)和(62b)式的形式，且$C=C_1=350\text{pF}$，$L=0.2\mu\text{H}$，以及

$$\begin{aligned} &L_2=0.243\mu\text{H} \qquad C_3=2.254\text{nF} \qquad L_4=0.033\mu\text{H}\\ &L_6=0.010\mu\text{H} \qquad C_8=8.241\text{nF} \qquad L_7=0.007\mu\text{H}\\ &C_8=27.23\text{nF} \qquad R_{22}=0.573\Omega=R_g \end{aligned} \tag{78}$$

带通匹配网络及其负载一起示于图4。为了验证我们的设计，我们计算图4的传输功率增益，其结果为：

$$G(\omega^2)=\frac{4R_{22}\text{Re}Z_{11}(j\omega)}{|R_{22}+Z_{11}(j\omega)|^2} \tag{79}$$

其中

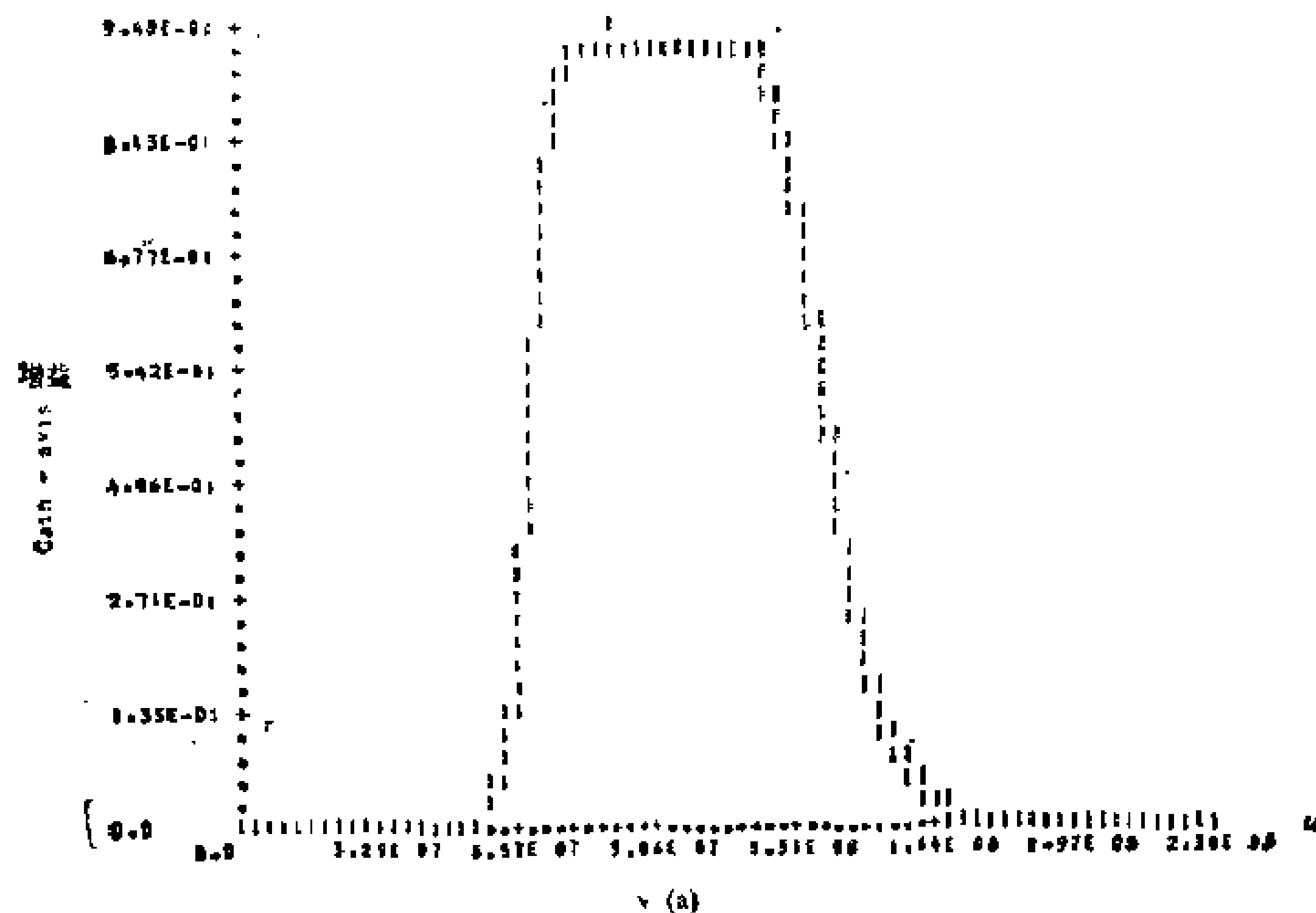
$$Z_{11}(y)=\frac{y^8+\alpha'_7y^7+\alpha'_6y^6+\alpha'_5y^5+\alpha'_4y^4+\alpha'_5y^3+\alpha'_6y^2+\alpha'_7y+1}{\alpha_7y^7+\alpha_6y^6+\alpha_5y^5+\alpha_4y^4+\alpha_5y^3+\alpha_6y^2+\alpha_7y} \tag{80}$$

各系数为：

$$\begin{aligned} &\alpha'_7=0.28571 \qquad \alpha_7=272.3621\\ &\alpha'_6=5.26080 \qquad \alpha_6=77.81774\\ &\alpha'_5=1.16684 \qquad \alpha_5=924.1323 \end{aligned} \tag{81}$$

$\alpha_4' = 8.67506 \qquad \alpha_4 = 172.4569$

(79)式以ω为函数的图形示于图5。



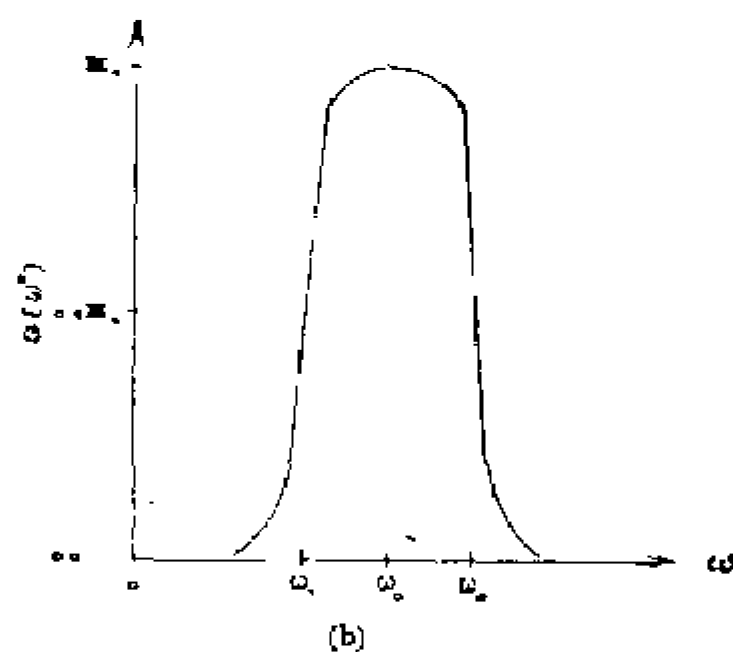




图5 (79)式以实频率ω为函数的图形

例2. 研究与例1相同的问题，只不过现在我们选取$n=5$，$C=200\text{pF}$，和$L=0.45\mu\text{H}$，其余与前相同。则我们有

$$1/C\omega_0^2 = 0.5\times10^{-6} \qquad x = RC\omega_0 = 2$$

$$L_{x1} = 0.41552\mu\text{H} \quad \delta = \sqrt{2}$$

$$2\delta\sin\gamma_1 = 2\delta\sin18^\circ = 0.87403 \tag{82}$$

因此适用于情况2，且需要附加一个全通函数。从(63)—(66)式我们得到：

$$p = 0.36879 \qquad r = 1.49560 \qquad \phi = 2.59750 \tag{83}$$

把这些值代入(67)式，从而得到所要求的σ值：

$$\sigma=0.47803\times10^{8} \tag{84}$$

从(29)和(16)式给出：

$$K_{5,\max}=0.78272 \qquad q=0.85842 \tag{85}$$

例3．令

$$\begin{aligned}
&R=100\Omega\\
&C=50\text{pF}\\
&L=0.39\mu\text{H}\\
&n=5\\
&\omega_1=10^8/\sqrt{2}\ \text{rad/s}\\
&\omega_2=\sqrt{2}\times10^8\text{rad/s}
\end{aligned} \tag{86}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\omega_0=10^8\text{rad/s} \qquad x=RC\omega_0=0.5\\
&L_{c2}=0.88290\mu\text{H} \qquad \delta=\sqrt{2}\\
&2\delta\sin\gamma_1=2\delta\sin18^\circ=0.87403
\end{aligned} \tag{87}$$

则适用于情况3，我们得到：

$$K_{5,\max}=1 \qquad \sigma=1.21039\times10^{8} \tag{88}$$

例4．研究与例3相同的问题，只不过现在串联电感$L$从0.39$\mu$H升到1.5$\mu$H，其余与前相同。因此我们有：

$$\begin{aligned}
&L_{a2}=0.88290\mu\text{H}\\
&1/C\omega_0^2=2\times10^{-6}\\
&\quad x=RC\omega_0=0.5\\
&2\delta\sin\gamma_1=0.87403
\end{aligned} \tag{89}$$

且适用于情况4。从(63)—(66)式我们得到：

$$\begin{aligned}
&p=0.04070\\
&r=0.96850\\
&\phi=5.46360
\end{aligned} \tag{90}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\sigma=2.58194\times10^{8}\\
&K_{5,\max}=0.80848\\
&q=0.84766
\end{aligned} \tag{91}$$

因为利用了(22)式中的一个全通函数，所以均衡器末端阻抗$Z_{22}(s)$不能简单地实现为一个终端接电阻器的$LC$梯形网络。故应遵照[5]所讨论的类似方法。

**5．切比雪夫响应的基本约束**

现在，我们把注意力转向切比雪夫响应。我们的目标是要使图1的$RLC$型负载与一个电阻性信号源相匹配，以实现一个$n$阶带通传输功率增益函数

$$G(-s^2)=\frac{K_n}{1+\epsilon^2C_n^2(-j\delta y-j\delta/y)},\quad 0\leqslant K_n\leqslant1 \tag{92}$$

其中，如前一样，$y=s/\omega_0$，$\varepsilon<1$，$C_n(\omega)$是第一类的$n$阶切比雪夫多项式，仿照(15)式，我们有：

$$\rho(s)\rho(-s)=(1-K_n)\frac{1+\hat{\epsilon}^2C_n^2(-j\delta y-j\delta/y)}{1+\epsilon^2C_n^2(-j\delta y-j\delta/y)} \tag{93}$$

其中 $\hat{\epsilon}=\epsilon(1-K_n)^{-1/2}$。

如同(17)式，令 $\hat{\rho}(s)$ 是(93)式的最小相位解且可表示成两个霍尔维茨多项式之比：

$$\hat{\rho}(s)=\frac{\hat{f}_{2n}y^{2n}+\hat{f}_{2n-1}y^{2n-1}+\hat{f}_{2n-2}y^{2n-2}+\cdots+\hat{f}_{2n-2}y^{2}+\hat{f}_{2n-1}y+\hat{f}_{2n}}{\hat{g}_{2n}y^{2n}+\hat{g}_{2n-1}y^{2n-1}+\hat{g}_{2n-2}y^{2n-2}+\cdots+\hat{g}_{2n-2}y^{2}+\hat{g}_{2n-1}y+\hat{g}_{2n}} \tag{94}$$

其中

$$\hat{g}_{2n}=\delta^{n} \tag{95a}$$

$$\hat{g}_{2n-1}=\delta^{n-1}b_{n-1} \tag{95b}$$

$$\hat{g}_{2n-2}=n\delta^{n}+\delta^{n-2}b_{n-2} \tag{95c}$$

$$\hat{g}_{2n-3}=(n-1)\delta^{n-1}b_{n-1}+\delta^{n-3}b_{n-3} \tag{95d}$$

$$b_{n-1}=(\sin\gamma_1)^{-1}\sinh a \tag{96a}$$

$$b_{n-2}=\frac{1}{4}n+(2\sin^2\gamma_1)^{-1}\sinh^2 a=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}b_{n-1}^2 \tag{96b}$$

$$b_{n-3}=\frac{\sinh a}{\sin\gamma_1}\left(\frac{1}{4}n-\frac{\cos^2\gamma_1\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\right)+\frac{\sinh^3 a\cos\gamma_2}{2\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{96c}$$

$$a=\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} \tag{97a}$$

$$\hat{a}=\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\hat{\epsilon}} \tag{97b}$$

以及 $\gamma_m=m\pi/2n$。各个 $\hat{f}$ 的定义和各个 $\hat{g}$ 的定义相同，只不过在(96)式中需用 $\hat{a}$ 代替 $a$。事实上，$(\rho s)$ 可表示成闭合形式为：

在 $n$ 为偶数时，

$$\hat{\rho}(s)=\frac{\prod\limits_{m=0}^{1/2(n-2)}[\delta^2y^4+2\hat{w}\delta y^3\cos\gamma_{2m+1}+(2\delta^2+\hat{w}^2+\sin^2\gamma_{2m+1})y^2+2\hat{w}^2\delta y\cos\gamma_{2m+1}+\delta^2]}{\prod\limits_{m=0}^{1/2(n-2)}[\delta^2y^4+2w\delta y^3\cos\gamma_{2m+1}+(2\delta^2+w^2+\sin^2\gamma_{2m+1})y^2+2w^2\delta y\cos\gamma_{2m+1}+\delta^2]} \tag{98a}$$

在 $n$ 为奇数时，$n\geqslant3$，

$$\rho(s)=\frac{(\delta y^2+\hat{w}y+\delta)\prod\limits_{m=1}^{1/2(n-1)}[\delta^2y^4+2\delta\hat{w}y^3\cos\gamma_{2m}+(2\delta^2+\hat{w}^2+\sin^2\gamma_{2m})y^2+2\delta\hat{w}y\cos\gamma_{2m}+\delta^2]}{(\delta y^2+wy+\delta)\prod\limits_{m=1}^{1/2(n-1)}[\delta^2y^4+2\delta wy^3\cos\gamma_{2m}+(2\delta^2+w^2+\sin^2\gamma_{2m})y^2+2\delta wy\cos\gamma_{2m}+\delta^2]} \tag{98b}$$

其中 $w=\sinh a$ 和 $\hat{w}=\sinh\hat{a}$。

(93)式在闭右半复频平面中解析的最一般解可直接从(1)式、用(21)式给出的相应低通响应进行转换而得到。在此的目的是研究仅仅利用一个2阶实正则全通函数的带通匹配网络。

$$\rho(s)=\frac{f_{2n+2}y^{2n+2}+f_{2n+1}y^{2n+1}+f_{2n}y^{2n}+\cdots+f_{2n}y^2+f_{2n+1}y+f_{2n+2}}{g_{2n+2}y^{2n+2}+g_{2n+1}y^{2n+1}+g_{2n}y^{2n}+\cdots+g_{2n}y^2+g_{2n+1}y+g_{2n+2}} \tag{99}$$

其中

$$f_{2n+2}=\delta^{n+1} \tag{100a}$$

$$f_{2n+1}=\delta^n(\hat{b}_{n-1}-\sigma/\omega_0) \tag{100b}$$

$$f_{2n}=(n+1)\delta^{n+1}+\delta^{n-1}(\hat{b}_{n-2}-\sigma\hat{b}_{n-1}/\omega_0) \tag{100c}$$

$$f_{2n-1}=n\delta^n(\hat{b}_{n-1}-\sigma/\omega_0)+\delta^{n-2}(\hat{b}_{n-3}-\sigma\hat{b}_{n-2}/\omega_0) \tag{100d}$$

$$g_{2n+2}=\delta^{n+1} \tag{101a}$$

$$g_{2n+1}=\delta^n(b_{n-1}+\sigma/\omega_0) \tag{101b}$$

$$g_{2n}=(n+1)\delta^{n+1}+\delta^{n-1}(b_{n-2}+\sigma b_{n-1}/\omega_0) \tag{101c}$$

$$g_{2n-1}=n\delta^n(b_{n-1}+\sigma/\omega_0)+\delta^{n-2}(b_{n-3}+\sigma b_{n-2}/\omega_0) \tag{101d}$$

各个$\hat{b}$与(96)式中的定义相同，只不过我们需用$\hat{a}$代替$a$。

$\rho(s)$在无穷远的传输零点处的罗朗级数的展开式如(11)式所得：

$$\rho_0=1 \tag{102a}$$

$$\rho_1/\omega_0=(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1}-2\hat{\sigma})/\delta \tag{102b}$$

$$\rho_2/\omega_0^2=[\hat{b}_{n-2}-b_{n-2}-(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})\cdot(b_{n-1}+2\hat{\sigma})+2\hat{\sigma}^2]/\delta^2 \tag{102c}$$

$$\begin{aligned}\rho_3/\omega_0^3=[&\hat{b}_{n-3}-b_{n-3}-(\hat{b}_{n-2}-b_{n-2})(b_{n-1}+2\hat{\sigma})\\&-b_{n-2}(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})+(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})\cdot(b_{n-1}^2+2\hat{\sigma}b_{n-1}+2\hat{\sigma}^2)-2\hat{\sigma}^3\\&-\delta^2(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1}-2\hat{\sigma})]/\delta^3\end{aligned} \tag{102d}$$

其中$\hat{\sigma}=\sigma/\omega_0$。

对于第IV类传输零点，系数约束由(12)式给出。如同巴特沃思响应一样，第一个约束$A_0=\rho_0$总是满足的。为了满足约束$A_1=\rho_1$，我们要求

$$-2/RC=[(\hat{b}_{n-1}-b_{n-1})\omega_0-2\sigma]/\delta \tag{103}$$

$$K_n=1-\epsilon^2\sinh^2(n\sinh^{-1}[\sinh a-2(\delta-RC\sigma)(RC\omega_0)^{-1}\sin\gamma_1]) \tag{104}$$

利用(103)式不难验证约束$A_2=\rho_2$也是满足的。最后，为了满足(12b)式的要求，我们定义电感

$$L_\beta=F_2/(A_3-\rho_3) \tag{105}$$

把从(9)，(10)和(102d)所得的$A_3$，$F_2$和$\rho_3$代入(105)式，连同(96)和(103)式一起，在进行若干数学运算之后，$L_\beta$可用已知参数显式地表示为：

$$L_\beta=\frac{4R\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(\delta-RC\delta)[RC\omega_0^2Q(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3]+4\sigma x^2\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{106}$$

其中，如同以前一样，$x=RC\omega_0$以及

$$Q(\tilde{u},\tilde{v})=\tilde{u}^2+\tilde{v}^2+\sin^2\gamma_2+4\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3-2\tilde{u}\tilde{v}\cos\gamma_2 \tag{107}$$

因此，具有(104)式所定义的$K_n$和仅仅利用一个2阶全通函数，带通匹配可实现的充要条件是串联电感$L$不超过临界值$L_\beta$。为便于我们的讨论，令

$$v=\delta-RC\sigma \tag{108}$$

从(103)式连同(96)式一起，我们得到

$$\sinh\hat{a} = \sinh a - (2v\sin\gamma_1)/x \tag{109}$$

把(108)和(109)式代入(106)式得到

$$\omega_0 L_g = \frac{4xR\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{v[4(v - x\sinh a\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1 + x^2\cosh^2 a\sin^2\gamma_2 + 4(\delta - v)\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3] + 4\delta^3x^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{110}$$

显然，在$0\leqslant v\leqslant\delta$时，上式为非负值，正如(108)所要求，它表示

$$\sigma = (\delta - v)/RC \tag{111}$$

如同巴特沃思响应的情况一样，当$v = 0$时，得到$L_g$的最大值：

$$L_{g,max} = 1/C\omega_0^2 \tag{112}$$

对于我们的讨论，需分两种情况研究。

**情况1**：$x\sinh a\geqslant 2\delta\sin\gamma_1$ 在此情况下，最大可能值$v = \delta$。把该值代入（110）式，从而得出：

$$L_{g1} = L_g|_{v=\delta} = \frac{xR\delta^2\sin\gamma_3}{[(\delta - x\sinh a\sin\gamma_1)^2 + x^2\cosh^2 a\cos^2\gamma_1]\omega_0\sin\gamma_1 + x^2\delta^2\omega_0\sin\gamma_3} \tag{113}$$

为进行适当的讨论，又要研究两种情况。

**子情况1**：$L\leqslant L_{g1}$。则为使$K_n$最大，我们选取$v = \delta$，从而得到$\sigma = 0$和最大的频带中心增益变为：

$$K_{n,max} = 1 - \epsilon^2\sinh^2[n\sinh^{-1}(\sinh a - 2x^{-1}\delta\sin\gamma_1)] \tag{114}$$

**子情况2**：$L_{g1} < L\leqslant 1/C\omega_0^2$。为此$K_n$最大，令（110）式的$L_g = L$，即导致一个$v$的三次方程：

$$h(v) = d_1v^3 + d_2v^2 + d_3v + d_4 = 0 \tag{115a}$$

其中

$$d_1 = 4\sin^2\gamma_1 \tag{115b}$$

$$d_2 = -4(2x\sinh a\sin^2\gamma_1 + \delta\sin\gamma_3)\sin\gamma_1 \tag{115c}$$

$$d_3 = 4x^2\sinh^2 a\sin^2\gamma_1 + x^2\sin^2\gamma_2 + 4\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3 \tag{115d}$$

$$d_4 = -4Rx\delta^3(1 - LC\omega_0^2)(\sin\gamma_1\sin\gamma_3)/L\omega_0 \tag{115e}$$

在$v = 0$时，$h(0) = d_4\leqslant 0$。在$v = \delta$时，利用$L_{g1}$的定义，我们有如(43)式所示的$h(\delta) > 0$。而$h(v)$的斜率也总是正的，即

$$\frac{dh(v)}{dv} = 4(v - \delta)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3 + 4(x\sinh a - 2v\sin\gamma_1)^2\sin^2\gamma_1 + x^2\sin^2\gamma_2 > 0 \tag{116}$$

从这些分析，我们可以看出$h(v)\sim v$的图形必然具有如图2所示的图形，这时只需把$h(v)\sim v$分别代替$g(u)\sim u$即可。该曲线与$v$轴的交点给出了所要求的$\sigma$值，当将其代入(104)式时，得到最大频带中心增益$K_{n,max}$。

**情况2**．$x\sinh a < 2\delta\sin\gamma_1$。从(104)和(108)式很显然，最大可达的$v$为

$$v = v_1 = (x\sinh a)/(2\sin\gamma_1) < \delta \tag{117}$$

它相应于$K_n = 1$。把这一$v$值代入(110)式得到

$$L_{\beta 2}=L_{\beta}\big|_{v=v_1}=\frac{8R\delta^3\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3}{[(x\sinh a-\delta\sin\gamma_3)^2+\delta^2(1+4\sin^2\gamma_1)\sin\gamma_1\sin\gamma_3+x^2\sin^2\gamma_2]\omega_0\sinh a+8x\delta^3\omega_0\sin^2\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{118}$$

如同情况1，又分两种情况进行研究。

**子情况1.** $L\leqslant L_{\beta 2}$。为使$K_n$最大，我们选取$v=v_1$，它相应于$K_n=1$，从(108)式得

$$\frac{\sigma}{\omega_0}=\frac{1}{x}\left(\delta-\frac{x\sinh a}{2\sin\gamma_1}\right)>0 \tag{119}$$

**子情况2.** $L_{\beta 2}<L\leqslant 1/C\omega_0^2$。如同以前一样，我们能证明$h(0)\leqslant 0$和$h(v_1)>0$。因为对此情况（116）式仍然成立，故$h(v)\sim v$的图形必然再具有图2所示的图形，此时只需分别利用$h(v)$，$v$和$v_1$代替$g(u)$，$u$和$u_1$即可。这就给出所要求的非负$\sigma$值。

**6．切比雪夫响应的显式公式**

在本节中，我们将导出设计最佳的切比雪夫阻抗匹配网络的显式公式。

遵照第4节中所概括的巴特沃思响应的方法，我们研究下列式子的连分式的展开式：

$$RF_1(s)=\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{N_\beta(s)}{D_\beta(s)}=C'_\beta s+\frac{1}{L'_\beta s+Z_\beta(s)} \tag{120}$$

其中

$$\begin{aligned}N_\beta(s)=&2\delta^{n+1}s^{2n+2}+\delta^n(b_{n-1}+\hat{b}_{n-1})\omega_0 s^{2n+1}\\&+\{2(n+1)\delta^{n+1}+\delta^{n-1}[b_{n-2}+\hat{b}_{n-2}+\sigma(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})]\}\omega_0^2 s^{2n}+\cdots\\&+\{2(n+1)\delta^{n+1}+\delta^{n-1}[b_{n-2}+\hat{b}_{n-2}+\sigma(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})]\}\omega_0^{2n}s^2\\&+\delta^n(b_{n-1}+\hat{b}_{n-1})\omega_0^{2n+1}s+2\delta^{n+1}\omega_0^{2n+2}\end{aligned} \tag{121a}$$

$$\begin{aligned}D_\beta(s)=&\delta^n[(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_0+2\sigma]s^{2n+1}\\&+\delta^{n-1}[(b_{n-2}-\hat{b}_{n-2})\omega_0^2+\sigma(b_{n-1}+\hat{b}_{n-1})\omega_0]s^{2n}+\cdots\\&+\delta^{n-1}[(b_{n-2}-\hat{b}_{n-2})\omega_0+\sigma(b_{n-1}+\hat{b}_{n-1})]\omega_0^{2n}s\\&+\delta^n[(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_0+2\sigma]\omega_0^{2n+1}\end{aligned} \tag{121b}$$

$$C'_\beta=\frac{2\delta^{n+1}}{\delta^n[(b_{n-1}-\hat{b}_{n-1})\omega_0+2\sigma]}=\frac{2\delta\sin\gamma_1}{(\sinh a-\sinh\hat{a})\omega_0+2\sigma\sin\gamma_1} \tag{122a}$$

$$L'_\beta=\frac{4\delta^3\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{(\delta-RC\sigma)[RC\omega_0^2Q(\sinh a,\sinh\hat{a})+4\sigma\delta\sin\gamma_1\sin\gamma_3]+4\sigma x^2\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3} \tag{122b}$$

从(103)和(106)式得出

$$C'_\beta=RC \tag{123a}$$

$$L'_\beta=L_\beta/R \tag{123b}$$

把这些值代入(50)式，带通匹配网络末端阻抗$Z_{22}(s)$可用(55)式来表示。如同巴特沃思响应那样，需分4种情况研究。

**情况1：** $x\sinh a\geqslant 2\delta\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{\beta 1}$。在此种情况下，$\sigma=0$和最大频带中心增益为

$$K_{n,\max}=1-\epsilon^2\sinh^2[n\sinh^{-1}(\sinh a-2\delta x^{-1}\sin\gamma_1)] \tag{124}$$

$F_1(s)$的连分式展开式的形式将具有(60)式右边所示的形式，且有

$$C_1=\frac{2\delta\sin\gamma_1}{(\sinh a-\sinh\hat{a})R\omega_0}=C \tag{125a}$$

$$L_1=\frac{4R\delta^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3}{RC\omega_c^2Q(\sinh a,\sinh \hat{a})}=L_{s1}>L \tag{125b}$$

**情况2：** $x\sinh a\geqslant 2\delta\sin\gamma_1$和$L_{s1}<L\leqslant 1/C\omega_0^2$。参看（115）式和仿照（63）式，我们能证明下列一项

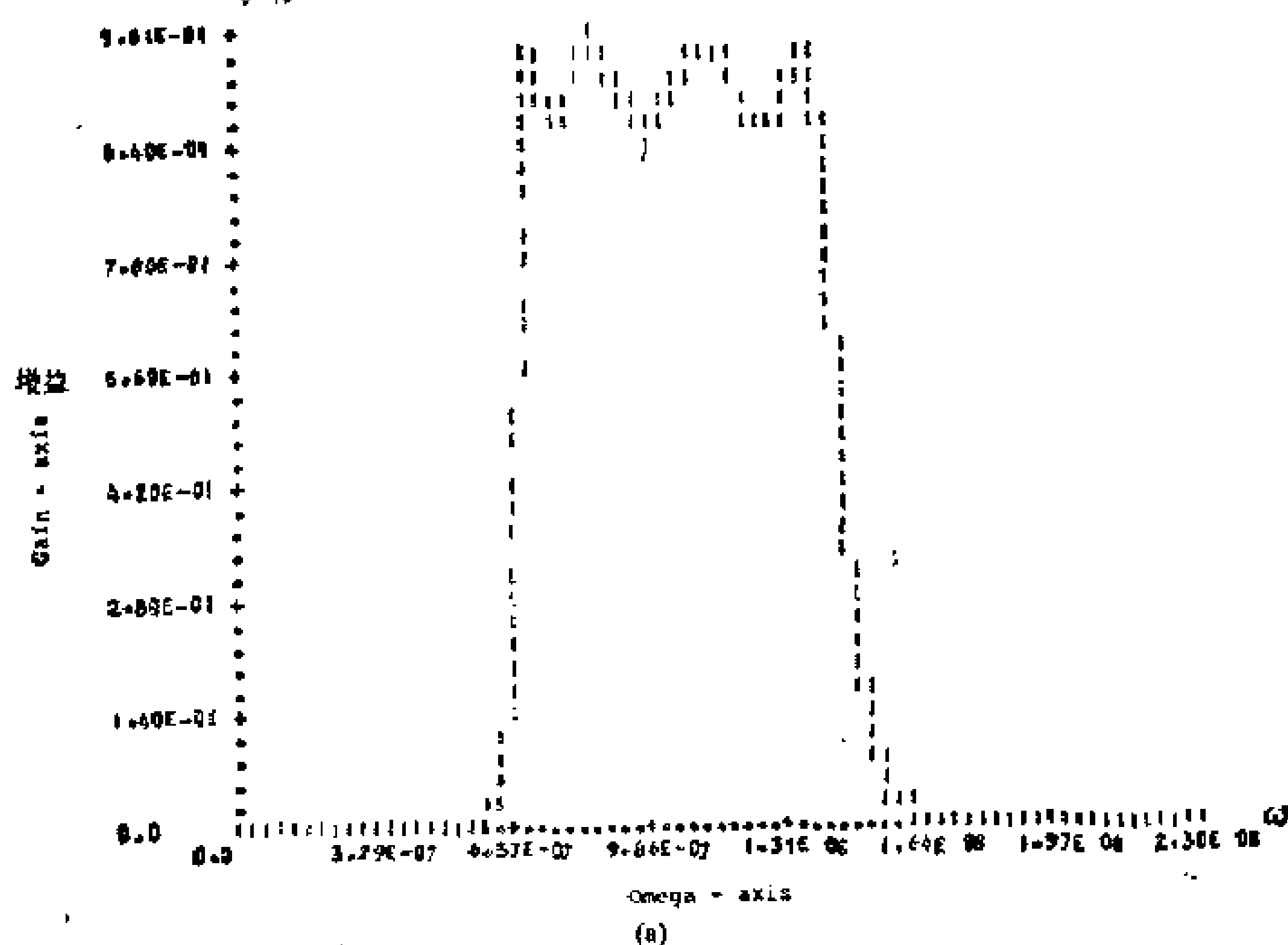
$$k=(3d_1d_3-d_2^2)/9d_3^2$$
$$=\frac{(x\sinh a-2\delta\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_3+3x^2\sin\gamma_1\cos^2\gamma_1}{9\sin\gamma_1}>0 \tag{126}$$

上式表明(115a)式的所要求的实根$v_0$可以显式地表示成：

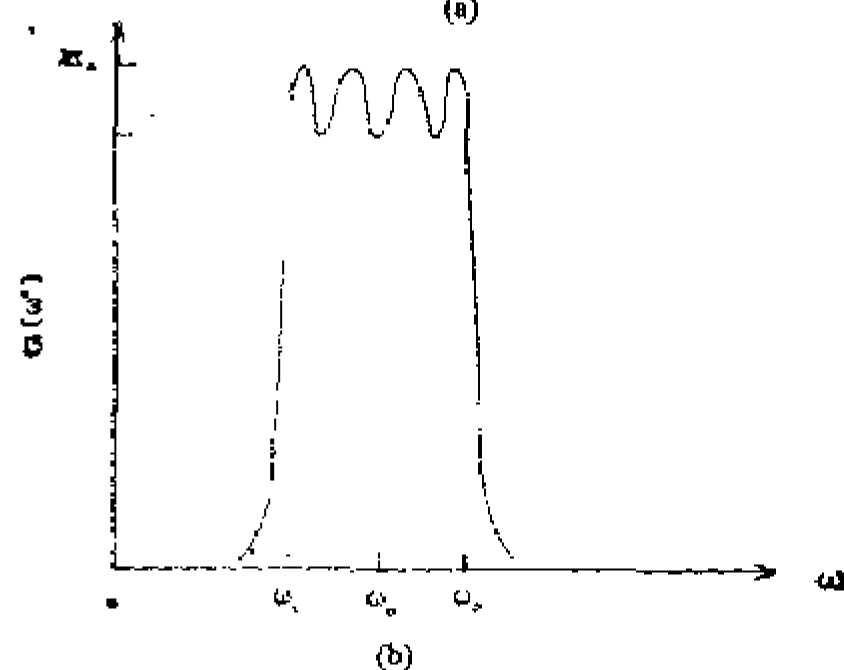
$$v_0=\frac{2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\delta\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}-2\sqrt{k}\sinh\frac{\phi}{3} \tag{127}$$

其中

$$\phi=\sinh^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{k^3}} \tag{128}$$




(a)




(b)

图6　例5中所得到的传输功率增益特性的图形

$$\zeta=\frac{(2x\sinh a\sin^2\gamma_1-\delta\sin\gamma_3)}{54\sin^3\gamma_1}$$
$$\cdot[3(x\sinh a-2\delta\sin\gamma_1)^2\sin\gamma_1\sin\gamma_3+2.25x^2\sin^2\gamma_2+(2x\sinh a\sin^2\gamma_1+\delta\sin\gamma_3)^2]$$
$$-\frac{xR\delta^2\sin\gamma_3}{2L\omega_0\sin\gamma_1}(1-LC\omega_0^2) \tag{129}$$

把（127）式代入（108）式得到所要求的$\sigma$值：

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left(\delta+2\sqrt{k}\sinh\frac{\phi}{3}-\frac{2x\sin^2\gamma_1\sinh a+\delta\sin\gamma_3}{3\sin\gamma_1}\right) \tag{130}$$

**情况3．** $x\sinh a<2\delta\sin\gamma_1$和$L\leqslant L_{\beta 2}$。为使$K_n$最大，我们选取$v=v_1=(x\sinh a)/(2\sin\gamma_1)$，从而得到$k_n=1$以及

$$\sigma=\frac{1}{RC}\left(\delta-\frac{x\sinh a}{2\sin\gamma_1}\right)>0 \tag{131}$$

**情况4．** $x\sinh a<2\delta\sin\gamma_1$和$L_{\beta 2}<L\leqslant 1/C\omega_0^2$。因为在此情况下（126）式仍然成立，因此$\sigma$的要求值可用（130）式计算。利用这一$\sigma$值，最大的频带中心增益$K_{n,max}$可由（134）式确定。

我们将用下列例子来说明上述结果。

例5．令

$R=100\Omega$

$L=0.27\mu H$

$C=300pF$

$n=4$

$\omega_1=10^8/\sqrt{2}\,rad/s$

$\omega_2=\sqrt{2}\times 10^8 rad/s$

带通纹波是0.5dB，则我们有

$$\omega_0=10^8 rad/s \quad \delta=\sqrt{2} \quad \epsilon=0.3493 \tag{132}$$

进一步我们计算

$$a=0.44353$$
$$x=RC\omega_0=3$$
$$L_{\beta 1}=0.27055\mu H \tag{133}$$

因为$x\sinh a=1.33060>2\delta\sin\gamma_1=1.08239$以及$L<L_{\beta 1}$，适用于情况1，从（121）式我们得到：

$$K_{4,max}=0.9806 \tag{134}$$

从而得到

$$\hat{\epsilon}=2.50648$$
$$\hat{a}=0.09727$$
$$\sinh\hat{a}=0.09742 \tag{135}$$

利用(120)式连同(99)式一起，我们得到如(57)所示的归一化的导纳$RF_1(y)$，其各系数为：

$A_8'=0.08 \qquad B_7'=2.66637$

$A_7'=0.041068 \qquad B_6'=1.36892$

$A_6'=0.374985 \qquad B_5'=9.21406$

$A_5'=0.140067 \qquad B_4'=2.98232$

$$A_4' = 0.595107 \tag{136}$$

导纳$F_1(s)$可以展开成(60)和(62b)式，且$C = C_1 = 300\text{pF}$，$L = 0.27\mu\text{H}$，以及

$$L_2 = 0.27655\mu\text{H} \qquad C_3 = 1.7\text{nF} \qquad L_4 = 0.05\mu\text{H}$$
$$L_5 = 0.01\mu\text{H} \qquad C_6 = 10.5\text{nF} \qquad L_7 = 0.0024\mu\text{H}$$
$$C_8 = 53\text{nF} \qquad R_{22} = 0.0977\Omega = R_g \tag{137}$$

带通匹配网络及其负载一起示于图4，为了验证我们的设计，我们从图4重新计算传输功率增益$G(\omega^2)$，其结果示于图6。

例6．研究与例5相同的例题，只不过我们有下列变化：

$$n = 5 \quad L = 0.2\mu\text{H} \quad C = 450\text{pF}$$

其余与前相同。

因为$x\sinh a > 2\delta\sin\gamma_1$　$L_{31} < L < 1/C\omega_0^2$，故适用于情况2，为了这一匹配网络需附加一个全通函数。从（126）—(129）式我们得到：

$$k = 6.27187 \quad \zeta = 8.37521 \tag{138a}$$
$$\phi = 0.51072 \quad \upsilon_0 = 0.71323 \tag{138b}$$

从（130）和（104）式得到：

$$\sigma = 0.15577.10^8 \tag{139}$$
$$K_{5,max} = 0.6424 \tag{140}$$

例7．研究与例5相同的例题，只不过现在我们选取

$$n = 5 \quad L = 0.23\mu\text{H} \quad C = 150\text{pF}$$

因此我们有

$$x = RC\omega_0 = 1.5 \quad L_{32} = 0.53217\mu\text{H} \tag{141}$$

故适用于情况3，从而得出　$K_{5,max} = 1$，且从（131）式得

$$\sigma = 0.35656 \times 10^8 \tag{142}$$

例8．研究与例7相同的例题，只不过现在把串联电感$L$从0.23μH升到0.56μH，其余与前相同。那么适用于情况4，且从（126)—(129）式得

$$k = 0.71017 \quad \zeta = 1.06678 \quad \phi = 1.34192 \tag{143}$$

从（130）和（104）式得到

$$\sigma = 0.56493 \times 10^8 \quad K_{5,max} = 0.94238 \tag{144}$$

## 结　　论

在本文中，我们已给出了设计最佳的任意阶巴特沃思或切比雪夫带通阻抗匹配网络的显式公式。我们已证明了仅用一个2阶全通函数，带通匹配网络可实现的充要条件是串联电感$L$不超过某个临界电感，这与低通阻抗匹配网络的情况正相反，在后一情况中，我们曾证明过对于任意的$RLC$型负载仅仅利用一个1阶全通函数便可实现匹配。

本文之显式公式的意义在于当在选择最佳的设计参数中，可避免使用设计曲线和解非线性方程。因而，我们把这种实际的阻抗匹配网络的设计简化为算术运算。

## 参　考　文　献


[1] R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances," *J. Franklin Inst.*, vol. 249, pp. 57-83, Jan. 1950; pp. 139-154, Feb. 1950.

[2] G. L. Matthaei, "Synthesis of Tchebycheff impedance-matching networks, filters and interstages," *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-3 pp. 163-172, Sept. 1956.
[3] R. Levy, "Explicit formulas for Chebyshev impedance-matching networks, filters and interstages," Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 111, pp. 1099-1106, June 1964.
[4] W. K. Chen, "Explicit formulas for the synthesis of optimum broad-band impedance-matching networks," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.CAS-24, pp. 157-169, Apr. 1977.
[5] W. K. Chen and K. G. Kourounis, "Explicit formulas for the synthesis of optimum broad-band impedance-matching networks II," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-25, pp. 609-620, Aug. 1978.
[6] D. C Youla, "A new theory of broad-band matching," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-11, pp. 30-50, Mar. 1964.
[7] W.K. Chen, *Theory and Design of Broadband Matching Networks*. Oxford, England: Pergamon, 1976.
[8] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York:Dover, 1965.

# 二十七、宽带匹配统一理论


## 摘　　要

本文给出了宽带匹配数学理论之最新进展的统一总结。指出了归一化散射矩阵的表征、相容性阻抗的问题，使任意负载与频变信号源相匹配，从而得到预给的传输功率增益特性的问题都可较方便地用基本系数的约束来叙述。因此，这三个方面的问题是复数归一化散射矩阵存在的三个侧面。


**1.引言**

在通信系统的设计中，一个基本问题是在一个给定的信号源和一个给定的负载之间设计一个耦合网络，使得在感兴趣的频带内，从信号源到负载所传输的功率为最大。这类问题总是涉及到设计一个耦合网络，使一个给定的负载阻抗变为另一种特定的负载阻抗。我们把这种网络的功能称为阻抗匹配或阻抗均衡，由此而得的网络称为匹配网络或均衡器。

Bode[1]在研究了一类很有用的但仅限于只由一个电阻器和一个电容器的并联组合而构成的耦合网络时，首先提出了匹配问题。他对这一类均衡器建立了基本增益-带宽的制约关系。但是他尚未进一步研究对于无损耗均衡器的一些附加限制。Fano[2]推广了Bode的工作，并用很一般的方法解决了在一个任意无源负载与电阻性信号源之间的阻抗匹配问题。Fano的结果表示为一组带特有的加权函数的整数约束（由负载阻抗所决定)。构成Fano工作基础的关键思想在于用Darlington等效网络来代替负载阻抗。这种方法的主要缺点是在把某种负载性质转换为对应的Darlington等效网络的结构特性时，使其变得复杂化了。并且这种方法还不能推广到有源均衡器的设计中。为了避开这一困难，Youla[3]基于复数归一化原理导出了一种新理论。不用说，Fano和Youla的方法已由许多研究者进行了推广和作过精辟的阐述[4]。

因为Youla的方法直接涉及到负载，所以它可推广到有源负载的情况，如同Chan和Kuh[5]所做的工作。另一种可能进行的推广是允许含有频变信号源的情况。沿着这一研究路线，早期的工作是由Fielder[6]所做的，他研究了一类终端接一个电阻器的无损耗梯形网络。这一问题的一般解是由Chien[7]和Satyanarayana[8]给出的。Chien的方法是利用一个无损耗的双口网络采用广义散射矩阵的表示，人们能够从给定的阻抗和预给的传输功率增益特性出发而构成一类全准酉矩阵。然后利用构成这类散射矩阵的物理可实现的约束要求，便能确定传输功率增益特性的充要条件，使得在这种矩阵中至少有一个是可实现的。所要求的匹配网络可利用任何一种熟知的方法通过实现散射矩阵而得到。当然，在这一点就其本身来说，并不是一件简单的事情。另一方面，Satyanarayana法[8]包括了一个正实阻抗实现为一个终端接1欧姆的电阻器的无损耗双口网络的输入阻抗。当去掉这个1欧姆的电阻器之后，便得到所要求的无损耗的耦合网络。

本文的目的是给出这些结果的统一总结，并指出它们之间的相互关系。

**2.初步研究**

研究图1的双口网络$N$，令

$$S(s)=\begin{bmatrix}S_{11}(s) & S_{12}(s)\\ S_{21}(s) & S_{22}(s)\end{bmatrix} \tag{1}$$

是归一化到下列基准阻抗矩阵的散射矩阵：

$$z(s)=\begin{bmatrix}z_1(s) & 0\\ 0 & z_2(s)\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中$z_1(s)$和$z_2(s)$是图1所示的无源非Foster型的终端阻抗。

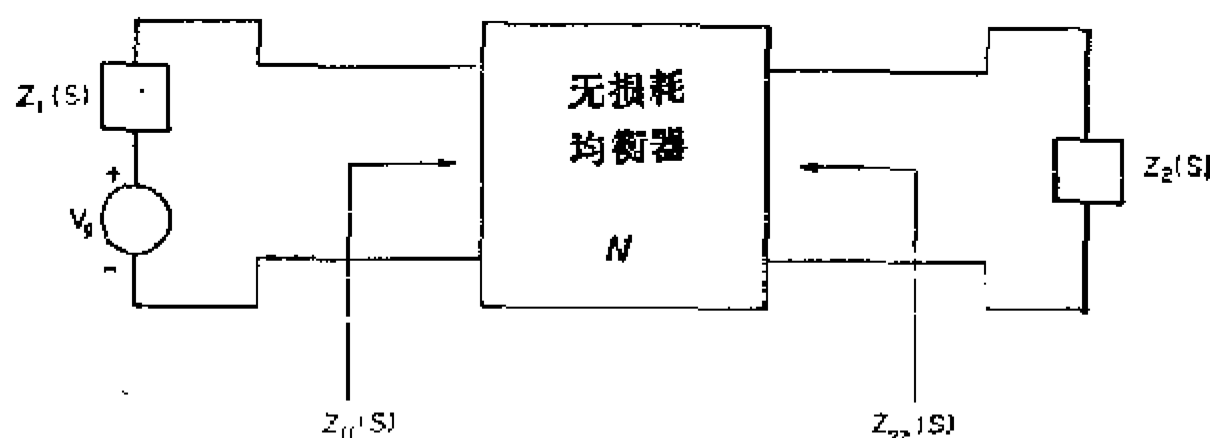



图1　在内阻抗为$z_1(s)$的信号源和负载阻抗为$z_2(s)$之间的双口匹配网络

把$z_i(s)$ $(i=1,\ 2)$的偶部写成：

$$r_i(s)=\mathrm{Ev}z_i(s)=[z_i(s)+z_i(-s)]/2=h_i(s)h_i(-s) \tag{3}$$

此处因式分解是使$h_i(s)$和$h_i^{-1}(-s)$在开右半复频平面内解析，且令

$$h(s)=\begin{bmatrix}h_1(s) & 0\\ 0 & h_2(s)\end{bmatrix} \tag{4}$$

我们看出，$h_i(s)h_i^{-1}(-s)$是一个实正则全通函数，其极点包括了$z_i(s)$的开左半复频平面内的所有极点。因此它可写成两个函数之乘积，其中一个是由$z_i(-s)$的开右半复频平面内极点$\alpha_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ v_i)$所定义的实正则全通函数

$$A_i(s)=\prod_{j=1}^{v_i}\frac{s-\alpha_j}{s+\alpha_j},\quad i=1,\ 2 \tag{5}$$

另一个是由$r_i(s)$的开右半复频平面的零点所定义的实正则全通函数$B_i(s)$，即

$$h_i(s)/h_i(-s)=A_i(s)B_i(s) \tag{6}$$

可观察到对于一个正实阻抗$z_i(s)$来说，$h_i(s)$和$h_i(-s)$在实频轴上是解析的，从(3)和(6)式得：

$$2h_i^2(s)=2r_i(s)A_i(s)B_i(s)=F_i(s)B_i(s) \tag{7}$$

其中

$$F_i(s)=2r_i(s)A_i(s),\quad i=1,\ 2 \tag{8}$$

众所周知，归一化的反射系数$S_{ii}(s)$可以表示为[4，10]：

$$S_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s),\quad i=1,\ 2 \tag{9}$$

其中

$$\rho_i(s)=A_i(s)\frac{Z_{ii}(s)-z_i(-s)}{Z_{ii}(s)+z_i(s)} \tag{10}$$

$Z_{22}(s)$和$Z_{11}(s)$是当输入和输出端口分别终端接$z_1(s)$和$z_2(s)$时，从输出端和输入端看进

去的策动点阻抗。此外，归一化的散射矩阵$S(s)$拥有下列值得注意的特性[4,9]：

(1) 当$s$是实数时，$S(s)$是实函数，即$\bar{S}(s)=S(s)$，此处一杠表示共轭复数。

(2) $S(s)$是有理的且在闭右半复频平面内解析。

(3) 对在闭右半复频平面内的所有$s$，埃尔米特矩阵$U-S^*(s)S(s)$是非负定的，此处$S^*(s)$表示是$S(s)$的共轭转置，$U$表示一个2阶单位矩阵。

(4) 在图1的网络中从端口1到端口2的传输功率增益特性$G(\omega^2)$为：

$$G(\omega^2)=|S_{21}(j\omega)|^2 \tag{11}$$

(5) 如果$N$是互易的，则$S(s)$是对称的，即$S'(s)=S(s)$，此处一撇表示矩阵的转置。

(6) 如果$N$是无损耗的，则$S(s)$是准西矩阵，即

$$S(s)S(-s)=S(-s)S(s)=U \tag{12}$$

上述性质对于保证$S(s)$的物理可实现性来说，是一个必要而非充分的条件，而其充要条件是由Wohlers[11]所给出的，且叙述如下：

**定理1.** 一个$2\times2$阶有理矩阵$S(s)$是一个集总，无源双口网络归一化到非Foster型、正实阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$的散射矩阵的充要条件是：

(1) 对于所有的$\omega$，埃尔米特矩阵$U-S^*(j\omega)S(j\omega)$是非负定的；

(2) 矩阵

$$2Y_c(s)=h^{-1}(s)[h(s)h^{-1}(-s)-S(s)]h^{-1}(s) \tag{13}$$

在开右半复频平面内解析以及

(3a) 对于开右半复频平面中的所有$s$，$\det[U-(z(s)-U)Y_o(s)]\neq0$，或者

(3b) 矩阵

$$[U-(z(s)-U)Y_o(s)](z(s)+U) \tag{14}$$

在实频轴上至多是一些单阶极点，同时在这些极点的每一处所算得的留数矩阵是埃尔米特型和非负定矩阵。

正如Wohlers[11]所指出：如果用相应的$n\times n$阶矩阵来代替所有的$2\times2$阶矩阵时，则上述定理对$n$端口网络仍然成立。

在本章的其余部分，我们将研究下列问题：在给定的任意两个非Foster型正实阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$作为信号源的阻抗和负载阻抗，以及对于所有的实数$\omega$，以1为界的实有理函数$G(\omega^2)$作为传输功率增益特性，如果存在一个无损耗双口网络，当在两个阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$之间插入此匹配网络时，将得到所要求的传输功率增益特性，那么存在此网络的充要条件是什么？

因为我们仅涉及到无损耗的网络，所以传输功率增益特性$G(\omega^2)$可由下列关系用$\rho_i(j\omega)$来表示：

$$\begin{aligned}G(\omega^2)&=1-|S_{22}(j\omega)|^2=1-|S_{11}(j\omega)|^2\\&=1-|\rho_i(j\omega)|^2,\quad i=1,\ 2\end{aligned} \tag{15}$$

因此，为了研究一类和预给负载阻抗$z_i(s)$相容的传输功率特性，只需研究有界实反射系数$\rho_i(s)$就足够。有时，在本文中为了利用引入因子$B_i(s)$而带来的附加自由度的优越性，我们将发现采用$S_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s)$是必要的。

### 3. 基本系数约束

对于一个给定阻抗$z_i(s)$，函数$r_i(s)/z_i(s)$的$k_i$重闭右半复频平面的零点$s_{0i}$称为$z_i(s)$的$k_i$阶传输零点。为方便起见，传输零点可分为下列4种互不相容的情况：令$s_{0i}=\sigma_{0i}+j\omega_{0i}$，则根据$\sigma_{0i}$和$z_i(s_{0i})$的不同，它们可属于如下的各类情况之一：

第I类：$\sigma_{0i}>0$，它包括了所有开右半复频平面的传输零点；

第II类：$\sigma_{0i}=0$和$z_i(j\omega_{0i})=0$；

第III类：$\sigma_{0i}=0$和$0<|z_i(j\omega_{0i})|<\infty$；

第IV类：$\sigma_{0i}=0$和$|z_i(j\omega_{0i})|=\infty$。

对于有界实反射系数$\rho_i(s)$的基本系数约束可以用下列各函数在$z_i(s)$的传输零点$s_{0i}$处的罗朗级数展开式之系数来叙述：

$$A_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{16}$$

$$F_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{17}$$

$$\rho_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{18}$$

对于$\rho_i(s)$的基本约束。对于$z_i(s)$的每一个$k_i$阶传输零点$s_{0i}(i=1,\ 2)$，决定于$s_{0i}$的类别，必须满足下列4种系数条件的集合之一：

(1) 第I类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0, 1, 2, \cdots, k_i-1$ (19a)

(2) 第II类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0, 1, 2, \cdots, k_i-1$，以及

$$C_i(\mathrm{II})=\frac{A_{k_i i}-\rho_{k_i i}}{F_{(k_i+1)i}}\geq 0 \tag{19b}$$

(3) 第III类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0, 1, 2, \cdots, k_i-2$，以及

$$C_i(\mathrm{III})=\frac{A_{(k_i-1)i}-\rho_{(k_i-1)i}}{F_{k_i i}}\geq 0 \tag{19c}$$

(4) 第IV类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0, 1, 2, \cdots, k_i-1$，以及

$$\frac{1}{C_i(\mathrm{IV})}=\frac{F_{(k_i-1)i}}{A_{k_i i}-\rho_{k_i i}}\geq a_{-1i}, \tag{19d}$$

$a_{-1i}$为$z_i(s)$在极点$j\omega_{0i}$处所算得的留数。

这些系数约束的重要性由Youla[3]首先给出，并总结为下列定理。

**定理2** 令$z_i(s)$是一个预给的、有理、非Foster型的正实函数，$\rho_i(s)$是复变量$s$的有理实函数。则由下列式子所定义的函数：

$$Z_{ii}(s)=\frac{F_i(s)}{A_i(s)-\rho_i(s)}-z_i(s),\quad i=1或2 \tag{20}$$

是正实函数的充要条件是$\rho_i(s)$为满足基本约束(19)式的有界实反射系数，其中$A_i(s)$和$F_i(s)$由(5)和(8)式给出，且由$z_i(s)$所唯一确定。

这个定理的意义在于它给出了在一个无源负载和一个电阻性信号源之间在具有预给的传输功率增益特性情况下，存在这种匹配网络的条件。从(10)式可见，(20)式的$Z_{22}(s)$是一个所要求的均衡器的末端阻抗。如果$Z_{22}(s)$是正实的，则可实现为一个终端接电阻器$z_1(s)=r_g$的无损耗双口网络的输入阻抗，若有必要的话，可采用变压器。

**4.系数可实现的条件**

在本节中，我们给出可物理实现的一个给定传输功率特性$G(\omega^2)$的充要条件。这些条件仅仅利用给定的终端阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$来表示，且可用类似于前一节中所给的系数方便地进行叙述。这些结果首先由Chien[7]给出。

对于一个互易双口网络$N$，其归一化的散射矩阵$S(s)$是对称的，因此$S_{12}(s)=S_{21}(s)$，借助于解析延拓理论，(11)和(15)式可表示为：

$$S_{12}(s)S_{12}(-s)=S_{21}(s)S_{21}(-s)=G(-s^2) \tag{21}$$

$$S_{11}(s)S_{11}(-s)=S_{22}(s)S_{22}(-s)=\rho_i(s)\rho_i(-s)=1-G(-s^2) \tag{22}$$

因此，增益函数$G(-s^2)$在任意一个实正则全通函数的范围内确定了$S_{11}(s)$、$S_{22}(s)$和$S_{12}(s)=S_{21}(s)$，且我们可写成：

$$S_{12}(s)=S_{21}(s)=\eta_{12}(s)T_m(s)=T(s) \tag{23}$$

$$S_{11}(s)=B_1(s)\rho_1(s)=\eta_{11}(s)\rho_m(s) \tag{24}$$

$$S_{22}(s)=B_2(s)\rho_2(s)=\eta_{22}(s)\rho_m(s) \tag{25}$$

其中$T_m(s)$和$\rho_m(s)$分别是$G(-s^2)$和$1-G(-s^2)$的最小相位解，$\eta_{12}(s)$，$\eta_{11}(s)$和$\eta_{22}(s)$是任意实正则全通函数。因为双口网络$N$是无损耗的，故$S(s)$必须是准酉矩阵，利用这一结论连同(23)—(25)式一起得到：

$$\eta_{12}^2(s)=-\eta_{11}(s)\eta_{22}(s)\frac{B_2(s)\rho_m(s)T_m(-s)}{B_1(-s)\rho_m(-s)T_m(s)} \tag{26}$$

因此，实现一个给定的$G(\omega^2)$的最一般的对称准酉矩阵$S(s)$为：

$$S(s)=\begin{bmatrix} B_1(s)\rho_1(s) & T(s) \\ T(s) & B_2(s)\rho_2(s) \end{bmatrix} \tag{27}$$

利用(27)式所给出的S(s)，从(6)—(9)式，双口网络$N$的增广导纳矩阵$\mathbf{Y}_c(s)$可以写成：

$$\mathbf{Y}_c(s)=\begin{bmatrix} y_{11c}(s) & y_{12c}(s) \\ y_{12c}(s) & y_{22c}(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{2}[\mathbf{h}^{-1}(-s)\mathbf{h}^{-1}(s)-\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{h}^{-1}(s)]$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{A_1(s)-\rho_1(s)}{F_1(s)} & \dfrac{-h_1^{-1}(s)h_2^{-1}(s)T(s)}{2} \\ \dfrac{-h_1^{-1}(s)h_2^{-1}(s)T(s)}{2} & \dfrac{A_2(s)-\rho_2(s)}{F_2(s)} \end{bmatrix} \tag{28}$$

从(28)式不难看出：$\mathbf{Y}_c(s)$仅在$z_1(s)$或$z_2(s)$的传输零点$s_0=s_{01}$或$s_{02}$处有闭右半复频平面的极点。为方便起见，传输零点$s_0$称为双口网络$N$的归一化零点。因此，我们只注意$\mathbf{Y}_c(s)$在$N$的归一化零点处的特性即足够。如同在(16)—(18)式那样，我们把$A_i(s)$、$\rho_i(s)$、$F_i(s)$和$y_{12c}(s)$在$N$的归一化零点$s_0$处如下地展开。对于$i=1$，2，我们有：

$$A_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_{xi}(s-s_0)^x \tag{29}$$

$$F_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_{xi}(s-s_0)^x \tag{30}$$

$$\rho_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_{xi}(s-s_0)^x \tag{31}$$

$$y_{12c}(s)=\frac{-h_1^{-1}(s)h_2^{-1}(s)T(s)}{2}=\sum_{x=-1}^{\infty}Q_x(s-s_0)^x \tag{32}$$

可以看出除了$y_{12c}(s)$可能在实频轴上具有单阶极点之外，所有上述函数在闭右半复频平面内都是解析的。为便于我们的讨论，下面分4种情况加以研究：

**情况1** $s_0$是$z_i(s)$($i=1$, 2)的第I类$k_i$阶传输零点。则$s_0$是$F_i(s)$的一个$k_i$阶零点。为使

(28)式的$Y_a(s)$在开右半复频平面内解析，$s_0$至少必须是$A_i(s)-\rho_i(s)$的一个$k_i$阶零点或

$$A_{xi}=\rho_{xi},\quad x=0,\ 1,\ \cdots,\ k_i-1,\quad i=1,\ 2 \tag{33}$$

此外，(23)式中的$\eta_{12}(s)$必须包含有$h_1(s)$和$h_2(s)$的所有开右半复频平面零点。则方程(33)恰好就是约束(19a)。

**情况2** $s_0=j\omega_0$是$z_i(s)(i=1,2)$的第II类或第III类$k_i$阶传输零点。因此，当在$j\omega_0$是第II类传输零点时，它是$F_i(s)$的$k_i+1$阶零点($k_i\neq 0$)，和为$F_i(s)$的零阶零点，$k_i=0$，当$j\omega_0$为第III类的传输零点时，则它是$F_i(s)$的$k_i$阶零点。因为$Y_a(s)$在$j\omega_0$处可有一个单阶极点，故$A_i(s)-\rho_i(s)$在$j\omega_0$处的零点的阶数比$F_i(s)$的阶数至多少1。此外，$Y_a(s)$在$j\omega_0$处所算得的留数矩阵$K_a(j\omega_0)$必须是非负定的。这就要求需要满足约束(19b)和(19c)式，且使

$$\det K_a(j\omega_0)=\det\begin{bmatrix}C_1(u) & Q_{-1}\\ Q_{-1} & C_2(v)\end{bmatrix}\geqq 0, \tag{34}$$

式中$u$、$v=$II、III和$C_1(u)$和$C_2(v)$在(19b)和(19c)式中定义过。应该理解的是如果$s_0$不是$z_i(s)(i=1$或$2)$的传输零点，则$k_i=0$，$C_i(u)$可取作零。另外在$x<0$时，我们令$A_{xi}=\rho_{xi}=F_{xi}=0$。

**情况3** $s=j\omega_0$分别是$z_1(s)$和$z_2(s)$的第IV类$k_1$阶和$k_2$阶传输零点。则$j\omega_0$是$F_i(s)$的$k_i-1$阶零点。因为从(28)式我们有：

$$y_{iia}(s)=\frac{A_i(j\omega_0)-\rho_i(j\omega_0)}{F_i(j\omega_0)}=\frac{1}{Z_{ii}(j\omega_0)+z_i(j\omega_0)}=0 \tag{35}$$

$i=1,\ 2$，$j\omega_0$是$A_i(s)-\rho_i(s)$的一个$k_i$阶零点。因此，$j\omega_0$是$y_{iia}^{-1}(s)$的一个单阶极点，故得到约束式(19d)。

如果$Y_a(s)$不恒为一个奇异矩阵，则N的阻抗矩阵$Z(s)$可由下列关系式用$Y_a(s)$和$Z(s)$来表示：

$$Z(s)=Y_a^{-1}(s)-z(s) \tag{36}$$

因此，$Z(s)$是一个正实函数，且在$j\omega_0$处有一个具有非负定留数矩阵的单阶极点。这就要求$Y_a^{-1}(s)$是一个正实函数，且在$j\omega_0$处是一个单极极点，其具有的留数矩阵是：

$$K_a''(j\omega_0)=\frac{1}{C_1(\mathrm{IV})C_2(\mathrm{IV})-Q_1^2}\begin{bmatrix}C_2(\mathrm{IV}) & -Q_1\\ -Q_1 & C_1(\mathrm{IV})\end{bmatrix} \tag{37}$$

此处$y_{12a}(j\omega_0)=0$，或等价为：

$$Q_{-1}=Q_0=0 \tag{38}$$

$Z(s)$的留数矩阵$K(j\omega_0)$是非负定矩阵的要求意味着

$$\det K(j\omega_0)=\det(K_a''(j\omega_0)-\mathrm{diag}[a_{-11},\ a_{-12}])\geqq 0 \tag{39}$$

因为

$$C_1(\mathrm{IV})C_2(\mathrm{IV})-Q_1^2>0, \tag{40}$$

所以可直截了当地证明满足(39)式的充要条件是：

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{1}{a_{-11}}-C_1(\mathrm{IV}) & Q_1\\ Q_1 & \dfrac{1}{a_{-12}}-C_2(\mathrm{IV})\end{bmatrix}\geqq 0 \tag{41}$$

**情况4** **子情况1.** $s_0=j\omega_0$是$z_1(s)$的第IV类传输零点，它或是$z_2(s)$的一个第II类或第III

类传输零点(或不是)。因此，$j\omega_0$是$F_1(s)$的一个$k_1-1$阶零点；在第II类传输零点$j\omega_0$时，它是$F_2(s)$的$k_2+1$阶($k_2\neq 0$)零点和0阶 ($k_2=0$) 零点；在第III类传输零点$j\omega_0$时，它是$F_2(s)$的$k_2$阶零点。利用与情况2和3相同的论证，我们可利用(19d)式的约束($i=1$)，和(19b)或(19c)的约束($i=2$)。从(36)式，对于$Y_a^{-1}(s)$，在$j\omega_0$处为一个带非负定矩阵的单阶极点，因此，必然有$|y_{12a}(j\omega_0)|\neq\infty$或

$$Q_{-1}=0 \tag{42}$$

在$j\omega_0$处$Y_a^{-1}(s)$相应的留数矩阵$\mathbf{K}_a''(j\omega_0)$变为：

$$\mathbf{K}_a''(j\omega_0)=\frac{1}{C_1(\mathrm{IV})C_2(u)-Q_0^2}\begin{bmatrix}C_2(u) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{43}$$

其中$u=\mathrm{II}$或$\mathrm{III}$，它决定于负载阻抗$z_2(s)$的类型。$Z(s)$的留数矩阵

$$\mathbf{K}(j\omega_0)=\mathbf{K}_a''(j\omega_0)-\mathrm{diag}[a_{-11},\ 0] \tag{44}$$

是非负定的意味着

$$\frac{C_2(u)}{[C_1(\mathrm{IV})C_2(u)-Q_0^2]}\geqq a_{-11} \tag{45}$$

**子情况2.** $s_0=j\omega_0$是$z_2(s)$的第IV类传输零点，或者是$z_1(s)$的第II类或第III类传输零点(或者不是)，那么我们只要把下标1和2进行交换，便可获得与子情况1相同的结论。

在$Y_a(s)$恒为一个奇异矩阵的情况下，我们在$Y_a(s)$的元素中，譬如在[1，1]元素上加一个小的实数，然后再如以前那样进行分析。最后，经过一个极限过程而得到相同的结果。事实上，上述所导出的必要条件再通过定理1而即变为充分条件了。这些结果由Chien[7]首先给出。

**定理3.** 给定两个非Foster型、正实阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$以及对于所有的$\omega$，其界在0与1之间变化的有理传输功率增益特性$G(\omega^2)$，由$z_1(s)$、$z_2(s)$和$G(\omega^2)$所构成的(27)式的有理矩阵$S(s)$是归一化到阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$的无损耗双口网络的散射矩阵，其充要条件是满足下列各个约束：*

(1) $S(s)$是准酉矩阵；

(2) $T(s)$在$j\omega$轴上的归一化零点处至多是一个单阶极点。

(3) $\rho_1(s)$和$\rho_2(s)$满足基本约束(19)式；

(4) 在每一个$j\omega$轴上的归一化零点$s_0=j\omega_0$处，

(a) 如果$|z_1(j\omega_0)|<\infty$ 和$|z_2(j\omega_0)|<\infty$，则

$$C_1(u)C_2(v)-Q_{-1}^2\geqq 0 \tag{46}$$

此处$u$，$v=\mathrm{II}$，$\mathrm{III}$；

(b) 如果$|z_1(j\omega_0)|=\infty$ 和$|z_2(j\omega_0)|=\infty$，则

$$Q_{-1}=Q_0=0 \tag{47}$$

$$[1-a_{-11}C_1(\mathrm{IV})][1-a_{-12}C_2(\mathrm{IV})]-a_{-11}a_{-12}Q_1^2\geqq 0 \tag{48}$$

(c) 如果 $|z_1(j\omega_0)|=\infty$和$|z_2(j\omega_0)|<\infty$，则$Q_{-1}=0$以及

$$\frac{C_2(u)}{C_1(\mathrm{IV})C_2(u)-Q_0^2}\geqq a_{-11} \tag{49}$$

其中

---

* 在$K_i=0$时，$C_i(u)$可取零，$u=II$，$III$和$IV$。对于$x<0$，$A_{xi}=F_{xi}=\rho_{xi}=0$。

$u = \mathrm{II},\ \mathrm{III}$；

(d) 如果$|z_1(j\omega_0)| < \infty$和$|z_2(j\omega_0)| = \infty$，则$Q_{-1} \doteq 0$以及

$$\frac{C_2(u)}{C_1(u)C_2(\mathrm{IV}) - Q_0^2} \geqq a_{-12} \tag{50}$$

其中 $u = \mathrm{II}, \mathrm{III}$

因此，给定两个无源终端阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$以及预给传输功率增益$G(\omega^2)$，从（21）—（26）式我们能构成最一般性的（27）式的对称酉矩阵$S(s)$。则一个无损耗的互易双口网络，当其工作在具有内阻抗$z_1(s)$的信号源阻抗与负载阻抗$z_2(s)$之间时，欲实现传输功率特性$G(\omega^2)$，它存在的充要条件是满足定理 3 的各个条件。在应用此条件设计均衡器的困难之一是在于——对于给定的$z_1(s)$、$z_2(s)$和$G(\omega^2)$，该定理只能指出无损耗均衡器的存在与否。为了实现图1的匹配网络$N$，如果$Z(s)$存在的话，我们首先利用下列关系计算用（27）式的复数归一化散射矩阵表示的阻抗矩阵$Z(s)$[4]：

$$\mathbf{Z}(s) = [\mathbf{z}(-s) + \mathbf{z}(s)\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{h}(-s)][\mathbf{U} - \mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{h}(-s)]^{-1} \tag{51}$$

然后，利用参考文献[17]、可用已知的任何一种方法通过$Z(s)$来实现$N$。如果$Z(s)$不存在，我们必须综合下列增广网络$N_a$，其导纳矩阵由[4]给出：

$$\mathbf{Y}_a(s) = \frac{1}{2}\mathbf{h}^{-1}(s)[\mathbf{h}(s)\mathbf{h}^{-1}(-s) - \mathbf{S}(s)]\mathbf{h}^{-1}(s) \tag{52}$$

如（13）式所示。

另一种可能性是我们把归一化到基准阻抗矩阵$z(s)$的散射矩阵$S(s)$转换为以单位矩阵为基准阻抗矩阵的散射矩阵$\mathbf{S}_u(s)$，$\mathbf{S}_u(s)$可用下列关系[15]，用$\mathbf{S}(s)$来表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_u(s) = &\{[\mathbf{z}(-s) - \mathbf{U}]\mathbf{h}^{-1}(-s) - [\mathbf{z}(s) + \mathbf{U}]\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\} \\ &\cdot\{[\mathbf{z}(-s) + \mathbf{U}]\mathbf{h}^{-1}(-s) + [\mathbf{z}(s) - \mathbf{U}]\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\}^{-1}\end{aligned} \tag{53}$$

现在，这个矩阵可用任何一种现有的方法[17]来进行实现。

另一种方法，我们可仅用策动点阻抗综合来实现。此种方法如下地进行：我们首先把归一化到$z(s)$的散射矩阵$S(s)$转换为以下列基准阻抗矩阵的散射矩阵$\mathbf{S}_\beta(s)$：

$$\mathbf{z}_\beta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2(s) \end{bmatrix} \tag{54}$$

正如（4）式那样，我们可写成：

$$\mathbf{h}_\beta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_2(s) \end{bmatrix} \tag{55}$$

根据参考文献[15]，$S_\beta$可用$S(s)$表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_\beta(s) = \mathbf{h}_\beta^{-1}(-s)\{&[\mathbf{z}(-s) - \mathbf{z}_\beta(-s)]\mathbf{h}^{-1}(-s) - [\mathbf{z}(s) \\ &+ \mathbf{z}_\beta(-s)]\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\}\{[\mathbf{z}(-s) + \mathbf{z}_\beta(s)]\mathbf{h}^{-1}(-s) \\ &+ [\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_\beta(s)]\mathbf{h}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\}^{-1}\mathbf{h}_\beta(s)\end{aligned} \tag{56}$$

令

$$\mathbf{S}_\beta(s) = \begin{bmatrix} S_{11\beta}(s) & S_{12\beta}(s) \\ S_{21\beta}(s) & S_{22\beta}(s) \end{bmatrix} \tag{57}$$

当输入端接 1 欧姆的电阻器时，从$N$的输出端口看进去的策动点阻抗为[4]：

$$Z_{20}(s)=z_2(s)\frac{\dfrac{h_2(s)z_2(-s)}{h_2(-s)z_2(s)}+S_{22s}(s)}{\dfrac{h_2(s)}{h_2(-s)}-S_{22s}(s)} \tag{58}$$

这一阻抗可用一个相同的因子乘上分子与分母多项式来加以增广，使得所得的阻抗函数可利用Darlington理论[13]，实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗互易双口网络的策动点阻抗，则从1欧姆电阻器看进去的输入阻抗就是等于当输出终端接$z_2(s)$时、从$N$的输入端口看进去的策动点$Z_{11}(s)$(见图1)，因此，利用移去1欧姆的电阻器，我们便得到了一个所要求的无损耗双口匹配网络。

为了避免转换散射矩阵的困难，下面我们概述另一种方法，它再次地仅仅涉及到一个正实阻抗实现为一个终端接1欧姆的电阻器的无损耗双口网络的输入阻抗问题，但是，在实现这一点之前，我们首先介绍两个阻抗的相容性的概念。

**5.相容性定理**

参看图1，令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是两个正实阻抗。如果$Z_{11}(s)$可以实现为一个终端接$z_2(s)$的无损耗双口网络的策动点阻抗时，则称$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的，其充要条件首先由Wohlers[11]给出，且总结如下：

**定理4.** 两个非Foster型正实阻抗$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的充要条件是：

(1) 在每一个$r_2(s)=\mathrm{Ev}z_2(s)=\dfrac{[z_2(s)+z_2(-s)]}{2}$的$m$阶零点$s_0$处，($a$)如果$z_2(s)$在$s_0$处或$s_0=j\omega_0$处解析，以及$z_2(s)$和$Z_{11}(s)$二者均在$j\omega_0$处为奇异函数，则$s_0$作为$R_{11}(s)=\mathrm{Ev}Z_{11}(s)=\dfrac{[Z_{11}(s)+Z_{11}(-s)]}{2}$的一个零点必须至少是$m$阶。($b$) 如果$z_2(s)$在实频轴之$s_0=j\omega_0$处是奇异的，但$Z_{11}(s)$不为奇异，则$s_0$作为$R_{11}(s)$的一个零点必须至少是$m+2$阶。($c$)在$R_e s_0>0$时，$s_0$作为$R_{11}(s)$和$r_2(s)$的一个零点的阶数之和必须是偶整数。

(2) 存在一个实全通函数$\theta(s)$，使得

$$y_{220}(s)=\frac{1}{2h_2^2(s)}\left[\frac{h_2(s)}{h_2(-s)}-\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\cdot\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}\theta^2(s)\right] \tag{59}$$

在开右半复频平面内解析，此处$r_2(s)=h_2(s)h_2(-s)$和$R_{11}(s)=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$h_2(s)$，$h_2^{-1}(-s)$，$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析；($a$)若$z_2(s)$在实频轴$s_0=j\omega_0$处解析，则$y_{220}(s)$至多是一个具有正实留数的单阶极点，或($b$)若$z_2(s)$在$s_0=j\omega_0$处为奇异，则

$$\lim_{s\to j\omega_0} z_2(s)y_{220}(s) \tag{60}$$

必须是小于或等于1的实数。

这一定理可从定理1利用令$z_1(s)=1$而导出，然后构成与无损耗网络特性相一致的最一般的散射矩阵。但是，这些细节，在此处从略。

现在我们来叙述，定理4的条件完全等价于当$z_1(s)=1$时，负载$z_2(s)$加在系数上的约束。

**定理5.** 令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是一个预给的、有理的、非Foster型正实函数。则$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的充要条件是存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得由下式所定义的函数

$$\phi_2(s)=\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\cdot\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{61}$$

是一个满足系数约束(19)式的有界实反射系数，其中在$i=2$时，在每一个$k_2$阶传输零点$s_{02}$处用$\phi_{x2}$代替$\rho_{x2}$。此处

$$\phi_2(s)=\sum_{x=j}^{\infty}\phi_{x2}(s-s_{02})^x \tag{62}$$

且$R_{11}(s)=\mathrm{E}_v Z_{11}(s)=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$是在开右半复频平面内解析，正如(5)、(6)和(8)式中所给出，函数$A_2(s)$，$B_2(s)$和$F_2(s)$是由$z_2(s)$所唯一确定的。

这个定理的证明连同其它有关的著作可在Satyanarayana和Chen的论文[12]中找到。此处，该结果的意义在于相容性阻抗的求解问题可用更熟悉的宽带匹配条件（在一个无源负载和一个电阻性信号源之间达到一个预给的功率增益特性）来叙述。因此，一个给定负载对于均衡器末端阻抗所施加的约束，完全等价于给两个给定阻抗所施加的相容性条件，此时，输出端口的有界实反射系数假设由给定的阻抗而具有某种规定的形式。现在这一结果可用来求解在任意无源负载和频变信号源阻抗之间的一般匹配问题。

**6.宽带匹配**

利用前面所得的结论，现在我们可以叙述一般匹配问题的求解问题[18]。

给定两个非Foster正实函数$z_1(s)$和$z_2(s)$以及预给传输功率增益特性$G(\omega^2)$，计算$A_i(s)$，$F_i(s)$和

$$\rho_i(s)=\hat{\eta}_{ii}(s)\rho_m(s) \tag{63}$$

其中$\rho_m(s)$是$1-G(-s^2)$的最小相位解，$\eta_{ii}(s)$是任意实正则全通函数。因此，从定理II，函数

$$Z_{11}(s)=\frac{F_1(s)}{A_1(s)-\rho_1(s)}-z_1(s) \tag{64}$$

是正实函数的充要条件是$\rho_1(s)$是一个满足系数约束(19)式($i=1$)的有界实函数。

在选好了(63)式中$\eta_{11}(s)$使$Z_{11}(s)$为正实函数后，现在我们要求$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的。根据定理5，$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的充要条件是存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使其满足该定理的各个条件。但是这仅仅建立了当一个具有内阻抗$z_1(s)$和负载阻抗$z_2(s)$之间实现传输功率增益特性$G(\omega^2)$时无损耗互易双口网络的存在性问题。

为了实现一个所要求的双口网络，我们观察到正如(61)式中所定义，有界实反射系数$\phi_2(s)$是一个当输入端口终端接1欧姆电阻器时的归一化的反射系数，或

$$\phi_2(s)=A_2(s)\frac{Z_{20}(s)-z_2(-s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)} \tag{65}$$

其中$Z_{20}(s)$表示输入端口当终端接1欧姆的电阻时，从输出端口看进去的阻抗。求解$Z_{20}(s)$便得到

$$Z_{20}(s)=\frac{F_2(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)}-z_2(s) \tag{66}$$

因为$\phi_2(s)$是一个有界实函数，且满足基本约束(19)式（在$i=2$时，用$\phi_{x2}$代替$\rho_{x2}$），从定理2知，$Z_{20}(s)$保证是一个正实函数。正如Satyanarayana和Chen[12]所指出，该阻抗函数$Z_{20}(s)$可以增广，若有必要的话，可用相同的因子乘上分子和分母多项式，使得所得的阻抗可实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗互易双口网络的策动点阻抗。移去这个1欧姆的电阻，便得到一个所要求的双口匹配网络。这种增广的方法由Ho和Balabanian[14]给出。这一匹配

网络，当其工作在一个具有内阻为$z_1(s)$的信号源和一个负载阻抗$z_2(s)$之间时，会得到预给的传输功率增益特性$G(\omega^2)$。

## 结 论

在本文中，我们提出了关于宽带匹配数学理论的统一总结。在该理论中最关键的思想是涉及到复数归一化的散射矩阵和仅由端点阻抗或归一化阻抗所表示的闭右半复频平面中的临界点。我们证明了归一化矩阵的表征问题，相容性阻抗以及在一个任意负载和一个带有任意内阻抗相匹配以得到预给的传输功率增益的问题，都可较方便地用基本系数约束来叙述。这些系数是从归一化阻抗在其归一化零点处的罗朗级数展开式而得到。因此，这三个问题，概括了复数归一化散射矩阵存在的三个侧面。

## 参 考 文 献


〔1〕H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, Princeton, N.J., 1945.

〔2〕R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitarary impedances", *J. Franklin Inst.*, Vol. 249, pp. 57-83 and 139-154, 1950.

〔3〕D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 30-50, 1964.

〔4〕W. K. Chen, "Theory and Design of Broadband Matching Networks", Pergamon Press, New York, 1976.

〔5〕Y. T. Chan and E. S. Kuh, "A general matching theory and its application to tunnel diode amplifiers", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, pp. 6-18, 1966.

〔6〕D. C. Fielder, "Broadband matching between load and source systems", *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-8, pp. 138-153, 1961.

〔7〕T. M. Chien, "A theory of broadband matching of a frequency-dependent generator and load—Part I: Theory", *J. Franklin Inst.*, Vol. 298, pp. 181-199, 1974.

〔8〕C. Satyanarayana, "A general theory of broadband matching", Ph. D. dissertation, Ohio University, Athens, Ohio, 1975.

〔9〕D. C. Youla, "An extension of the concept of scattering matrix", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 310-312, 1964.

〔10〕D. C. Youla, "On scattering matrices normalized to complex port numbers", *Proc. IRE*, Vol. 49, p. 1221, 1961.

〔11〕M. R. Wohlers, "Complex normalization of scattering matrices and the problem of compatible impedances", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 528-535, 1965.

〔12〕C. Satyanarayana and W. K. Chen, "Theory of broadband matching and the problem of compatible impedances", *J. Franklin Inst.*, Vol. 309, pp. 267-280, 1980.

〔13〕S. Darlington, "Synthesis of reactance 4 poles", *J. Math Phys.*, Vol. 18, pp. 257-353, 1939.

〔14〕C. W. Ho and N. Balabanian, "Synthesis of active and passive compatible impedances", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-14, pp. 118-128, 1967.

〔15〕M. R. Wohlers, "Lumped and Distributed Passive Networks", Academic Press, New York, 1969.

〔16〕W. H. Ku and W. C. Petersen, "Optimum gain-bandwidth limitations of transistor amplifiers as reactively constrained active two-port networks", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-22, pp. 523-533, 1975.

〔17〕R. W. Newcomb, "Linear Multiport Synthesis", McGraw-Hill New York, 1966.

〔18〕C. Satyanarayana and W. K. Chen, "A general theory of broadband matching", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 310, pp. 349-363, 1981.

# 二十八、宽带匹配理论和相容性阻抗的问题


摘　要

本文指出：在一个无源负载和电阻性信号源之间欲达到预给的传输功率增益特性而进行宽带匹配的Youla理论完全等价于Wohlers的相容性阻抗问题的求解，它利用一个无损耗的耦合网络，把一个给定的无源阻抗转换为另一个特殊的阻抗。


**1.引言**

在设计一个最佳的无损耗的均衡器使负载（由一个电容器和一个电阻器的并联组合而构成）和一个电阻性信号源相匹配的问题中，Bode〔1〕首先进行过研究。Fano〔2〕推广了Bode的工作，且十分一般地解决了在一个任意无源负载和一个电阻性信号源之间的匹配问题。但是Fano的方法有两个主要的缺点：(1) 在用Darlington等效网络代替负载阻抗时，把其某些性质转化为相应的Darlington 等效网络的结构时，使其变得很复杂；(2) 这种方法不能推广到有源均衡器的设计中。为了避开这些困难，Youla〔3〕基于复数归一化原理导出了一种新理论。不用说，Fano和Youla的方法已由许多研究者〔4〕进行了推广和作过精辟的阐述。两个阻抗，若其一个阻抗可以实现为一个终端接另一个阻抗的无损耗双口网络的输入阻抗时，则称其是相容的。相容性阻抗的问题由 Schoeffler〔5〕，Wohlers〔6〕以及Ho和 Balabanian〔7〕研究过。Schoeffler和Wohlers 研究过两个无源阻抗之间的相容性问题，而Ho和Balabanian 把他们的结果推广到阻抗可以是无源或有源的情况。

本文的目的是建立由Wohler 所列出的表征两个无源阻抗相容性的充要条件等价于Youla〔3〕给出的宽带匹配条件。这一结果应用到一个任意无源负载阻抗和一个频变信号源阻抗之间的一般匹配问题的求解上，它将是一个可进一步探讨的问题。

**2.初步研究**

研究图1所示的双口网络。令

$$\tilde{S}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{S}_{11}(s) & \tilde{S}_{12}(s)\\ \tilde{S}_{21}(s) & \tilde{S}_{22}(s)\end{bmatrix} \tag{1}$$

是归一化到下列基准阻抗矩阵的散射矩阵。

$$\tilde{z}(s)=\begin{bmatrix}z_1(s) & 0\\ 0 & z_2(s)\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中$z_1(s)$和$z_2(s)$是一个如图1所示的无源、非Foster型终端阻抗。其偶部可写成：

$$r_i(s)=Ev\,z_i(s)=\frac{1}{2}[z_i(s)+(z_i-s)]=h_i(s)h_i(-s) \tag{3}$$

$i=1,2$。其中因式分解是使$h_i(s)$和$h^{-1}(-s)$在开右半复频平面内解析，且

$$\boldsymbol{h}(s)=\begin{bmatrix} h_1(s) & 0 \\ 0 & h_2(s) \end{bmatrix} \tag{4}$$

我们可以看出，$h_i(s)/h_i(-s)$ 是一个实正则全通函数，其极点包括了 $z_i(s)$ 的所有开左半复

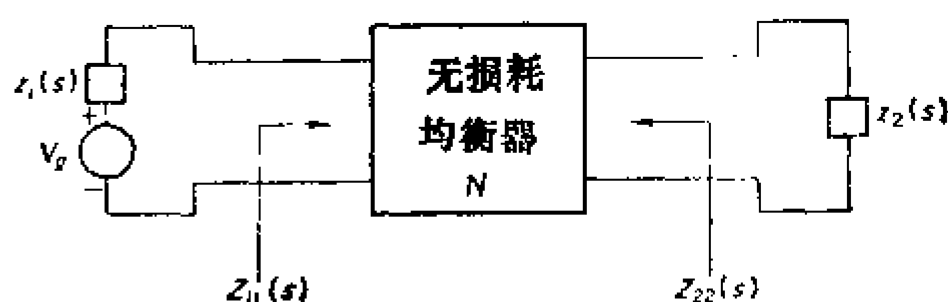



图1 研究任意信号源和负载之间的宽带匹配问题的示意图

频平面的极点。因此，它可以写成两个实正则全通函数的乘积，一个是由$z_i(-s)$的开右半复频平面的极点$a_j(j=1, 2, \cdots, v_i)$所定义的$A_i(s)$,

$$A_i(s)=\prod_{j=1}^{v_i}\frac{s-a_j}{s+a_j},\quad i=1,\ 2 \tag{5}$$

另一个是由$r_i(s)$的开右半复频平面的零点所定义的实正则全通函数$B_i(s)$，即

$$h_i(s)/h_i(-s)=A_i(s)B_i(s) \tag{6}$$

可观察到对于一个正实函数$z_i(s)$来说，$h_i(s)$和$h_i(-s)$在实频轴上解析，且从(3)和(6)式得，

$$2h_i^2(s)=2r_i(s)A_i(s)B_i(s)=F_i(s)B_i(s) \tag{7}$$

其中

$$F_i(s)=2r_i(s)A_i(s),\quad i=1,\ 2 \tag{8}$$

众所周知，归一化的反射系数$\tilde{S}_{ii}(s)$可以表示为[4]

$$\tilde{S}_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s),\quad i=1,\ 2 \tag{9}$$

其中

$$\rho_i(s)=A_i(s)\frac{Z_{ii}(s)-z_i(-s)}{Z_{ii}(s)+z_i(s)}, \tag{10}$$

$Z_{22}(s)$和$Z_{11}(s)$是当输入和输出端口分别接以$z_1(s)$和$z_2(s)$时，从输出端和输入端看进去的策动点阻抗。因为该双口网络是无损耗的，所以传输功率增益$G(\omega^2)$通过下列关系用$\rho_i(j\omega)$来表示：

$$G(\omega^2)=1-|\tilde{S}_{22}(j\omega)|^2=1-|\tilde{S}_{11}(j\omega)|^2=1-|\rho_i(j\omega)|^2,\quad i=1,\ 2 \tag{11}$$

因此，为了研究这一类与预给负载阻抗$z_i(s)$相容的传输功率增益特性，只要研究有界实反射系数$\rho_i(s)$就足够了。有时，为了利用由于引入因子$B_i(s)$面带来的附加自由度的优点，我们将发现，采用$\tilde{S}_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s)$是必要的。

**3.Youla的系数约束**

对于一个给定阻抗$z_i(s)$，函数$r_i(s)/z_i(s)$ 的$k_i$重闭右半复频平面的零点$s_{0i}$称为$z_i(s)$的一个"$k_i$阶传输零点"。为方便起见，传输零点可分为下列4种互不相容的情况。

令$s_{0i}=\sigma_{0i}+j\omega_{0i}$。它取决于$\sigma_{0i}$和$z_i(s_{0i})$，因此$s_{0i}$属于下列4类情况之一：

(i) 第I类：$\sigma_{0i}>0$，它包含了所有开右半复频平面的传输零点；

(ii) 第II类：$\sigma_{0i}=0$且$z_i(j\omega_{0i})=0$

(iii) 第III类：$\sigma_{0i}=0$且$0<|z_i(j\omega_{0i})|<\infty$；

(iv) 第IV类：$\sigma_{0i}=0$且$|z_i(j\omega_{0i})|=\infty$。

关于$\rho_i(s)$的Youla的系数约束可以用下列各函数在$z_i(s)$的传输零点$s_{0i}$处的罗朗级数展开式的系数约束来叙述：

$$A_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_{xi}(s-s_{0i})^x, \tag{12}$$

$$F_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_{xi}(s-s_{0i})^x, \tag{13}$$

$$\rho_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{14}$$

对于$\rho_i(s)$的基本约束：

对于$z_i(s)$的$k_i$阶传输零点$s_{0i}(i=1,\ 2)$，它取决于$s_{0i}$的类型，必须满足下列4组系数条件之一：

(i) 第一类：$A_{xi}=\rho_{x}$，$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1$ (15a)

(ii) 第二类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1$，

以及 $(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})/F_{(k_i+1)i}\geqq 0$ (15b)

(iii) 第III类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-2$，

以及 $(A_{(k_i-1)i}-\rho_{(k_i-1)i})/F_{k_i i}\geqq 0$ (15c)

(iv) 第IV类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1$，

以及 $F_{(k_i-1)i}/(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})\geqq a_{-1i}$，$a_{-1i}$为$z_i(s)$在$j\omega_{0i}$处的留数 (15d)

这些系数约束的重要性首先由Youla给出的下列定理[3]来概括：

**定理1.** 令$z_i(s)$是一个预给的、非Foster有理正实函数，$\rho_i(s)$是复变量$s$的一个实有理函数。则由下式所定义的函数：

$$Z_{ii}(s)=\frac{F_i(s)}{A_i(s)-\rho_i(s)}-z_i(s),\quad i=1或2, \tag{16}$$

为正实函数的充要条件是$\rho_i(s)$为一个满足基本系数约束[15]的有界实反射系数。其中$A_i(s)$和$F_i(s)$如(5)和(8)式给出，且是由$z_i(s)$所唯一确定的。

本定理的意义在于它给出了在一个无源负载和一个电阻性信号源之间，欲具有预给的传输功率增益时，匹配网络存在的条件。正如我们从(10)式所见，(16)式的$Z_{22}(s)$是所要求的均衡器的末端阻抗。如果$Z_{22}(s)$是一个正实函数，则它可实现为终端接一个给定电阻器$z_1(s)=r_g$的无损耗双口网络的输入阻抗。

**4. Wohler的相容性定理**

再参看图1，令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是两个正实阻抗。如果$Z_{11}(s)$可以实现为一个终端接$z_2(s)$的无损耗双口网络的策动点阻抗时，则$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的。$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的充要条件是由Wohler[6]首先给出，且总结如下：

**定理2.** 两个非Foster型正实阻抗$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的充要条件是：

(1) 在$r_2(s)=Ev z_2(s)=\frac{1}{2}[z_2(s)+z_2(-s)]$的每一个$m$阶零点$s_0$处：

(i) 如果 $z_2(s)$在$s_0$处解析，则$s_0$作为$R_{11}(s)=Ev Z_{11}(s)=\frac{1}{2}[Z_{11}(s)+Z_{11}(-s)]$的一

个零点至少必须是$m$阶；

(ii) 如果$z_2(s)$是一个在实频轴上$s_0=j\omega_0$处是奇异的，但不是$Z_{11}(s)$的奇异点，则$s_0$作为$R_{11}(s)$的一个零点至少必须是$m+2$阶，且

(iii) 对于$R_e s_0>0$，作为$R_{11}(s)$和$r_2(s)$的零点$s_0$的阶数之和必须是一个偶整数；

(2) 存在一个实正则全通函数$\theta(s)$使下列函数

$$y_{22a}(s)=\frac{1}{2h_2^2(s)}\left[\frac{h_2(s)}{h_2(-s)}-\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\cdot\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}\theta^2(s)\right] \tag{17}$$

在开右半复频平面内解析，其中$r_2(s)=h_2(s)h_2(-s)$和$R_{11}(s)=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$h_2(s)$、$h_2^{-1}(-s)$、$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，且

(i) 如果$z_2(s)$在实频轴上的$s_0=j\omega_0$处解析，则$y_{22a}(s)$至多在$s_0$处是一个具有正实留数的单阶极点，或

(ii) 如果$z_2(s)$在$s_0=j\omega_0$处是一个奇异点，则

$$\lim_{s\to j\omega_0} z_2(s)y_{22a}(s) \tag{18}$$

必须是小于或等于1的实数。

**5.条件的等价性**

在本节中，我们来证明定理2的条件完全等价于当$z_1(s)$为1时负载阻抗$z_2(s)$所加的系数约束。

为实现这一点，我们参看图1，且令

$$\mathbf{S}(s)=\begin{bmatrix}S_{11}(s) & S_{12}(s)\\ S_{21}(s) & S_{22}(s)\end{bmatrix} \tag{19}$$

是$N$的归一化到下列基准阻抗矩阵的散射矩阵，

$$\mathbf{z}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z_2(s)\end{bmatrix} \tag{20}$$

可观察到输入端口是归一化到1欧姆电阻器上而非归一化到$z_1(s)$上。这一情况如图2所示。正如Wohler[6]所指出，一般散射参数$S_{ij}(s)(i,\ j=1,\ 2)$与用上述归一化方法所表示的双口网络N的无损耗特性相一致，它们为

$$S_{11}(s)=\frac{Z_{11}(s)-1}{Z_{11}(s)+1}, \tag{21}$$

$$S_{12}(s)=S_{21}(s)=\frac{2M_{11}(s)}{Z_{11}(s)+1}\theta(s), \tag{22}$$

$$S_{22}(s)=\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\cdot\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}\theta^2(s) \tag{23}$$

其中$R_{11}(s)=EvZ_{11}(s)=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$是在开右半复频平面内解析，且$\theta(s)$是一个实正则全通函数。

研究图3的增广双口网络$N_a$，令

$$\mathbf{Y}_a(s)=\begin{bmatrix}y_{11a}(s) & y_{12a}(s)\\ y_{21a}(s) & y_{22a}(s)\end{bmatrix} \tag{24}$$

是$N_a$的导纳矩阵。$\mathbf{Y}_a(s)$的各元素可用$\mathbf{S}(s)$的各元素来表示如下：

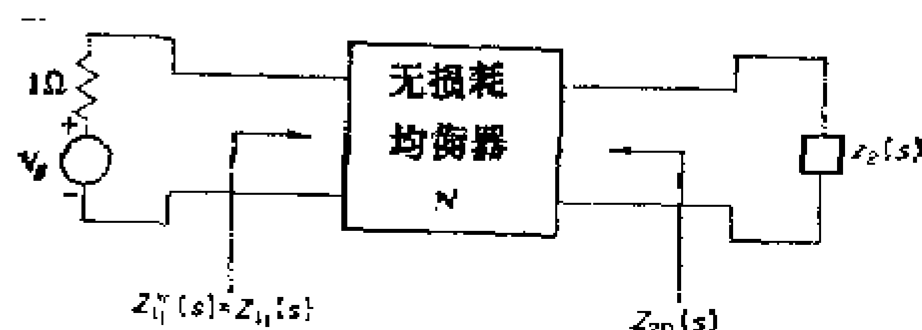



图2　终端接电阻性信号源和无源负载阻抗的无损耗双口网络

$$y_{11a}(s)=\frac{1}{Z_{11}(s)+1},\tag{25}$$

$$y_{12a}(s)=y_{21a}(s)=-\frac{M_{11}(s)}{h_2(s)}\frac{\theta(s)}{Z_{11}(s)+1},\tag{26}$$

$$y_{22a}(s)=\frac{1}{2h_2^2(s)}\left[\frac{h_2(s)}{h_2(-s)}-S_{22}(s)\right]\tag{27}$$

其中$h_2(s)h_2(-s)=r_2(s)=Ev z_2(s)$在(3)式中定义过。

参看图2，研究在输出端的有界实反射系数

$$\phi_2(s)=A_2(s)\frac{Z_{20}(s)-z_2(-s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)}\tag{28}$$

其中$Z_{20}(s)$是当输入端口接以1欧姆电阻器时，从输出端看进去的策动点阻抗，$A_2(s)$在(5)式中定义过。从(6)式我们有

$$S_{22}(s)=\frac{h_2(s)}{h_2(-s)}\cdot\frac{Z_{20}(s)-z_2(-s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)}=B_2(s)\phi_2(s)\tag{29}$$

正如Wohlers(6)所指出，为使$y_{22a}(s)$在开右半复频平面内解析，(23)式的$S_{22}(s)$中的全通函数$\theta(s)$必须具有下列形式：

$$\theta^2(s)=\frac{N_{11}(-s)}{N_{11}(s)}\frac{n_2(-s)}{n_2(s)}\theta_1^2(s)\tag{30}$$

其中$n_2(-s)$包含了$r_2(s)$的所有开右半复频平面内的零点，$N_{11}(-s)$包含了$R_{11}(s)$的所有开右半复频平面的零点，它们与$r_2(s)$的零点相一致，$\theta_1(s)$是实全通函数，它无零点位于$r_2(s)$的开右半复频平面内的零点处。

最后，均衡器的末端阻抗$Z_{20}(s)$可以从(28)式确定且由下式给出：

$$Z_{20}(s)=\frac{F_2(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)}-z_2(s)\tag{31}$$

其中，如(8)式所定义$F_2(s)=2r_2(s)A_2(s)$。因为从(6)，(7)和(29)式，(27)式的$y_{22a}(s)$可以表示为：

$$y_{22a}(s)=[A_2(s)-\phi_2(s)]/F_2(s)\tag{32}$$

末端阻抗$Z_{20}$变为：

$$Z_{20}(s)=1/y_{22a}(s)-z_2(s)\tag{33}$$

**引理1．** 令$z_2(s)$是一个预给的、非 Foster 型正实函数，$\phi_2(s)$是复变量$s$的实有理函数。对于每一个$z_2(s)$的$k_2$阶传输零点$s_{02}$，$\phi_2(s)$在$s_{02}$处可用罗朗级数展开成为：

$$\phi_2(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\phi_{x2}(s-s_{02})^x\tag{34}$$

定义函数

$$y_{22a}(s)=[A_2(s)-\phi_2(s)]/F_2(s) \tag{35}$$

其中函数$A_2(s)$和$F_2(s)$如(5)和(8)式所给出，是由$z_2(s)$所唯一确定，且它们在$s_{02}$处的级数展开式在(12)和(13)式中给出。

若$\phi_2(s)$取决于$s_{02}$的类别，并是一个满足下列系数约束的有界实反射系数：

(i) 第I类：$A_{x2}=\phi_{x2}$，$x=0,1,2,\cdots,k_2-1$ (36a)

(ii) 第II类：$A_{x2}=\phi_{x2}$，$x=0,1,2,\cdots,k_2-1$，

以及 $(A_{k_22}-\phi_{k_22})/F_{(k_2+1)2}\geqq 0$ (36b)

(iii) 第III类：$A_{x2}=\phi_{x2}$，$x=0,1,2,\cdots,k_2-2$，

以及$(A_{(k_2-1)2}-\phi_{(k_2-1)2})/F_{k_22}\geqq 0$ (36c)

(iv) 第IV类：$A_{x2}=\phi_{x2}$，$x=0,1,2,\cdots,k_2-1$，

以及 $F_{(k_2-1)2}/(A_{k_22}-\phi_{k_22})\geqq a_{-12}$，$a_{-12}$ (36d)

为$z_2(s)$在极点$s_{02}$处的留数

则$y_{22a}(s)$是正实函数。

本引理直接从定理1和关系式(33)得到。

**定理3.** 令$z_2(s)$是一个预给的、有理的、非Foster型正实函数，$\phi_2(s)$是复变量$s$的实有理函数。则由下列关系式所定义的函数

$$y_{22a}(s)=[A_2(s)-\phi_2(s)]/F_2(s) \tag{37}$$

是由$z_2(s)$所唯一确定的，其中$A_2(s)$和$F_2(s)$已由(5)和(8)式给出，且满足下列条件：

(1) $y_{22a}(s)$在开右半复频平面内解析，

(2) $r_2(s)=Evz_2(s)$在实频轴上的每一个$k$阶零点$s_0=j\omega_0$处

(i) 如果$z_2(s)$在$s_0=j\omega_0$处解析，则$y_{22a}(s)$在$s_0$处至多有一个单阶极点，且具有正实的留数，或

(ii) 如果$z_2(s)$在$s_0=j\omega_0$处为奇异，则

$$\lim_{s\to j\omega_0} z_2(s)y_{22a}(s) \tag{38}$$

必须是一个小于或等于1的实数，其充要条件是$\phi_2(s)$是一个在$z_2(s)$的每一个$k_2$阶传输零点$s_{02}$处满足系数约束(36)式的有界实反射系数。

证明：必要性。令$s_{02}=\sigma_{02}+j\omega_{02}$是$z_2(s)$的一个$k_2$阶传输零点，取决于$s_{02}$的类别，我们研究下列4类情况：

(i) 第I类：在$r_2(s)$的每一个$k$阶开右半复频平面零点$s_0$处，$s_0$也是$z_2(s)$的$k$阶传输零点。因此，不失一般性地，我们可写成$s_0=s_{02}$，$k=k_2$。为使(37)式的$y_{22a}(s)$在开右半复频平面内解析，在$F_2(s)$的开右半复频平面的零点，$A_2(s)-\phi_2(s)$必须至少有同阶的零点。但是$F_2(s)$的开右半复频平面的零点包含了$z_2(s)$的第I类的传输零点。从(37)式在每一个$s_{02}$处我们有

$$A_{x2}=\phi_{x2}\text{和}x=0,1,2,\cdots,k_2-1, \tag{39}$$

于是建立了(36a)式。

(ii) 第II类：在每一个$z_2(s)$的$k_2$阶的传输零点$s_{02}=j\omega_{02}$处，$s_{02}$也是一个$r_2(s)$和$F_2(s)$的$k_2+1$阶零点。因此，我们可以写成$s=s_{02}$和$k=k_2+1$。根据条件(2i)，$y_{22a}(s)$至多在$s_{02}$处有一个留数为正实数的单阶极点。由(37)式得到$s_{02}$至少是$A_2(S)-\phi_2(s)$的一个$k_2$阶零点。

因此，我们有

$$A_{x2}=\phi_{x2},\quad x=0,1,2,\cdots,k_2-1, \tag{40a}$$

且$y_{22a}(s)$在极点$s_{02}=j\omega_{02}$处的留数可求得为：

$$\underset{s\to s_{02}}{\text{limit}}(s-s_{02})\,y_{22a}(s)=(A_{k_22}-\phi_{k_22})/F_{(k_2+1)2}\geqq 0, \tag{40b}$$

其中$F_{(k_2+1)2}\neq 0$，因为$s_{02}$是$F_2(s)$的一个$k_2+1$阶零点。当且仅当$y_{22a}(s)$在$s_{02}$处解析时，(40b)中的等式成立。这就建立了第$II$类约束(36b)式。

(iii) 第$III$类，在每一个$z_2(s)$的第$III$类$k_2$阶传输零点$s_{02}=j\omega_{02}$处，$s_{02}$是一个$r_2(s)$和$F_2(s)$的$k_2$阶零点。因此，我们能写成$s=s_{02}$和$k=k_2$，根据(2i)式，$s_{02}$必须至少是$A_2(s)-\phi_2(s)$的一个$k_2-1$阶的零点．这就表明：

$$A_{x2}=\phi_{x2},\quad x=0,1,2,\cdots,k_2-2 \tag{41a}$$

且$y_{22a}(s)$在$s_{02}=j\omega_{02}$处所算得的留数为

$$\underset{s\to s_{02}}{\text{limit}}(s-s_{02})y_{22a}(s)=[A_{(k_2-1)2}-\phi_{(k_2-1)2}]/F_{k_22}\geqq 0 \tag{41b}$$

其中$F_{k_22}\neq 0$，因为$s_{02}$是一个$F_2(s)$的$k_2$阶零点。当且仅当$y_{22a}(s)$在$s_{02}$处解析时，得到(41b)式中的等式。这就证明系数约束(36c)式是必要的。

(iv) 第$IV$类：在$z_2(s)$的每一个第$IV$类$k_2$阶传输零点$s_{02}=j\omega_{02}$处，$s_{02}$是一个$r_2(s)$和$F_2(s)$的$k_2-1$阶的零点，且我们可以写成：$s=s_{02}$和$k=k_2-1$。在这种零点处，条件(2ii)必须满足。因为$s_{02}$是$z_2(s)$的一个单阶极点，条件(2ii)表示$S_{02}$至少是$y_{22a}(s)$的1阶零点，这表明$s_{02}$至少是$A_2(s)-\phi_2(s)$的一个$k_2$阶零点。因此，我们有：

$$A_{x2}=\phi_{x2}\quad x=0,1,2,\cdots,k_2-1。 \tag{42a}$$

(38)式必须是一个小于或等于1的实数的要求，得到下列不等式：

$$\underset{s\to s_{02}}{\text{limit}}\left(\frac{a_{-12}}{s-s_{02}}+a_{02}+\cdots\right)\frac{\sum\limits_{x=k_2}^{\infty}(A_{x2}-\phi_{x2})(s-s_{02})^x}{\sum\limits_{x=k_2-1}^{\infty}F_{x2}(s-s_{02})^x}\leqq 1 \tag{42b}$$

其中$F_{(k_2-1)2}\neq 0$，因为$s_{02}$是$F_2(s)$的一个$k_2-1$阶零点，从而得到

$$a_{-12}(A_{k_22}-\phi_{k_22})/F_{(k_2-1)2}\leqq 1 \tag{42c}$$

这就建立了条件(36$d$)式。

充分性：根据引理1，$y_{22a}(s)$是正实的，且得到条件(1)和(2i)。事实上，第$I$类约束意味着条件(1)，第$II$类和第$III$类约束得到条件(2i)。在下面，我们来说明第$IV$类约束将给出条件(2ii)。

在每一个$z_2(s)$的第$IV$类$k_2$阶传输零点$s_{02}=j\omega_{02}$处，$s_{02}$是$r_2(s)$和$F_2(s)$的一个$k_2-1$阶零点，因为$s_{02}$是$z_2(s)$的一个单阶极点，因此，我们可以写成$s_0=j\omega_0=s_{02}=j\omega_{02}$和$k=k_2-1$。在这种零点处，系数约束(36d)式必须满足，这就意味着$s_0$至少是$A_2(s)-\phi_2(s)$的一个$k+1=k_2$阶的零点。因此，从(37)式知$s_0$是$y_{22a}(s)$的一个至少为1阶的零点。我们有

$$\underset{s\to s_0}{\text{limit}}\,z_2(s)y_{22a}(s)=\underset{s\to s_0}{\text{limit}}\left(\frac{a_{-12}}{s-s_0}+a_{02}+\cdots\right)\frac{\sum\limits_{x=k+1}^{\infty}(A_{x2}-\phi_{x2})(s-s_0)^x}{\sum\limits_{x=k}^{\infty}F_{x2}(s-s_0)^x}$$

$$=a_{-12}\frac{A_{(k_2+1)2}-\phi_{(k+1)2}}{F_{k2}}=a_{-12}\frac{A_{k_22}-\phi_{k_22}}{F_{(k_2-1)2}}$$

$$\leqq a_{-12}\frac{1}{a_{-12}}=1 \tag{43}$$

正是(36d)式的约束所要求的。定理证毕。

现在我们来说明，若函数$\phi_2(s)$假设有(23)和(29)式的形式，则负载阻抗$z_2(s)$对$\phi_2(s)$的影响而引起的Youla 的系数将完全等价于 Wohler 的相容性条件。

**定理4.** 令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是一个预给的、有理的、非 Foster 型正实函数。$Z_{11}(s)$ 和$z_2(s)$是相容的充要条件是存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得由下列关系式所定义的函数

$$\phi_2(s)=\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\cdot\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{44}$$

在$z_2(s)$的每一个$k_2$阶传输零点$s_{02}$处，是一个满足系数约束(36)式的有界实反射系数，其中$R_{11}=EvZ_{11}(s)=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$ 在开右半复频平面内解析。函数 $A_2(s)$、$B_2(s)$和$F_2(s)$正如(5)、(6)和(8)式给出，是由$z_2(s)$所唯一确定的。同时，$A_2(s)$、$F_2(s)$和$\phi_2(s)$在$s_{02}$处的级数展开式，分别由(12)、(13)和(34)式给出。

证明：必要性。假设$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的，则存在一个如图2所示的无损耗双口网络$N$。令(19)式的$\boldsymbol{S}(s)$是$N$的归一化到(20)式的基准阻抗矩阵 $\boldsymbol{z}(s)$的散射矩阵。其最一般的散射参数$S_{ij}(s)(i,j=1,2)$ 由(21)—(23)式给出，它们与用上述归一化的方法所表示的 $N$ 的无损耗特性相一致。因而，可应用(24)—(27)式。为使$y_{220}(s)$ 在开右半复频平面内解析，$\theta^2(s)$必须是(30)式的形式。因为全通函数$B_2(s)$是由$r_2(s)$的开右半复频平面的零点所定义，从定理2的条件(1i)，(30)式可重写成：

$$\theta^2(s)=B_2^2(s)\theta_0^2(s) \tag{45}$$

把(45)式代入(23)式连同(44) 式一起得出：

$$S_{22}(s)=B_2(s)\phi_2(s), \tag{46}$$

或从(29)式可得：

$$\phi_2(s)=A_2(s)\frac{Z_{20}(s)-z_2(-s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)} \tag{47}$$

此处，正如图2所示，$Z_{20}(s)$表示$N$的末端向左看的阻抗。从(47)式我们得到(31)和 (32)式或(17)式。根据定理2，$y_{220}(s)$满足定理3的两个条件(1)和(2)。借助于定理3，我们可以断定：$\phi_2(s)$是一个在$z_2(s)$的每一个传输零点处满足系数约束(36)式的有界实反射系数，这就完成了本定理的必要性部分的证明。

充分性：假设$\phi_2(s)$是一个有界实函数，且在每一个$s_{02}$处满足约束(36)式。我们来证明$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的。

研究函数

$$Z_{20}(s)=\frac{F_2(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)}-z_2(s) \tag{48}$$

其偶部可求得为

$$r_{20}(s)=EvZ_{20}(s)=\frac{r_2(s)[1-\phi_2(s)\phi_2(-s)]}{[A_2(s)-\phi_2(s)][A_2(-s)-\phi_2(-s)]} \tag{49}$$

根据定理1，$Z_{20}(s)$是正实的。因此，$Z_{20}(s)$可以实现如图2所示、终端接1欧姆电阻器的一个

无损耗双口网络$N$的策动点阻抗。我们将证明（若有必要的话），从1欧姆电阻器向右看进去的输入阻抗$Z'_{11}(s)$可以做成等于由$Z_{20}(s)$增广而得的$Z_{11}(s)$。

研究图2的可实现双口网络$N$。(19)式的$\mathbf{S}(s)$是归一化到(20)式的基准阻抗矩阵$Z(s)$的散射矩阵。因此，我们有：

$$S_{22}(s)=\frac{h_2(s)Z_{20}(s)-z_2(-s)}{h_2(-s)Z_{20}(s)+z_2(s)} \tag{50}$$

当$S_{22}(s)$确定后，剩下的问题是确定$S_{12}(s)=S_{21}(s)$和$S_{11}(s)$，使得这三个散射参数满足双口网络$N$的无损耗要求。无损耗的双口网络必须满足〔4〕

$$\mathbf{S}'(-s)\mathbf{S}(s)=\mathbf{1}_2, \tag{51}$$

其中一撇表示矩阵的转置，$\mathbf{1}_2$是2阶单位矩阵。对于互易双口网络$N$，我们得到：

$$S_{21}(s)=S_{21}(s)=\frac{2m_{20}(s)m_2(s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)}\theta(s), \tag{52}$$

$$S_{11}(s)=-\frac{Z_{20}(-s)-z_2(s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)}\frac{h_2(-s)}{h_2(s)}\frac{m_{20}(s)}{m_{20}(-s)}\frac{m_2(s)}{m_2(-s)}\theta^2(s) \tag{53}$$

其中

$$r_{20}(s)=EvZ_{20}(s)=m_{20}(s)m_{20}(-s), \tag{54a}$$

$$r_2(s)=Evz_2(s)=m_2(s)m_2(-s) \tag{54b}$$

$m_{20}(s)$，$m_2(s)$，$m_{20}^{-1}(s)$和$m_2^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，且$\theta(s)$是一个实正则全通函数。我们注意到，正如(3)式所示，$r_2(s)$也可因式分解成$r_2(s)=h_2(s)h_2(-s)$，使得$h_2(s)$和$h_2^{-1}(-s)$在开右半复频平面内解析。

剩下的问题是要确定$\theta(s)$必须使上述三个散射参数表征为可实现的双口网络$N$的条件。为此目的，令(24)式的$\mathbf{Y}_a(s)$是图3的增广双口网络$N_a$的导纳矩阵，它与$\mathbf{S}(s)$的关系为〔4〕

$$\mathbf{Y}_a(s)=\frac{1}{2}\mathbf{h}^{-1}(s)[\mathbf{h}(s)\mathbf{h}^{-1}(-s)-\mathbf{S}(s)]\mathbf{h}^{-1}(s), \tag{55}$$

其中

$$\mathbf{h}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & h_2(s)\end{bmatrix}, \tag{56}$$

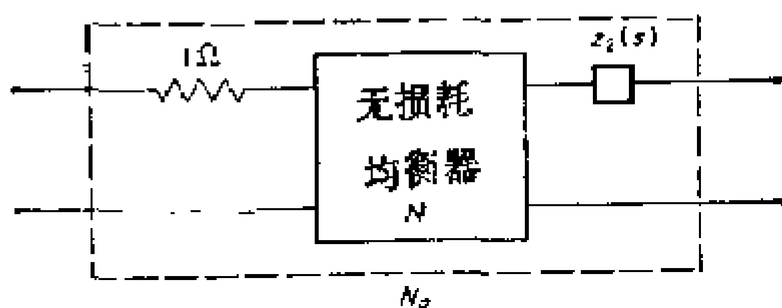



图3 研究宽带匹配问题的增广双口网络

从而得到

$$y_{11a}(s)=\tfrac{1}{2}[1-S_{11}(s)], \tag{57}$$

$$y_{12a}(s)=y_{21a}(s)=-\frac{m_{20}(s)m_2(s)}{h_2(s)[Z_{20}(s)+z_2(s)]}\theta(s), \tag{58}$$

$$y_{22a}(s)=1/[Z_{20}(s)+z_2(s)] \tag{59}$$

重写(54a)，(49)式的偶部$r_{20}$可以因式分解为：

$$m_{20}(s)=\frac{h_2(s)\phi_{12m}(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)} \tag{60}$$

式中$\phi_{12m}(s)$表示是下列函数的最小相位因式分解，

$$1-\phi_2(s)\phi_2(-s)=\phi_{12m}(s)\phi_{12m}(-s) \tag{61}$$

这一因式分解与$m_{20}(s)$和$m_{20}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析的要求是一致的。在$z_2(s)$的第I类传输零点$s_{02}$处，$s_{02}$是$r_2(s)$，$h_2(s)$和$F_2(s)$的$k_2$阶零点。但是第I类系数约束(36a)要求$s_{02}$至少是$A_2(s)-\phi_2(s)$的一个$k_2$阶零点。从(48)式我们可看出$Z_{2t}(s)+z_2(s)$是正实的，且在开右半复频平面内无零点和极点，$s_{02}$是$A_2(s)-\phi_2(s)$的一个$k_2$阶零点。因此，要使$m_{20}(s)$和$m_{20}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，则$\phi_{12m}(s)$必须是$1-\phi_2(s)\phi_2(-s)$的一个最小相位因式分解。

我们进一步研究(58)式的导纳参数$y_{120}(s)$，为使$y_{120}(s)$在开右半复频平面内解析，$\theta(s)$必须至少包含同阶的$z_2(s)$的第I类传输零点。因为$z_2(s)$的第I类传输零点也是同阶的$r_2(s)$在开右半复频平面的零点，又因为$B_2(s)$是由$r_2(s)$的开右半复频平面的零点所定义，所以全通函数$\theta(s)$可写成：

$$\theta(s)=B_2(s) \tag{62}$$

从(44)式我们得到

$$1-\phi_2(s)\phi_2(-s)=\frac{4R_{11}(s)}{[1+Z_{11}(s)][1+Z_{11}(-s)]}=\phi_{12m}(s)\phi_{12m}(-s), \tag{63}$$

其最小相位因式分解可求得为

$$\phi_{12m}(s)=\frac{2M_{11}(s)}{1+Z_{11}(s)} \tag{64}$$

把(48)式代入(53)式连同(44)，(60)和(64)式一起，得到：

$$S_{11}(s)=\frac{Z_{11}(s)-1}{Z_{11}(s)+1}\frac{m_2(s)}{m_2(-s)}\frac{B_2(-s)}{A_2(s)}\theta_0^2(-s)\theta^2(s) \tag{65}$$

因为

$$\frac{m_2(s)}{m_2(-s)}=A_2(s)B_2(-s), \tag{66}$$

$B_2(s)B_2(-s)=1$和$\theta_0(s)\theta_0(-s)=1$，利用这些关系连同(62)式，给出

$$S_{11}(s)=\frac{Z_{11}(s)-1}{Z_{11}(s)+1}\theta_0^2(-s) \tag{67}$$

正如Ho和 Balabanian[7]所指出，$Z_{20}(s)$可以利用把一个相同的因式乘上分子和分母多项式而使其增广，从而得到一种新的实现，其输入反射系数$\bar{S}_{11}(s)$和$S_{11}(s)$由下式建立联系：

$$\bar{S}_{11}(s)=S_{11}(s)\theta_0^2(s)=\frac{Z_{11}(s)-1}{Z_{11}(s)+1} \tag{68}$$

众所周知，$Z_{11}''(s)$表示如图2所示，它是在新实现中从1欧姆电阻器看进去的输入阻抗，则归一化到1欧姆电阻器上的输入反射系数为：

$$\bar{S}_{11}(s)=\frac{Z_{11}''(s)-1}{Z_{11}''(s)+1} \tag{69}$$

这表明$Z_{11}''(s)=Z_{11}(s)$。定理证毕。

## 结　论

在本文中，我们已经说明了相容性阻抗的求解可用在一个无源负载和一个电阻性的信号源之间欲达到一个预给的传输功率特性的宽带匹配条件。具体地说，我们已经证明了当输出端口的有界实反射系数为某种形式的给定阻抗表示时，由一个给定负载对于均衡器末端阻抗所施加的约束完全等价于两个给定阻抗所施加的相容性条件。

这一结果的意义在于它可应用到在一个任意无源负载和频变信号源之间得到一般匹配问题的解答。它将是另一篇论文的题目。

## 参　考　文　献


〔1〕H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1945.

〔2〕R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances", *J. Franklin Inst.*, Vol. 249, pp. 57-83 and 139-154, 1950.

〔3〕D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching"; *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 30-50, 1964.

〔4〕W. K. Chen, "Theory and Design of Broadband Matching Networks", Pergamon Press, New York, Oxford, 1976.

〔5〕J. D. Schoeffler, "Impedance transformation using lossless networks"; *I.R.E. Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-8, pp. 131-137, 1961.

〔6〕M. R. Wohlers, "Complex normalization of scattering matrices and the problem of compatible impedances"; *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 528-535, 1965.

〔7〕C. W. Ho and N. Balabanian, "Synthesis of active and passive compatible impedances", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-14, pp. 118-128, 1967.

〔8〕C. Satyanarayana, "A general theory of broadband matching", Ph. D. dissertation, Ohio University, Athens, Ohio, 1975.

〔9〕M. R. Wohlers, "Lumped and Distributed Passive Networks", Academic Press, New York, 1969.

〔10〕M. R. Wohlers, "A quantitative measure of the passivity and activity of networks", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-17, pp. 46-54, 1970.

# 二十九、在有源负载时的宽带匹配一般理论


## 摘　要

本文给出了在给定无源频变信号源阻抗和有源(或无源)负载以及在预给传输功率增益特性的情况下，欲得到所要求的传输功率特性时，存在无损耗均衡器的充要条件。这种方法的意义在于均衡器的实现仅仅涉及到了Darlington理论中的策动点阻抗的综合问题。


**1.引言**

通信系统设计中的一个基本问题是在一个给定的信号源和给定的负载之间设计一个无损耗的耦合网络，使得在感兴趣的指定频带内从信号源到负载所传输功率为最大。我们把这种网络的功能称为阻抗匹配或阻抗均衡，由此而得的网络称为匹配网络或均衡器。

Bode[1] 在研究一类很有用的但仅限于只由一个电阻器和一个电容器并联组合而构成的耦合网络时，首先地提出了匹配问题。Fano[2]推广了Bode 的工作，并卓越地用十分普遍的方法解决了在电阻性信号源和任意负载之间的阻抗匹配问题。然而，虽然Fano的方法十分精巧，但它从实际和理论的观点来看，仍然存在着两个主要缺点：首先，利用Darlington 等效网络而将负载阻抗替代后，一些性质转换为相应的Darlington等效网络结构，因而导致了结构的复杂化。其次，因为Darlington定理仅仅适用于无源阻抗的情况，因而这种方法不能推广到一般有源均衡器的设计中。随着固态技术的研究进展以及新器件(诸如IMPATT-碰撞雪崩渡越二极管以及GaAs FET-耿氏场效应管）的日益增多，这些情况就使我们不得不加以考虑。基于散射矩阵的复数归一化原理[3，4]，Youla[5]导出了一种新理论，从而完全避开了Fano的论著中的缺点。因为Youla法直接涉及到负载，所以应用起来相当简单。事实上，他的理论由Chan和Kuh[6]将其已推广到有源负载的情况。

两种匹配理论都展示了许多发展方向。因为一个信号源系统的Fano和Youla 等效网络是用一个电阻器来表示的，故对复数信号源系统所加的限制就未在他们的论著中表现出来。因此，一种明显的推广就是需要研究频变信号源阻抗的情况。这项工作，最近由 Chien[7]和Satyanarayana[8]所完成，他们导出了用已知信号源和负载阻抗以及所要求的传输功率特性表示时，匹配网络可实现的充要条件。Chien 的条件在结构上保证了散射矩阵的物理可实现性，从而保证了所要求匹配网络的存在。均衡器的实际实现是利用散射矩阵，且应用别处导出的标准方法来进行设计。另一方面，Satyanarayana 的结果提供构成均衡器的直接方法。特别是，他说明了利用适当地选取某些正则全通函数，均衡器的末端阻抗首先实现成一个终端接1欧姆电阻器的无损耗双口网络的输入阻抗。然后，通过利用信号源阻抗来代替1欧姆的电阻器，于是人们便在信号源和负载之间得到了所要求的匹配网络。

此处的研究是上述工作的扩展与推广。其主要的区别是在负载上，它可以无源(或有源)且可互易。本文的目的是给出当工作在一个无源频变信号源阻抗和一个给定有源负载时，在整个频谱范围内得到所要求的传输功率增益特性时，均衡器存在的充要条件。

## 2.预备知识

在本节中，我们回顾和总结一下与本文讨论有关的基本定义和定理。

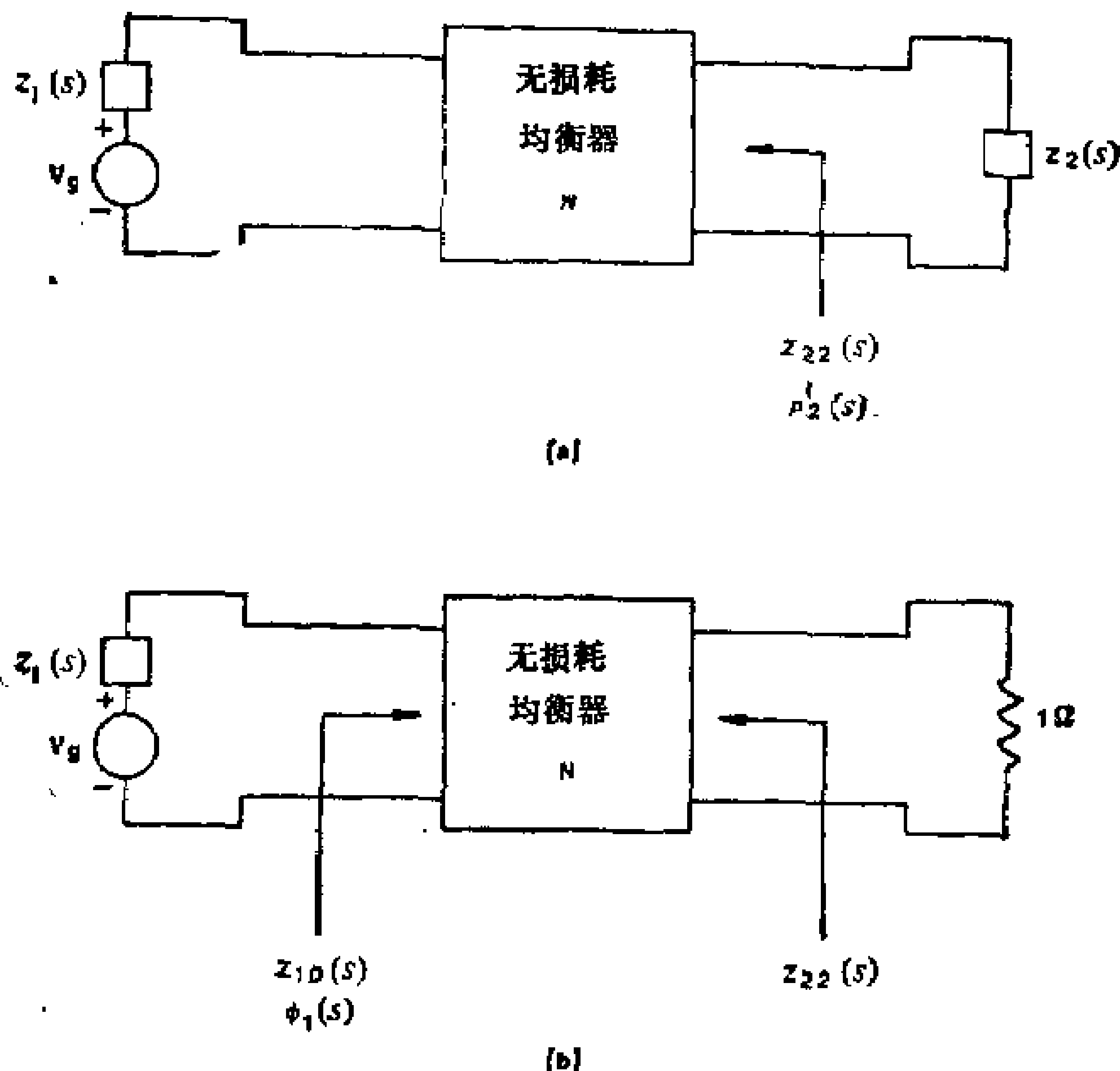



图1 用以研究在任意负载与无源信号源阻抗之间的宽带匹配问题的示意图

参看图1的示意图。任意而已知的信号源阻抗和负载阻抗用$z_1(s)$和$z_2(s)$来表示。当输入端连接$z_1(s)$时，从输出端看进去的阻抗用$z_{22}(s)$表示，$\rho_2^l(s)$是相对$z_2(s)$的以电流为基的反射系数。$z_{10}(s)$是当输出端连接1欧姆电阻器时，从输入端看进去的策动点阻抗，如图1(*b*)所示。$\phi_1(s)$是在输入端归一化到阻抗$z_1(s)$的反射系数。

$z_i(s)$ $(i=1,\ 2)$的偶部用下式表示：

$$r_i(s)=Ev z_i(s)=\frac{1}{2}[z_i(s)+z_i(-s)]=h_i(s)h_i(-s) \tag{1}$$

其中因式分解是使$h_i(s)$和$h_i^{-1}(-s)$在开右半复频平面内解析。我们可看出$h_i(s)/h_i(-s)$是实正则全通函数，其极点包括了$Z_i(s)$的开左半复频平面的所有极点。因此，它可以写成两个函数之乘积，其中一个是由$Z_i(-s)$的开右半复频平面的极点$a_j(j=1,2,\cdots v_i)$所定义的实正则全通函数，

$$A_i(s)=\prod_{j=1}^{v_i}\frac{s-a_j}{s+a_j},\quad i=1,\ 2 \tag{2}$$

另一个是由$r_i(s)$的开右半复频平面零点所定义的实正则全通函数$B_i(s)$，即

$$h_i(s)/h_i(-s)=A_i(s)B_i(s),\quad i=1,\ 2 \tag{3}$$

可观察到对于一个正实阻抗$z_i(s)$来说，$h_i(s)$和$h_i(-s)$在实频轴上是解析的，从(1)和(3)式

可知，

$$2h_i^*(s)=2r_i(s)A_i(s)B_i(s)=F_i(s)B_i(s) \tag{4}$$

其中

$$F_i(s)=2r_i(s)A_i(s),\ \ i=1,\ \ 2 \tag{5}$$

在我们的场合下，定义

$$R_{22}(s)=EvZ_{22}(s)=\frac{1}{2}[Z_{22}(s)+Z_{22}(-s)]=M_{22}(s)M_{22}(-s) \tag{6}$$

此处因式分解是使$M_{22}(s)$和$M_{22}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析。

对于一个给定的阻抗$z_i(s)$，函数$r(s)/z_i(s)$的$k_i$重闭右半复频平面零点 $s_{0i}$称为 $z_i(s)$的$k_i$阶传输零点。为方便起见，各传输零点可区分为下列 4 种互不相容的类型：

$$s_{0i}=\sigma_{0i}+j\omega_{0i}$$

第I类：$\sigma_{0i}>0$，它包含了所有开右半复频平面的传输零点。

第II类：$\sigma_{0i}=0$以及$z_i(j\omega_{0i})=0$

第III类：$\sigma_{0i}=0$和$0<|z_i(j\omega_{0i})|<\infty$

第IV类：$\sigma_{0i}=0$和$|z_i(j\omega_{0i})|=\infty$

研究图1(a)中的双口网络$N$，令$S_{ij}(s)$ ($i$，$j=1$，2)是其归一化到 $z_1(s)$和$z_2(s)$ 的复数归一化散射参数。因此我们有[9]

$$S_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s),\ \ i=1,\ \ 2 \tag{7}$$

其中

$$\rho_i(s)=A_i(s)\frac{Z_{ii}(s)-z_i(-s)}{Z_{ii}(s)+z_i(s)} \tag{8}$$

$Z_{22}(s)$和$Z_{11}(s)$是当输入端和输出端分别接$z_1(s)$和$z_2(s)$时，从输出端和输入端看进去的策动点阻抗。对于无源阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$来说，传输功率增益$G(\omega^2)$用$\rho_i(j\omega)$来表示：

$$G(\omega^2)=1-|S_{22}(j\omega)|^2=1-|S_{11}(j\omega)|^2=1-|\rho_i(j\omega)|^2 \tag{9}$$

$i=1,2$因此，为了研究与预给的无源阻抗$z_i(s)$相容的传输功率增益特性的类型，就只需研究有界实反射系数$\rho_i(s)$就足够。在本文中，有时为了利用引进因子$B_i(s)$ 而增加的附加自由度的优点，所以我们采用$S_{ii}=B_i(s)\rho_i(s)$是必要的。

**A．Youla的系数约束**

对$\rho_i(s)$的Youla系数约束，可用下列函数在传输零点$s_{0i}=\sigma_{0i}+j\omega_{0i}$处的罗朗级数展开式的系数来表示：

$$A_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{10a}$$

$$F_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{10b}$$

$$\rho_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{10c}$$

**对$\rho_i(s)$的基本系数约束。**对于$z_i(s)$的$k_i$阶传输零点$s_{0i}$来说，取决于$s_{0i}$的类型，必须满足下列 4 种系数条件之一：

(i) 第I类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,1,2\cdots,k_i-1$

(ii) 第II类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,1,2,\cdots,k_i-1$以及$(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})/F_{(k_i+1)i}\geqq 0$

(iii)第III类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,1,2,\cdots,k_i-2$以及$[A_{(k_i-1)i}-\rho_{(k_i-1)i}]/F_{k_i i}\geq 0$

(iV) 第IV类：$A_{xi}=\rho_{xi}$，$x=0,1,2,\cdots,k_i-1$以及$F_{(k_i-1)i}/(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})\geq a_{-1i}$，即$z_i(s)$在极点$j\omega_{0i}$处的留数

这些约束的重要性首先由Youla给出[5]且总结为下列定理。

**定理1.** 令$z_1(s)$是一个预给的、有理、非Foster型正实函数，$\rho_i(s)$是一个复变量$s$的实有理函数。则由下式所定义的函数

$$Z_{ii}(s)=\frac{F_i(s)}{A_i(s)-\rho_i(s)}-z_i(s),\quad i=1,2 \tag{11}$$

为正实函数的充要条件是$\rho_i(s)$满足基本系数约束的有界实反射系数。

**B. 相容性阻抗** 参看图1($a$)所示，令$Z_{22}(s)$和$z_1(s)$是两个正实阻抗。如果$Z_{22}(s)$可以实现为一个以$z_1(s)$为终端的无损耗、互易的双口网络N，则称$Z_{22}(s)$和$z_1(s)$是相容的。$Z_{22}(s)$和$z_1(s)$为相容的充要条件，首先由Wohlers[10]给出且总结为如下定理。

**定理2.** 两个非Foster型正实阻抗$Z_{22}(s)$和$z_1(s)$是相容的充要条件是：

1)在每一个$r_1(s)$的$m$阶的零点$s_0$处，

(i)如果$z_1(s)$在$s_0$处解析，则$s_0$作为$R_{22}(s)=\frac{1}{2}[Z_{22}(s)+Z_{22}(-s)]$的一个零点至少必须是$m$阶。

ii)如果$z_1(s)$在实频轴上的$s_0=j\omega_0$处为奇异，但$Z_{22}(s)$在此点并不为奇异，则$s_0$作为$R_{22}(s)$的一个零点必须至少是$m+2$阶，以及

(iii) 对于$R_e s_0>0$，作为$R_{22}(s)$和$r_1(s)$的零点$s_0$的阶数之和必须是偶整数。

2)存在一个实正则全通函数$\theta(s)$，使得由下式所定义的函数

$$y_{11e}(s)=\frac{1}{2h_1^2(s)}\left[\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}-\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}\theta^2(s)\right] \tag{12}$$

在开右半复频平面内解析，其中$r_1(s)=h_1(s)h_1(-s)$和$R_{22}(s)=M_{22}(s)M_{22}(-s)$，而$h_1(s)$，$h_1^{-1}(-s)$，$M_{22}(s)$和$M_{22}^{-1}(s)$在开右半复频平面内均解析，且

(i)如果$z_1(s)$在实频轴上的$s_0=j\omega_0$处解析，则$y_{11e}(s)$在$s_0$处最多是一个带正实留数的单阶极点；或

(ii)如果$z_1(s)$在$s_0=j\omega_0$处奇异，则

$$\operatorname*{limit}_{s\to j\omega_i} z_1(s)y_{11e}(s)$$

必须是一个小于或等于1的实数。

**C. Chan和Kuh的系数约束** 再参看图1($a$)的网络，其中$z_2(s)$是一个给定的集总、非Foster型阻抗，它可以是无源的或者是有源的。以输出电流为基的复反射系数由下式定义为，

$$\rho_2^I(s)=\frac{Z_{22}(s)-z_2(-s)}{Z_{22}(s)+z_2(s)} \tag{13}$$

由此得到

$$\rho_2^I(s)=\frac{Z_{22}(s)/z_2(s)-z_2(-s)/z_2(s)}{1+Z_{22}(s)/z_2(s)} \tag{14}$$

$$1-\rho_2^I(s)=\frac{z_2(s)+z_2(-s)}{Z_{22}(s)+Z_2(s)}=\frac{1+z_2(-s)/z_2(s)}{1+Z_{22}(s)/Z_2(s)} \tag{15}$$

$$Z_{22}(s)=\frac{z_2(s)+z_2(-s)}{1-\rho_2^I(s)}-z_2(s)=z_2(s)\frac{z_2(-s)/z_2(s)+\rho_2^I(s)}{1-\rho_2^I(s)} \quad (16)$$

用$s_r$表示$r_2(s)$的一个零点，$s_p$表示$z_2(s)$和$z_2(-s)$的闭右半复频平面的一个极点，下列函数在$s_i(s_p$，$s_r$或在其它频率点处)的罗朗级数展开式给出如下：

$$z_2(s)=a_{-m}(s-s_i)^{-m}+a_{-m+1}(s-s_i)^{-m+1}+\cdots+a_0+a_1(s-s_i)+\cdots \quad (17a)$$

$$z_2(-s)=b_{-n}(s-s_i)^{-n}+b_{-n+1}(s-s_i)^{-n+1}+\cdots+b_0+b_1(s-s_i)+\cdots \quad (17b)$$

$$-z_2(-s)/z_2(s)=c_{-k}(s-s_i)^{-k}+c_{-k+1}(s-s_i)^{-k+1}+\cdots$$

$$+c_0+c_1(s-s_i)+\cdots \quad (17c)$$

$$\rho_2^I(s)=d_{-e}(s-s_i)^{-e}+d_{-e+1}(s-s_i)^{-e+1}+\cdots+d_0+d_1(s-s_i)+\cdots \quad (17d)$$

$$Z_{22}(s)=k_{-1}(s-j\omega_i)^{-1}+k_0+\cdots \quad (17e)$$

其中$k_{-1}$是正实的。

**定理3.** 令$z_2(s)$是一个给定的有源或无源但为非Foster型的有理阻抗。则阻抗

$$Z_{22}(s)=\frac{z_2(s)+z_2(-s)}{1-\rho_2^I(s)}-z_2(s) \quad (18)$$

对于$R_e s\geqslant 0$，除了退化情况之外它是一个正实函数且$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq 0$。其中$Z_{22}(s)$和$z_2(s)$在实频轴上有公共的极点和公共零点，其充要条件是$\rho_2^I(s)$满足下列条件：

(a)在开右半复频平面内，除了在$r_2(s)$的一个$r$阶零点$s_r$，或$z_2(s)$的可能的极点之外，$1-\rho_2^I(s)$不为零点。后一种情况将包含在条件3中。在前一种情况下，

$$d_0=c_0=1 \quad (19a)$$

以及如果$z_2(s_r)$是奇异的，则

$$d_i=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r-1 \quad (19b)$$

如果$S_r$是$z_2(s)$的一个$m$阶极点，则

$$d_i=c_i=0,\quad i=1,2,\cdots,r+m-1 \quad (19c)$$

以及

$$d_i=c_i,\quad i=r+m,r+m+1,\cdots,r+2m-1 \quad (19d)$$

(b) 在实频轴上，函数$1-\rho_2^I(s)$ 必须在$j\omega_0$处有一个1阶零点，它既非$r_2(s)$的零点，也非$z_2(s)$之极点，因此

$$\rho_2^I(s)=1+d_1(s-j\omega_0)+\cdots \quad (20a)$$

其中$d_1$是实数且

$$\mathrm{Re}[z_2(j\omega_0)]/[-d_1]>0 \quad (20b)$$

在$r_2(s)$的一个$r$阶零点$j\omega_r$处，$d_0=c_0=1$，且若$z_2(j\omega_r)$为奇异时，

$$d_i=0,\quad i=1,2,\cdots,r-1 \quad (21a)$$

以及

$$d_{r-1}\neq 0\ (若为退化时) \quad (21b)$$

如果$j\omega_r$是一个$z_2(s)$的一个$m$阶极点的话，则

$$d_i=c_i=0,\quad i=1,2,\cdots,r+m-1 \quad (21c)$$

以及

$$d_i=c_i,\quad i=r+m,r+m+1,\cdots,r+2m-1 \quad (21d)$$

$$d_{r+2m-1}=c_{r+2m-1}-k_{-1}c_{r+m}/a_{-m}\ (若为退化时) \quad (21e)$$

其中$k_{-1}$是正实数。

2）在实频轴上，$|\rho_2^l(j\omega)|$满足下列条件：

$$|\rho_2^l(j\omega)|>1, \text{若} \mathrm{Re}z_2(j\omega)<0 \tag{22a}$$

$$|\rho_2^l(j\omega)|\leq 1, \text{若} \mathrm{Re}z_2(j\omega)\geq 0 \tag{22b}$$

3a）在开右半复频平面内，除在$s_p$之外，$\rho_2^l(s)$是解析的，$s_p$是$z_2(s)$的一个$m$阶极点以及是$z_2(-s)$的$n$阶极点（$m,n\geq 0$）。则

$$d_i=0, i<m-n-1 \tag{23a}$$

$$d_i=c_i, i=m-n, m-n+1, \cdots, w \tag{23b}$$

其中

$$w=2m-n+q, \text{若} m\geq n, c_{m-n}=1 \text{以及} c_{m-n+i}=0, \quad i=1,2,\cdots,q$$
$$=m-n, \text{若} m\geq n$$
$$=2m-n-1, \text{若} m<n$$

以及若$m=0$，上述第二个方程则不需要。

3b）在实频轴上，$\rho_2^l(s)$是解析的。在$s=j\omega_0$处，它是$z_2(s)$和$z_2(-s)$的一个$m$阶极点，若$m>1$，则

$$d_i=c_i, \quad i=0,1,\cdots,m-1 \tag{24a}$$

$$d_{m-1}=c_{m-1}+k_{-1}(1-c_0)/a_{-m} \text{（若为退化时）} \tag{24b}$$

以及若$c_0=1$和$c_i=0$或$i=1,2,\cdots,q$，则

$$d_i=c_i, \quad i=0,1,2,\cdots,m+q-1 \tag{24c}$$

$$d_{m+q}=c_{m+q}-k_{-1}c_{1+q}/a_{-m} \tag{24d}$$

以及若$m=1$，则

$$d_0=(c_0a_{-1}+k_{-1})/(a_{-1}+k_{-1}) \text{（若为退化时）} \tag{24e}$$

以及若$m=1$和$c_0=1$，则$d_0=c_0=1$以及

$$d_1=a_{-1}c_1/(a_{-1}+k_{-1}) \tag{24f}$$

其中$k_{-1}$是正实的。

**3.主要结果**

在本节中，我们给出当工作在一个给定的无源阻抗的电源和给定的无源（或有源）负载下，要得到所要求的传输功率增益特性时，一个无损耗的均衡器存在的充要条件。

如果$z_1(s)$和$z_2(s)$是无源和非Foster型，则由Satyanarayana和Chen[11]所导出的匹配理论可概括为下列步骤：

1）由负载$z_2(s)$得到施加于$\rho_2(s)$的约束；

2）确定一个满足于上述约束的可实现的$\rho_2(s)$。同时，幅值$|\rho_2(j\omega)|$必须在所要求的通带范围内保持一个尽可能小的常数。

3）得到一个无源阻抗$Z_{22}(s)$。

4）通过考虑$Z_{22}(s)$和$z_1(s)$之间的相容性而得到一些附加的约束。

在$z_2(s)$是有源的情况下，可以采用类似的方法。其主要区别如下：

1）在推导$\rho_2^l(s)$的约束时，必须考虑整个网络的稳定性。

2）在确定$|\rho_2^l(j\omega)|$时，其目标是得到一个在感兴趣的给定频带内近似得到一个尽可能大的常数幅值函数。

下列定理给出了这一问题的完整解答。

**定理4.** 令$z_1(s)$是一个预给的、有理的，非Foster型的正实函数和$z_2(s)$是一个预给的、

有理的、非Foster型的实函数，令$\rho_2^l(s)$和$\phi_1(s)$是$s$的实有理函数。则由下述关系所定义的函数：

$$Z_{22}(s)=\frac{z_2(s)+z_2(-s)}{1-\rho_2^l(s)}-z_2(s) \tag{25}$$

$$Z_{10}(s)=\frac{F_1(s)}{A_1(s)-\phi(s)}-z_1(s) \tag{26}$$

对于Res≥0时，除了退化情况之外，这是正实的，且$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq0$，$Z_{10}$可实现为以一个1欧姆电阻器为终端的无损耗双口互易网络$N$，如图2所示，以$z_1(s)$为终端的输出阻抗$Z''_{22}(s)$可以做得与$Z_{22}(s)$相等，其充要条件是满足下列二式：

1）$\rho_2^l(s)$ 满足定理3的条件1，2，和3。

2）存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得

$$\phi_1(s)=\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}B_1(s)\theta_0^2(s) \tag{27a}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\phi_{x1}(s-s_{01})^x \tag{27b}$$

是一个满足于第2$A$节中基本系数约束的有界实反射系数，令$i=1$，且在每一个$z_1(s)$的$k_1$阶传输零点$s_{01}$处用$\phi_{x1}$代替$\rho_{x1}$，其中

$$Z_{22}(s)+Z_{22}(-s)=2M_{22}(s)M_{22}(-s) \tag{28}$$

其中因式分解是使$M_{22}(s)$和$M_{22}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析。函数$A_1(s)$和$F_1(s)$唯一地由$z_1(s)$从（2）式和（5）式确定。

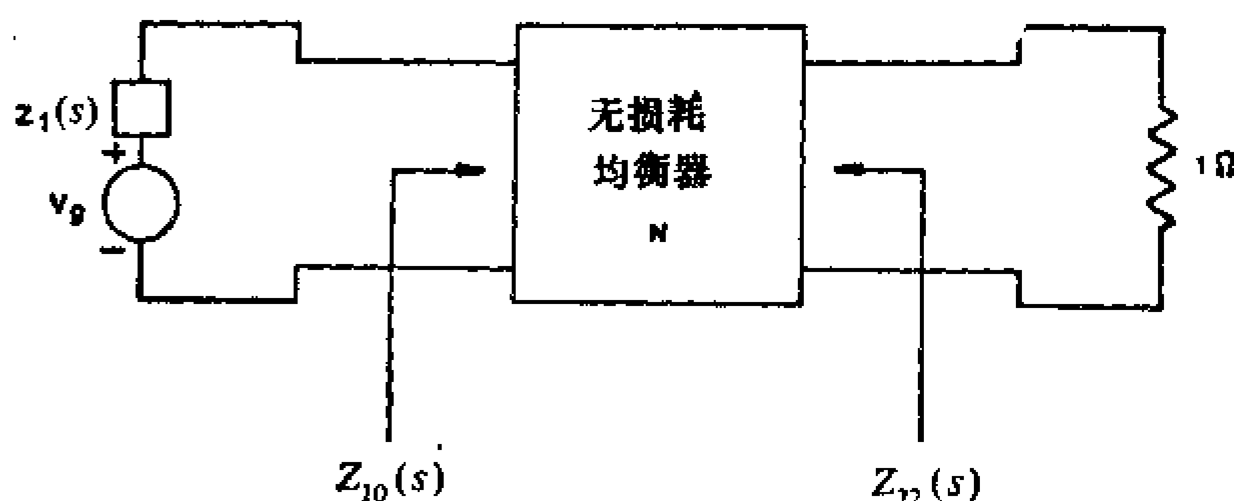



图2 研究宽带匹配的网络

证明：必要性。令$Z_{22}(s)$和$Z_{10}(s)$对于ReS≥0，除了退化情况外是一个正实函数，$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq0$，且令图1(b)的$N$是所要求的双口网络。则条件（1）直接从定理3而得到。从条件（2）令

$$\mathbf{S}(s)=\begin{bmatrix}S_{11}(s) & S_{12}(s)\\ S_{21}(s) & S_{22}(s)\end{bmatrix} \tag{29}$$

是$N$的归一化到下列基准阻抗矩阵的散射矩阵。

$$\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix}z_1(s) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{30}$$

可以看出，输出端口是归一化到1欧姆的电阻上而非归一化到$z_2(s)$上，如图2所示。仿照Wohlers[10]，我们能证明最普遍的散射参数$S_{ij}(s)$（$i,j=1,2$）由下式给出，它与所示出

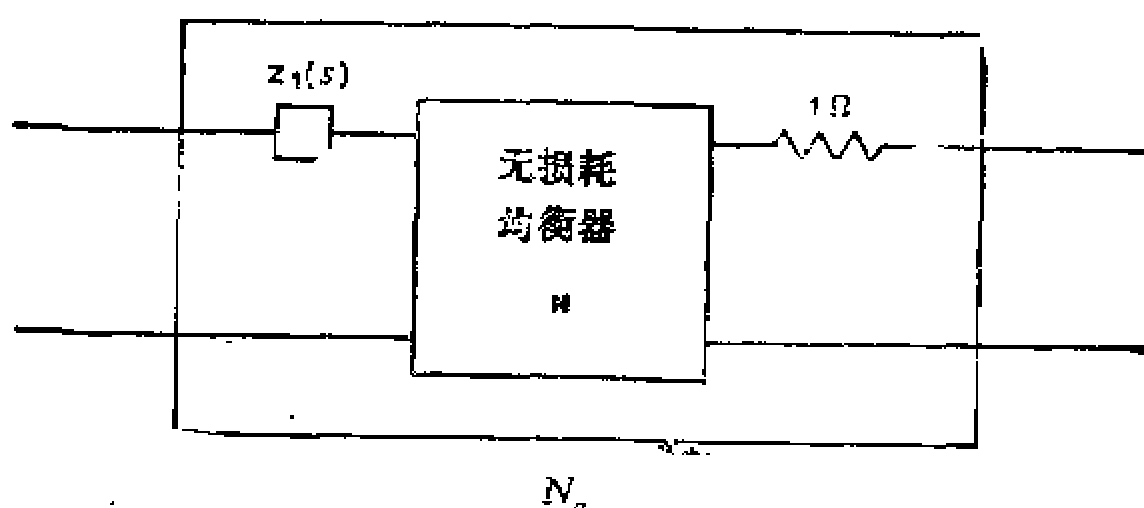
的归一化无损耗互易特性相一致。

$$S_{22}(s)=\frac{Z_{22}(s)-1}{Z_{22}(s)+1} \tag{31a}$$

$$S_{21}(s)=S_{12}(s)=\frac{2M_{22}(s)}{Z_{22}(s)+1}\theta(s) \tag{31b}$$

$$S_{11}(s)=\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}\theta^2(s) \tag{31c}$$

其中$\theta(s)$是实正则全通函数。




$N_a$

图3 增广的双口网络

研究图 3 的增广双口网络$N_a$，令

$$\mathbf{Y}_a(s)=\begin{bmatrix}y_{11a}(s) & y_{12a}(s)\\ y_{21a}(s) & y_{22a}(s)\end{bmatrix} \tag{32}$$

是$N_a$的导纳矩阵。$\mathbf{Y}_a(s)$的各元素可以用$\mathbf{S}(s)$的各元素表示如下：

$$y_{22a}(s)=\frac{1}{Z_{22}(s)+1} \tag{33a}$$

$$y_{12a}(s)=y_{21a}(s)=-\frac{M_{22}(s)}{h_1(s)}\cdot\frac{\theta(s)}{Z_{22}(s)+1} \tag{33b}$$

$$y_{11a}(s)=\frac{1}{2h_1^2(s)}\left[\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}-S_{11}(s)\right] \tag{33c}$$

其中$h_1(s)h_1(-s)=r_1(s)$由（1）式定义。把（31c）代入（33c）得到

$$y_{11a}(s)=H_1(s)/2h_1(s) \tag{34a}$$

其中

$$H_1(s)=\frac{1}{h_1(-s)}-\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}\cdot\frac{\theta^2(s)}{h_1(s)} \tag{34b}$$

为使$y_{11a}(s)$在开右半复频平面内解析，则$H_1(s)$必须在同一区域内解析，因此，必须存在一个实正则全通函数$\theta(s)$，使$H_1(s)$至少包含同阶的$h_1(s)$的开右半复频平面的所有零点。因为$h_1^{-1}(-s)$在开右半复频平面内解析，故它没有零点位于$h_1(s)$的开右半复频平面的零点处。同时（34b）右边的第二项必须在开右半复频平面内解析，且无零点位于$h_1(s)$的开右半复频平面的零点处。由此得到$[1-Z_{22}(-s)]M_{22}(s)/[1+Z_{22}(s)]M_{22}(-s)$除了$M_{22}(-s)$的开右半复频平面的零点之外，它在开右半复频平面内解析。其理由是(i) $M_{22}(-s)$包含了$Z_{22}(-s)$同阶的开右半复频平面的所有极点，(ii) $M_{22}(-s)$无零点位于$[1-Z_{22}(-s)]$的开右

半复频平面的零点处，(iii) $[1+Z_{22}(s)]$是正实的，它在闭右半复频平面内无零点。结果，我们断定对于在开右半复频平面内解析的$y_{11a}(s)$，其$\theta^2(s)$必须取以下形式：

$$\theta^2(s)=B_1(s)\theta_1(s)\theta_2^2(s) \tag{35}$$

其中$\theta_1(s)$和$\theta_2(s)$是实正则全通函数，$\theta_1(s)$包含了$M_{22}(-s)$或$R_{22}(s)$的所有开右半复频平面的零点，它们与$r_1(s)$的零点相重合，$\theta_2(s)$无零点位于$r_1(s)$的各零点处。

再从（33b）式，仅当$\theta(s)$包含了$h_1(s)$的开右半复频平面的至少是同阶的所有零点，则$y_{12a}(s)$在开右半复频平面内是解析的。因为$B_1(s)$是由$r_1(s)$的开右半复频平面的零点所定义的，所以全通函数$\theta(s)$必须取以下形式：

$$\theta^2(s)=B_1^2(s)\theta_0^2(s) \tag{36}$$

其中$\theta_0(s)$是实正则全通函数。把（36）式代入（31c）式得出：

$$S_{11}(s)=\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}\cdot B_1^2(s)\theta_0^2(s) \tag{37}$$

参看图2，复数归一化反射系数$S_{11}(s)$可以表示成：

$$S_{11}(s)=\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}\cdot\frac{Z_{10}(s)-z_1(-s)}{Z_{10}(s)+z_1(s)}=B_1(s)\phi_1(s) \tag{38}$$

其中从（26）式我们有

$$\phi_1(s)=A_1(s)\frac{Z_{10}(s)-z_1(-s)}{Z_{10}(s)+z_1(s)} \tag{39}$$

把（37）和（38）式合并得到

$$\phi_1(s)=\frac{1-Z_{22}(-s)}{1+Z_{22}(s)}\cdot\frac{M_{22}(s)}{M_{22}(-s)}\cdot B_1(s)\theta_0^2(s) \tag{40}$$

上式表明因为$S_{11}(s)$是有界实函数故$\phi_1(s)$是一个有界实函数，且取（40）式的形式。根据定理1，系数约束在$z_1(s)$的每一个传输零点处满足，因此，条件（2）是必要的。

充分性：假设条件1和2满足。我们证明对于$R_eS\geq0$时，除了退化情况之外，$Z_{22}(s)$和$Z_{10}(s)$是正实的，且$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq0$，并且所要求的图1的双口网络$N$存在。根据定理3，条件1意味着在$R_eS\geq0$时，$Z_{22}(s)$是正实的，且$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq0$。条件2说明$\phi_1(s)$是有界实函数，且满足2A节中的基本系数约束。从定理1，$Z_{10}(s)$是正实的。因此，$Z_{10}(s)$可以实现为终端接1欧姆的电阻器的无损耗互易双口网络$N$的策动点阻抗，如图2所示。问题的关键是要证明由（26）式所定义的阻抗$Z_{10}(s)$，利用一个相同的因子乘上分子和分母多项式进行增广，使所得的Darlington实现是以下列方式，即从1欧姆电阻器向左看的阻抗$Z_{22}''(s)$是（25）式的$Z_{22}(s)$，正如图2所示。

研究图2的可实现的双口网络$N$。令（29）式的矩阵$S(s)$是归一化到（30）式的基准阻抗矩阵的散射矩阵$z(s)$。因此，我们有

$$S_{11}(s)=\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}\cdot\frac{Z_{10}(s)-z_1(-s)}{Z_{10}(s)+z_1(s)} \tag{41}$$

因为$N$是无损耗和互易的，故其散射矩阵是酉矩阵和对称矩阵，这就导致

$$S_{12}(s)S_{12}(-s)=1-S_{11}(s)S_{11}(-s) \tag{42}$$

$$S_{22}(s)=-S_{11}(-s)S_{12}(s)/S_{12}(-s) \tag{43}$$

把（41）式代入（42）式得到

$$S_{12}(s)S_{12}(-s)=\frac{4R_{10}(s)r_1(s)}{[Z_{10}(s)+z_1(s)][Z_{10}(-s)+z_1(-s)]} \tag{44}$$

其中$R_{10}(s)=\frac{1}{2}[Z_{10}(s)+Z_{10}(-s)]$和$r_1(s)=\frac{1}{2}[z_1(s)+z_1(-s)]$，从而得到

$$S_{12}(s)=\frac{2M_{10}(s)m_1(s)}{Z_{10}(s)+z_1(s)}(\theta s) \tag{45}$$

其中 $R_{10}(s)=M_{10}(s)M_{10}(-s)$和$r_1(s)=m_1(s)m_1(-s)$，因式分解要使$M_{10}(s)$，$M_{10}^{-1}(s)$，$m_1(s)$和$m_1^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，$\theta(s)$是实正则全通函数。把（41），（43）和(45)式合并，得到

$$S_{22}(s)=-\frac{Z_{10}(-s)-z_1(s)}{Z_{10}(s)+z_1(s)}\cdot\frac{h_1(-s)}{h_1(s)}\cdot\frac{M_{10}(s)}{M_{10}(-s)}\cdot\frac{m_1(s)}{m_1(-s)}\theta^2(s) \tag{46}$$

从（26）式，$Z_{10}(s)$的偶部求得为：

$$R_{10}(s)=\frac{r_1(s)[1-\phi_1(s)\phi_1(-s)]}{[A_1(s)-\phi_1(s)][A_1(-s)-\phi_1(-s)]}=M_{10}(s)M_{10}(-s) \tag{47}$$

从而得到

$$M_{10}(s)=\frac{h_1(s)\phi_{12m}(s)}{A_1(s)-\phi_1(s)} \tag{48}$$

其中$\phi_{12m}(s)$表示下列函数的最小相位分解。

$$1-\phi_1(s)\phi_1(-s)=\phi_{12m}(s)\phi_{12m}(-s) \tag{49}$$

这一因式分解与$M_{10}(s)$和 $M_{10}^{-1}(-s)$ 在开右半复频平面内解析的要求是一致的。在第I类的$z_1(s)$的$k_1$阶的传输零点$s_{01}$中，$s_{01}$是$r_1(s)$，$h_1(s)$和$F_1(s)$ 的$k_1$ 阶零点。但是第一类的系数约束要求$s_{01}$至少是$k_1$阶的$A_1(s)-\phi_1(s)$的零点。从（26）式我们看到 $Z_{10}(s)+z_1(s)$ 是正实的，在开右半复频平面中无极点和零点，所以$s_{01}$恰好是$A_1(s)-\phi_1(s)$的$k_1$阶零点。因此$M_{10}(s)$和$M_{10}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，$\phi_{12m}(s)$必须是$1-\phi_1(s)\phi_1(-s)$ 的最小相位因式分解。

从（27a）式我们得到

$$1-\phi_1(s)\phi_1(-s)=\frac{4M_{22}(s)M_{22}(-s)}{[1+Z_{22}(s)][1+Z_{22}(-s)]}=\phi_{12m}(s)\phi_{12m}(-s) \tag{50}$$

其最小相位因式分解可求得为：

$$\phi_{12m}(s)=\frac{2M_{22}(s)}{1+Z_{22}(s)} \tag{51}$$

把（26）和（48）式代入（46）式连同（27a）和（51）式一起并考虑到$m_1(s)/m_1(-s)=A_1(s)B_1(-s)$，从而得到

$$\begin{aligned}S_{22}(s)&=\frac{Z_{22}(s)-1}{Z_{22}(s)+1}\cdot\frac{m_1(s)}{m_1(-s)}\cdot\frac{B_1(-s)}{A_1(s)}\cdot\theta_0^2(-s)\theta^2(s)\\&=\frac{Z_{22}(s)-1}{Z_{22}(s)+1}B_1^2(-s)\theta_0^2(-s)\theta^2(s)\end{aligned} \tag{52}$$

令$Y_a(s)$是图3的增广双口网络$N_a$的导纳矩阵。$Y_a(s)$的元素$y_{ij}(s)$可以用（41），（45）和（46）式的散射参数$S_{ij}(s)$表示成：

$$y_{22a}(s)=\frac{1}{2}[1-S_{22}(s)] \tag{53}$$

$$y_{12a}(s)=y_{21a}(s)=\frac{-M_{11}(s)m_1(s)}{h_1(s)[Z_{1t}(s)+z_1(s)]}\theta(s) \tag{54}$$

$$y_{11a}(s)=\frac{1}{Z_{10}(s)+z_1(s)} \tag{55}$$

为使$y_{12a}(s)$在开右半复频平面内解析，$\theta(s)$必须包含$z_1(s)$的第I类至少为同阶的传输零点。因为第I类的$z_1(s)$的传输零点也与$r_1(s)$的开右半复频平面的零点同阶，同时$B_1(s)$是由$r_1(s)$的开右半复频平面的零点所定义，所以全通函数$\theta(s)$可写成为：

$$\theta(s)=B_1(s) \tag{56}$$

把此式代入（52）式得到

$$S_{22}(s)=\frac{Z_{22}(s)-1}{Z_{22}(s)+1}\theta_0^2(-s) \tag{57}$$

正如Ho和Balabanian[12]所指出，在利用Darlington的方法实现之前，如果$Z_{10}(s)$利用相同的因子$(s+s_1)^n$乘上分子和分母多项式而进行增广，则所得的反射系数$\hat{S}_{22}(s)$将从下列的$S_{22}(s)$而得到，即

$$\hat{S}_{22}(s)=S_{22}(s)\frac{(-s+s_1)^n}{(s+s_1)^n} \tag{58}$$

此处$S_{22}(s)$是由$Z_{10}(s)$未增广时而直接得到的。

因此，如果$Z_{10}(s)$是用与$\theta_0^2(s)$之相应的同阶零点进行增广的话，我们便得到一种新的实现，其输出反射系数为$\bar{S}_{22}(s)$。

$$\bar{S}_{22}(s)=S_{22}(s)\theta_0^2(s)=\frac{Z_{22}(s)-1}{Z_{22}(s)+1} \tag{59}$$

众所周知，如果$Z''_{22}(s)$表示新实现网络从1欧姆电阻器向左看进去的输出阻抗的话，如图2所示，则规一化到1欧姆电阻器的输出反射系数为

$$\widetilde{S}_{22}(s)=\frac{Z''_{22}(s)-1}{Z''_{22}(s)+1} \tag{60}$$

上式表明$Z''_{22}(s)=Z_{22}(s)$，定理证毕。

这一结果的意义在于，它可用来在任意负载（它可以是有源或无源）与无源频变信号源阻抗$z_1(s)$之间得到一般匹配问题的解答：给定一个无源频变信号源阻抗$z_1(s)$，有源或无源负载阻抗$z_2(s)$，以及预给的传输功率增益$G(\omega^2)$，我们首先从$G(\omega^2)$确定满足定理3的三个条件的可实现的输出反射系数$\rho_2^i(s)$。从（25）式根据定理3计算$Z_{22}(s)$，要保证在$\mathrm{Re}\,s>0$时，它是正实的，而且$Z_{22}(s)+z_2(s)\neq 0$，然后我们确定一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得如（27a）所定义的$\phi_1(s)$是有解实函数且满足2.4节中基本系数约束。最后，我们计算(26)式的$Z_{10}(s)$，它保证是正实的。为了构成所要求的匹配网络，$Z_{10}(s)$实现为终端接1欧姆的电阻器的无损耗互易双口网络$N$的策动点阻抗，如图2所示。如果从1欧姆电阻器向左看进去的阻抗$Z''_{22}(s)$是$Z_{22}(s)$，则双口网络$N$就是所要求的匹配网络。另一方面，如果$Z''_{22}(s)\neq Z_{22}(s)$，则$Z_{10}(s)$可利用相同的因子乘上分子和分母而进行增广，使所得的Darlington实现中从1欧姆电阻器看进去的阻抗是$Z_{22}(s)$。则用新的Darlington实现的双口网络就是所要求

的匹配网络。

## 结　论

在本文中，我们把宽带匹配理论推广到包含有无源或有源阻抗及频变信号源阻抗的情况。主定理叙述了关于复数输出反射系数的充要条件。其结果可以应用到当工作在一个给定的无源信号源阻抗和给定的有源或无源负载下，为得到所要求的传输功率增益特性，确定了无损耗均衡器存在的充要条件。详细的设计方法和说明性的例子将在另一篇论文中给出。

## 参 考 文 献


[1] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1945.

[2] R. M. Fano, "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances," *J. Franklin Inst.*, Vol. 249, pp. 57-83 and 139-154, 1950.

[3] D. C. Youla, "On scattering matrices normalized to complex port numbers," *Proc. IRE*, Vol. 49, p. 1221, 1961.

[4] D. C. Youla, "An extension of the concept of scattering matrix," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 310-312, 1964.

[5] D. C. Youla, "A new theory of broad-band matching," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-11, pp. 30-50, 1964.

[6] Y. T. Chan and E. S. Kuh, "A general matching theory and its application to tunnel diode amplifiers," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, pp. 6-18, 1966.

[7] T. M. Chien, "A theory of broadband matching of a frequency-dependent generator and load," *J. Franklin Inst.*, Vol. 298, pp. 181-221, 1974.

[8] C. Satyanarayana, "A general theory of broadband matching," Ph. D. dissertation, Ohio University, Athens, Ohio, March 1975.

[9] W. K. Chen, *Theory and Design of Broadband Matching Networks*, Pergamon Press, Cambridge, England, 1976.

[10] M. R. Wohlers, "Complex normalization of scattering matrices and the problem of compatible impedances," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 528-535, 1965.

[11] C. Satyanarayana and W. K. Chen, "Theory of broadband matching and the problem of compatible impedances," *J. Franklin Inst.*, Vol. 309, pp. 267-280, 1980.

[12] C. W. Ho and N. Balabanian, "Synthesis of active and passive compatible impedances," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-14, pp. 118-128, 1967.

# 三十、宽带匹配一般理论


## 摘　要

本文给出了在给定信号源阻抗和负载阻抗以及预给传输功率增益特性时，当一个无损耗的互易均衡器在两个给定阻抗之间工作，欲得到所要求的传输功率增益特性，这一均衡器存在的充要条件。本方法的意义在于这种均衡器的实现问题仅仅涉及到Darlington 理论的策动点综合问题。


**1．引言**

在一个负载（由一个电容器和一个电阻器的并联电路而构成）和一个电阻性的信号源之间设计一个最佳的均衡器使之匹配的问题首先由Bode[1]进行过研究。Fano[2]推广了Bode的工作，并且用十分一般的方法解决了在一个任意无源负载和电阻性信号源之间的阻抗匹配问题。但是，Fano的方法存在着两个主要的缺点，当利用Darlington等效网络代替负载阻抗，其某些性质转换为相应的Darlington等效网络时，导致了结构的复杂化，其次这一方法不易应用于有源负载的情况。基于复数归一化原理[3，4]，Youla[5]导出了一种新理论而避开了这一困难。Chan和Kuh[6]考虑了有源负载从而推广了这一理论。另一种解决匹配问题的方法是由Rohrer[7]所提出的。

在许多实际情况下，可供使用的电子信号源，特别在高频时并不是纯电阻性的。因此，在设计级间耦合网络时，例如，所涉及到的各级之间的输出阻抗和输入阻抗便不能用一个纯电阻来近似。在这种情况下，正如Ku和Peterson[8]所指出，设计一个无损耗的均衡器，使其工作在两个任意的无源阻抗之间从而进行匹配是必要的。Fielder[9]沿着这条研究路线较早地进行了这一工作，他研究了在任意负载和电阻性信号源之间通过插入一个预给的无损耗梯形网络来进行宽带匹配的问题，但其所研究的负载的Darlington 等效网络仅仅局限于终端接一个电阻器的情况。这个问题的一般解答是由Chien[10]在最近给出的，他提出了一个在用预给传输功率增益特性表示时，散射矩阵存在的充要条件。所要求的匹配网络可通过任何已知的方法，用实现散射矩阵的方法而得到。但对于这一点，就其本身来说，并不是一件简单的事情。

本文的目的是给出在两个任意的无源阻抗之间的一般匹配理论。这一理论避开了要用到信号源和负载阻抗的Darlington等效网络这一要求。均衡器的实现仅仅包含了Darlington理论的策动点综合问题。

**2．初步研究**

在图1的双口网络$N$中，令$z_1(s)$和$z_2(s)$是两个无源、非Foster型终端阻抗。可写成：

$$r_i(s)=[z_i(s)+z_i(-s)]/2=h_i(s)h_i(-s)\quad i=1,\ 2 \tag{1}$$

此处因式分解是使得$h_i(s)$和$h_i^{-1}(-s)$在$s$的开右半复频平面（$RHS$）内解析。* 我们看出

* 这就要求$h(s)$的所有零点限制在闭右半复频平面内和所有的极点限制在开左半复频平面内。

$h_i(s)/h_i(-s)$是一个实正则全通函数，其极点包括了$z_i(s)$的所有开左半复频平面的极点。因此，它可写成两个函数之乘积，其中一个是由$z_i(-s)$的开右半复频平面的极点$a_j(j=1, 2, \cdots, v_i)$所定义的实正则全通函数$A_i(s)$，即

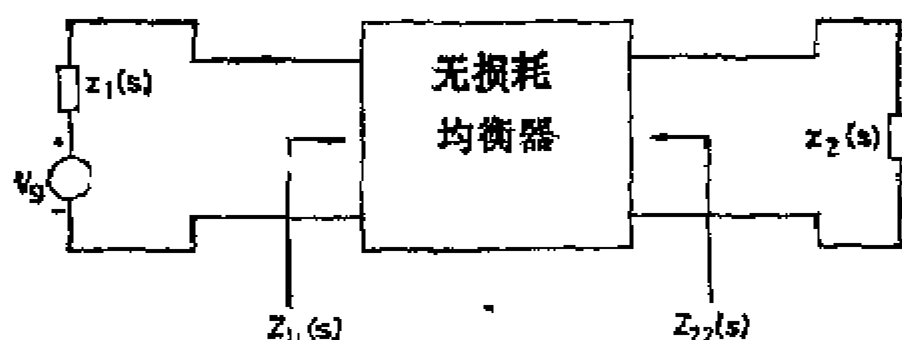



图1 为研究任意信号源和负载之间进行宽带匹配问题的示意图

$$A_i(s)=\prod_{j=1}^{v_i}\frac{s-a_j}{s+a_j}\qquad \mathrm{Re}\,a_j\geqslant 0,\ i=1,\ 2 \tag{2}$$

另一个是由$r_i(s)$的开右半复频平面的零点所定义的实正则全通函数$B_i(s)$，即

$$h_i(s)/h_i(-s)=A_i(s)B_i(s) \tag{3}$$

可观察到，对于在实频轴上的正实函数$z_i(s)$、$h_i(s)$和$h_i(-s)$是解析的，从(1)和(3)式，得到：

$$2h_i{}^2(s)=2r_i(s)A_i(s)B_i(s)=F_i(s)B_i(s) \tag{4}$$

其中

$$F_i(s)=2r_i(s)A_i(s)\quad i=1,\ 2 \tag{5}$$

正如众所周知，在输入端和输出端分别归一化到终端阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$的反射系数$S_{11}(s)$和$S_{22}(s)$在文献[3]中表示成：

$$S_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s)\quad i=1,\ 2 \tag{6}$$

其中

$$\rho_i(s)=A_i(s)\frac{Z_{ii}(s)-z_i(-s)}{Z_{ii}(s)+z_i(s)} \tag{7}$$

$Z_{22}(s)$和$Z_{11}(s)$分别当输入端口和输出端口终端接$z_1(s)$和$z_2(s)$时，从输出端口和输入端口看进去的策动点阻抗（见图1）。因为双口网络N是无损耗的，* 则传输功率增益$G(\omega^2)$可通过下列关系用$\rho_1(j\omega)$来表示：

$$\begin{aligned}G(\omega^2)&=1-|S_{22}(j\omega)|^2=1-|S_{11}(j\omega)|^2\\&=1-|\rho_i(j\omega)|^2\quad i=1,\ 2\end{aligned} \tag{8}$$

因此，为了研究此类与具有预给负载阻抗$z_i(s)$相容的传输功率增益特性，则研究其有界实反射系数$\rho_i(s)$即足够。有时我们还发现，贯穿于本文中，为了利用引入因子$B_i(s)$而产生的附加自由度的优点，采用$S_{ii}(s)=B_i(s)\rho_i(s)$的表示是必要的。

对于一个给定的阻抗$z_i(s)$来说，函数$r_i(s)/z_i(s)$的$k_i$重闭右半复频平面零点$s_{oi}$称为$z_i(s)$的$k_i$阶传输零点。传输零点通常分为4种互不相容的类型：令$s_{oi}=\sigma_{oi}+j\omega_{oi}$，决定于$\sigma_{oi}$和$z_i(s_{oi})$，$s_{oi}$则属于下列各种类型之一：

---

* 包括了理想变压器。

第$I$类

$\sigma_{oi}>0$

它包括了所有开右半复频平面的传输零点。

第$II$类

$\sigma_{oi}=0$和$z_i(j\omega_{oi})=0$

第$III$类

$\sigma_{oi}=0$和$0<|z_i(j\omega_{oi})|<\infty$

第$IV$类

$\sigma_{oi}=0$和$|z_i(j\omega_{oi})|=\infty$

对于每一个$z_i(s)$的传输零点$s_{oi}$，研究下列函数在$s_{oi}$处的罗朗级数展开式*：

$$A_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}A_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{9}$$

$$F_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}F_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{10}$$

$$\rho_i(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho_{xi}(s-s_{0i})^x \tag{11}$$

**对$\rho_i(s)$的基本约束**

对于$z_i(s)$（$i=1$，2）的每一个$k_i$阶传输零点$s_{0i}$，取决于$s_{0i}$的类别，必须满足系数条件的4种集合之一：

第$I$类：

$$A_{xi}=\rho_{xi},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1 \tag{12a}$$

第$II$类：

$$A_{xi}=\rho_{xi},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1$$

以及

$$(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})/F_{(k_i-1)i}\geqslant 0 \tag{12b}$$

第$III$类：

$$A_{xi}=\rho_{xi},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-2$$

以及

$$[A_{(k_i-1)i}-\rho_{(k_i-1)i}]/F_{k_i i}\geqslant 0 \tag{12c}$$

第$IV$类：

$$A_{xi}=\rho_{xi},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_i-1$$

以及

$$F_{(k_i-1)i}/(A_{k_i i}-\rho_{k_i i})\geqslant a_{-1i} \tag{12d}$$

$a_{-1i}$是$z_i(s)$在极点$j\omega_{0i}$处所算得的留数。

这些系数约束的重要性首先由Youla[5]给出，且总结为下列定理。

**定理1.**

令$z_i(s)$是一个预给的、有理、非Foster型正实函数，$\rho_i(s)$是复变量$s$的实、有理函数。则由下列关系所定义的函数

* 实际是台劳级数展开式，此处我们采用更普遍的罗朗级数展开式则可适用于传输零点在无穷远处的情况。

$$Z_{ii}(s) \equiv \frac{F_i(s)}{A_i(s)-\rho_i(s)} - z_i(s) \quad i=1,\ 2 \tag{13}$$

是正实函数的充要条件是$\rho_i(s)$为满足基本约束(12)式的有界实反射系数，其中$A_i(s)$和$F_i(s)$由(2) 和(5) 式给出，且由$z_i(s)$所唯一确定。

**3．一般理论**

如图1所示，给定两个任意非Foster型正实阻抗$z_1(s)$和$z_2(s)$ 作为信号源内阻抗和负载阻抗，且对于所有实数$\omega$，以1为界的实、有理函数 $G(\omega^2)$ 作为传输功率增益特性，我们的主要目标是在$z_1(s)$和$z_2(s)$之间插入一个无损耗互易的双口匹配网络以实现给定的 $G(\omega^2)$，研究这一匹配网络存在的条件，此外，若存在这种网络的话，设法使其实现。

再次参看图1的网络。令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$ 是两个正实阻抗。如果$Z_{11}(s)$ 可实现为一个终端接$z_2(s)$的无损耗双口网络的策动点阻抗，则称$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的。相容性阻抗首先由Schoeffler[11]，Wohlers[12]以及Ho和Balabanian提出。Schoeffler和Wohlers研究了正实阻抗的问题，Ho和Balabanian把他们的结果推广到这些阻抗可以为无源或为有源的情况。我们注意到，在相容性阻抗问题中，$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是规定的，而在匹配问题中，传输功率增益特性$G(\omega^2)$ 以及终端阻抗$z_1(s)$ 和$z_2(s)$ 是预给的。因此，在前一种情况下，$Z_{11}(s)$ (因而$\rho_1(s)$)归一化到一个选定的阻抗时，它们是固定的。在后一情况下，我们利用在$\rho_1(s)$中引入开右半复频平面内的零点，则可自由改变$Z_{11}(s)$。因为$G(\omega^2)$和$\rho_1(j\omega)$是通过 (8) 式而建立联系的，所以相容性阻抗问题可认为是宽带匹配问题的一种特殊情况。

下面，我们来叙述用系数约束[14]表示时，两个无源阻抗相容的充要条件。

定理2.

令$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是预给的、有理、非Foster型正实函数。则$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$ 是相容的充要条件是存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得由下列关系式所定义的函数

$$\phi_2(s) \equiv \frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)} \times \frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)} B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{14a}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \phi_{x2}(s-s_{02})^x \tag{14b}$$

是满足系数约束 (12) 式的有界实反射系数，此处在$i=2$时，在$z_2(s)$ 的$k_2$阶传输零点处用$\phi_{x2}$代替$\rho_{x2}$，其中

$$R_{11}(s) = \{Z_{11}(s)+Z_{11}(-s)\}/2 = M_{11}(s)M_{11}(-s) \tag{15}$$

$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析。* 函数$A_2(s)$、$B_2(s)$和$F_2(s)$如 (2)、(3) 和(5) 式给出，且由$z_2(s)$所唯一确定，它们三者在$s_{02}$处的展开式在 (9)、(10) 式中给出。

此外，如果$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的，则由下式所定义的阻抗函数

$$Z_{22}(s) \equiv \frac{F_2(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)} - z_2(s) \tag{16}$$

可利用相同的因子乘上分子与分母多项式而进行增广，使得所得的阻抗函数可实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗双口网络的策动点阻抗，从1欧姆电阻器向右看的输入阻抗就是所要求的$Z_{11}(s)$，即$Z_{11}''(s) = Z_{11}(s)$ (见图2)。

* 这就要求$M_{11}(s)$的所有零点要限制在闭左半复频平面内，而所有的极点则限制在开左半复频平面内。

这一定理的证明可在文献[14]中找到。

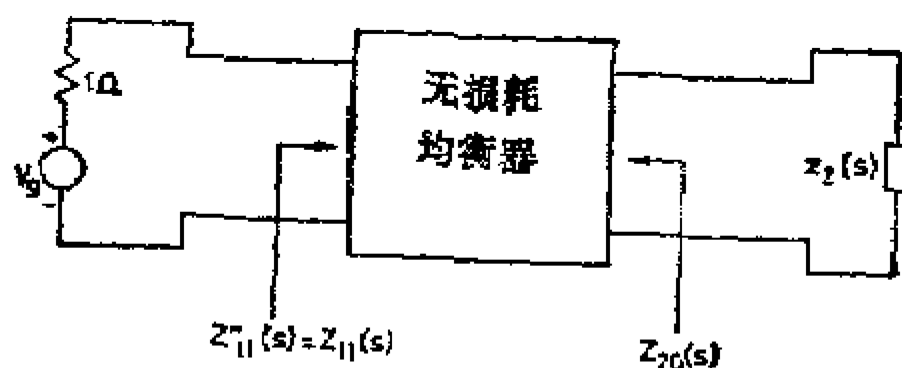



图2　终端接电阻性信号源和无源负载阻抗的无损耗双口网络

在一个频带内具有预给的传输功率增益特性，对两个无源阻抗进行宽带匹配的方法之基本思想可简单地概括如下。

从一个预给的传输功率增益特性$G(\omega^2)$出发，利用解析延拓理论得到$G(-s^2)$，且形成有界实反射系数。

$$\rho_1 \equiv \pm\eta(s)\rho\ (s) \tag{17}$$

且由此而得

$$\rho_1(s)\rho_1(-s)=1-G(-s^2)=\rho_m(s)\rho_m(-s) \tag{18}$$

其中$\eta(s)$是一个任意实正则全通函数，$\rho_m(s)$是$1-G(-s^2)$的最小相位因式分解，若$\eta(s)$存在，则确定$\eta(s)$，使其满足系数约束（12）式（$i=1$）。从定理1，正如（13）式所定义，函数$Z_{11}(s)$是正实函数。对于图1的双口网络$N$若$Z_{11}(s)$存在，则它必须与$z_2(s)$相容。根据定理2，这就等价于利用选取适当的实正则全通函数。$\theta_0(s)$，从而构成一个（14a）式的有界实反射系数$\phi_2$，使其满足有关的系数约束。如果没有这种$\theta_0(s)$存在，则$G(\omega^2)$在物理上就是不可实现的。我们以定理的形式给出本文的主要结果。

**定理3**

给定两个非Foster型正实有理函数$z_1(s)$和$z_2(s)$以及偶有理函数$G(\omega^2)$，$0\leqslant G(\omega^2)\leqslant 1$，对所有的实频变量$\omega$，有理函数$A_i(s)$，$B_i(s)$和$F_i(s)$，$i=1$，2和$\rho_m(s)$是由（2）、（3）和（5）式所唯一确定，其中$\rho_m(s)$是$1-G(-s^2)$的最小相位因式分解。则在具有内阻抗为$z_1(s)$的信号源和负载阻抗$z_2(s)$之间工作，要得到传输功率增益$G(\omega^2)$，则存在一个无损耗、互易双口网络的充要条件是：

（i）存在一个实正则全通函数$\eta(s)$，使得由下式所定义的函数

$$\rho_1(s)\equiv\pm\eta(s)\rho_m(s) \tag{19}$$

在$z_1(s)$的每一个$k_1$阶传输零点处，是一个满足系数约束（12）式的有界实函数，此处$i=1$。

（ii）存在一个实正则全通函数$\theta_0(s)$，使得由下列函数所定义的函数

$$\phi_2(s)\equiv\frac{1-Z_{11}(-s)}{1+Z_{11}(s)}\times\frac{M_{11}(s)}{M_{11}(-s)}B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{20a}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\phi_{x2}(s-s_{02})^x \tag{20b}$$

在$z_2(s)$的每一个$k_2$阶的传输零点$s_{02}$处，是一个满足系数约束（12）式的有界实函数，此处$i=2$，且用$\phi_{x2}$代替$\rho_{x2}$，其中$\{Z_{11}(s)+Z_{11}(-s)\}/2=M_{11}(s)M_{11}(-s)$，$M_{11}(s)$和$M_{11}^{-1}(s)$在开右半复频平面内解析，且

$$Z_{11}(s)=\frac{F_1(s)}{A_1(s)-\rho_1(s)}-z_1(s) \tag{21}$$

证明：

**必要性**：令图 3 的双口网络$\widetilde{N}$实现了传输功率增益特性$G(\omega^2)$。令$\widetilde{S}_{11}(s)$是 $N$ 的归一化到$z_1(s)$ 的输入反射系数。

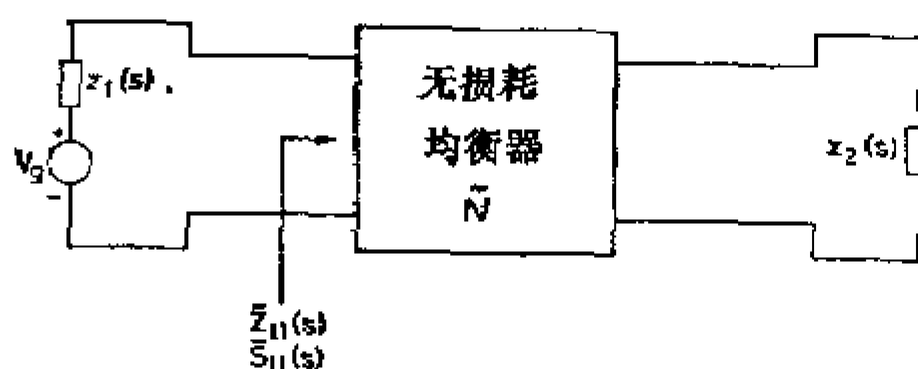



图3 具有预给传输功率增益特性的无损耗双口网络

因此，对于所有的$\omega$，我们有：

$$|\rho_1(j\omega)|^2=|\rho_m(j\omega)|^2=1-G(\omega^2)$$

$$=|\widetilde{S}_{11}(j\omega)|^2\leqslant 1 \tag{22}$$

这表明$\widetilde{S}_{11}(s)$和$\rho_m(s)$只差一个实正则全通函数$\eta_1(s)$，或

$$\widetilde{S}_{11}(s)=\pm\eta_1(s)\rho_m(s) \tag{23}$$

如同(6) 和(7) 式，终端接$z_2(s)$的输出端口的输入阻抗$\widetilde{Z}_{11}(s)$可表示为：

$$\widetilde{Z}_{11}(s)=\frac{F_1(s)}{A_1(s)-B_1(-s)\widetilde{S}_{11}(s)}-z_1(s) \tag{24}$$

因为$\widetilde{Z}_{11}(s)$是正实的，则从定理1，函数

$$B_1(-s)\widetilde{S}_{11}(s)=\pm B_1(-s)\eta_1(s)\rho_m(s) \tag{25}$$

必须是有界实函数，这意味着$\eta_1(s)$ 必须包含作为其一个因子的$B_1(s)$，或某一个实正则全通函数$\eta(s)$，即

$$\eta_1(s)=\eta(s)B_1(s) \tag{26}$$

从而得到：

$$B_1(-s)\widetilde{S}_{11}(s)=\pm\eta(s)\rho_m(s)=\rho_1(s) \tag{27}$$

且条件(i) 直接从定理1而得到。从(21)，(24)和(27) 式，我们有$\widetilde{Z}_{11}(s)=Z_{11}(s)$。这一结论与$\widetilde{Z}_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的一起表明，再从定理(2)知，条件 (ii) 是必要的。

充分性：假设条件(i)和(ii)满足。我们将证明所要求的双口网络存在。从条件(i)和定理1，(21) 式的$Z_{11}(s)$是正实函数和为非Foster型。在$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是非Foster型和为正实函数时，从条件 (ii) 和定理2，$Z_{11}(s)$和$z_2(s)$是相容的，而且由 (16) 式所定义的阻抗$Z_{22}(s)$可利用将相同的因子乘上其分子与分母多项式而进行增广，使所得的函数可以实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗互易双口网络$N$的策动点阻抗，以$z_2(s)$为输出端，从1欧姆电阻器看进去的输入阻抗是$Z_{11}(s)$，如图2所示。我们说明了这一双口网络$N$，当其工作在如图1 所示的一个内阻抗为$z_1(s)$的信号源和一个负载阻抗之间时，将得到传输功率增益特性$G(\omega^2)$。

为了看清这一点，令$S_{11}(s)$是$N$的归一化到阻抗$z_1(s)$上的输入反射系数，因此我们有：

$$S_{11}(s)=\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}\frac{Z_{11}(s)-z_1(-s)}{Z_{11}(s)+z_1(s)} \tag{28}$$

把(21)式代入(28)式，连同(3)、(5)和(19)式一起，得到：

$$S_{11}(s)=B_1(s)\rho_1(s)=\pm\eta(s)B_1(s)\rho_m(s) \tag{29}$$

图1的网络的传输功率增益可以表示为：

$$\begin{aligned}1-|S_{11}(j\omega)|^2&=1-|\rho_1(j\omega)|^2\\&=1-|\rho_m(j\omega)|^2=G(\omega^2)\end{aligned} \tag{30}$$

定理证毕。

在信号源阻抗$z_1(s)$为纯电阻的情况下，定理3退化为众所周知的Youla[5]的结果。

**推论1**

给定一个非Foster型、正实、有理函数$z_2(s)$以及一个实频变量$\omega$的有理偶函数$G(\omega^2)$，对所有的实频变量$\omega$，$0\leqslant G(\omega^2)\leqslant 1$，有理函数$A_2(s)$，$B_2(s)$，$F_2(s)$和$\rho_m(s)$是由(2)、(3)和(5)式所唯一确定的，其中$\rho_m(s)$是$1-G(-s^2)$的最小相位解，则存在一个无损耗的互易双口网络，当它工作于一个内阻为$R_1$的信号源和负载阻抗为$z_2(s)$之间时，欲得到要求的传输功率增益$G(\omega^2)$，其充要条件是存在一个实正则全通函数$\xi(s)$，使得由下式所定义的函数：

$$\phi_2(s)\equiv\pm\xi(s)\rho_m(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\phi_{x2}(s-s_{02})^x \tag{31}$$

是一个满足系数约束(12)式的有界实函数，此处$i=2$，在$z_2(s)$的每一个$k_2$阶传输零点$s_{02}$处，用$\phi_{x2}$代替$\rho_{x2}$。

证明：

在定理3中，令$z_1(s)=R_1$。则条件(i)总是满足的，且(21)式的$Z_{11}(s)$变为：

$$Z_{11}(s)=\frac{1+\rho_1(s)}{1-\rho_1(s)} \tag{32}$$

其偶部可得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ev}Z_{11}(s)&=\frac{1-\rho_1(s)\rho_1(-s)}{[1-\rho_1(s)][1-\rho_1(-s)]}\\&=\frac{G(-s^2)}{[1-\rho_1(s)][1-\rho_1(-s)]}\end{aligned} \tag{33}$$

从而得到：

$$M_{11}(s)=\frac{\rho_{12m}(s)}{1-\rho_1(s)} \tag{34}$$

此处$\rho_{12m}(s)$是$G(-s^2)=\rho_{12m}(s)\rho_{12m}(-s)$的最小相位解。把(32)和(34)式代入(20a)式，连同(19)式一起，得到：

$$\phi_2(s)=\pm\eta(-s)\rho_m(-s)B_2(s)\theta_0^2(s)\rho_{12m}(s)/\rho_{12m}(-s) \tag{35}$$

现在我们可以写成：

$$\rho_m(-s)/\rho_m(s)=\xi_1(s)\xi_2(-s) \tag{36a}$$

$$\rho_{12m}(s)/\rho_{12m}(-s)=\xi_3(s)\xi_4(-s) \tag{36b}$$

此处$\xi_1(s)$,$\xi_2(s)$，$\xi_3(s)$和$\xi_4(s)$分别是由$\rho_m(-s)$的开右半复频平面零点，$\rho_m(-s)$的开右半复频平面的极点，$\rho_{12m}(-s)$的开右半复频平面极点以及$\rho_{12m}(-s)$的开右半复频平面零点所定义的实正则全通函数。如果存在一个满足定理3的条件(ii) 的$\theta_0(s)$，则$\theta_0(s)$必须包括$\eta(s)$，$\rho_m^{-1}(-s)$和$\rho_{12m}(-s)$的开右半复频平面的零点，或对某个实正则全通函数$\theta_1(s)$，有

$$\theta_0(s)=\eta(s)\xi_2(s)\xi_4(s)\theta_1(s) \tag{37}$$

把(36)、(37)式代入(35)式，得到带下列$\xi(s)$的(31)式：

$$\xi(s)=\xi_1(s)\xi_2(s)\xi_3(s)\xi_4(s)B_2(s)\eta(s)\theta_1^2(s) \tag{38}$$

另一方面，如果推论的条件均满足，我们选取下列实正则全通函数：

$$\eta(s)=\xi_1(s)\xi_2(s)\xi_3(s)\xi_4(s)B_2(s)\xi(s) \tag{39a}$$

$$\theta_0(s)=\xi_2(s)\xi_4(s)\xi(s) \tag{39b}$$

把(36)和(39)式代入(35)式，得到：

$$\phi_2(s)=\pm\xi(s)\rho_m(s) \tag{40}$$

上式表明定理3的条件(ii)即是本推论的条件，推论证毕。

**4. 综合方法**

在定理3中，我们指出，如有必要的话，(16)式的函数$Z_{20}(s)$可以进行增广，使所得的函数可用Darlington理论实现为一个终端接1欧姆电阻器的无损耗双口网络$N$的策动点阻抗。在输出端接以给定的负载$z_2(s)$时，从1欧姆电阻器看过去的输入阻抗就是(21)式的$Z_{11}(s)$，这一点总是可能的，因为从定理1，阻抗

$$Z_{20}(s)=\frac{F_2(s)}{A_2(s)-\phi_2(s)}-z_2(s) \tag{41}$$

是正实函数。一种增广的方法由Ho和Balabanian[13]给出。双口网络$N$是所要求的匹配网络，当它在一个内阻抗为$z_1(s)$的信号源和负载$z_2(s)$之间工作时，得到预给的功率增益$G(\omega^2)$。在信号源阻抗$z_1(s)$是纯电阻的情况下，$Z_{20}(s)z_1(s)$的增广是不必要的。为了看清这一点，我们在(41)式中求解$\phi_2(s)$且得到：

$$\phi_2(s)=A_2(s)\frac{Z_{20}(s)-z_2(-s)}{Z_{20}(s)+z_2(s)}=\frac{S_{22}(s)}{B_2(s)} \tag{42}$$

此处$S_{22}(s)$是归一化到双口网络$N$(不用乘增广因子而从$Z_{20}(s)$直接实现的)的$z_2(s)$的输出反射系数，则终接网络的传输功率增益变为：

$$\begin{aligned}1-|s_{22}(j\omega)|^2&=1-|\phi_2(j\omega)|^2\\&=1-|\rho_m(j\omega)|^2=G(\omega^2)\end{aligned} \tag{43}$$

这正是所要求的。

为了计算的目的，把(20a)中的$M_{11}(s)$显式地进行表示是方便的。我们来计算$Z_{11}(s)$的偶部，从而得到：

$$R_{11}(s)=\frac{r_1(s)G(-s^2)}{\{A_1(s)-\rho_1(s)\}\{A_1(-s)-\rho_1(-s)\}} \tag{44}$$

它可以因式分解而得到

$$M_{11}(s)=\frac{h_1(s)\rho_{12m}(s)}{A_1(s)-\rho_1(s)} \tag{45}$$

其中$\rho_{12m}(s)$和以前一样，表示$G(-s^2)$的最小相位因式分解。把(21)和(45)式代入(20a)得到

$$\phi_2(s)=\frac{h_1(s)}{h_1(-s)}\times\frac{\rho_{12m}(s)}{\rho_{12m}(-s)}$$
$$\times\frac{A_1(-s)\{1-z_1(s)\}-\rho_1(-s)\{1+z_1(-s)\}}{A_1(s)\{1+z_1(-s)\}-\rho_1(s)\{1-z_1(s)\}}B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{46}$$

如果$z_1(s)\neq 1$，则(46)式可以写成：

$$\phi_2(s)=\frac{\rho_{12m}(s)}{\rho_{12m}(-s)}\frac{1-\rho_1(-s)f(s)}{f(s)-\rho_1(s)}B_1(s)B_2(s)\theta_0^2(s) \tag{47}$$

其中

$$f(s)=\frac{1+z_1(-s)}{1-z_1(s)}A_1(s) \tag{48}$$

我们将用下列例子来说明上述结果。

例1.我们希望设计一个均衡器以使图4中的信号源和负载相匹配，其具有的参数为：

$R_1=1\Omega$，$R_2=1\Omega$，$C_1=2F$，$C_2=0.25F$

该均衡器要求达到3阶低通巴特沃思传输功率增益特性：

$$G(\omega^2)=\frac{K_3}{1+(\omega/\omega_c)^6}\qquad 0\leqslant K_3\leqslant 1 \tag{49}$$

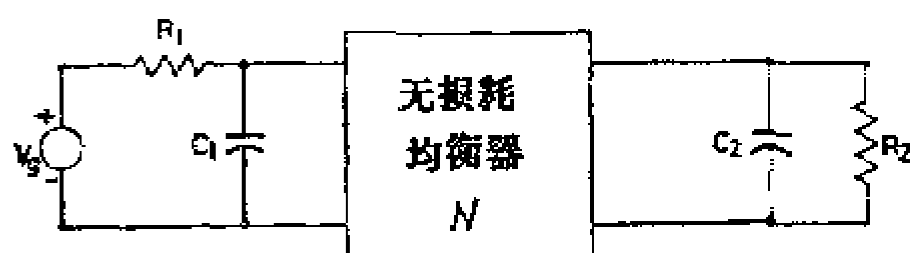



图4 要求匹配的两个并联RC网络的无损耗双口网络

所具有的3分贝带宽的最大直流增益为$K_3$，$\omega_c=1$弧/秒。

信号源阻抗和负载阻抗可得到为：

$$z_1(s)=\frac{1}{2s+1},\quad z_2(s)=\frac{4}{s+4} \tag{50}$$

从而得到

$$r_1(s)=\frac{-1}{4s^2-1},\quad r_2(s)=\frac{-16}{s^2-16} \tag{51}$$

因此，$z_1(s)$和$z_2(s)$均在无穷远处拥有第Ⅱ类1阶传输零点或$k_1=k_2=1$和$s_{01}=s_{02}=\infty$，其它一些需求的函数，利用在$s_{01}=s_{02}=\infty$处的罗朗级数的展开，可算出如下：

$$A_1(s)=\frac{2s-1}{2s+1}=1-\frac{1}{s}+\frac{0.5}{s^2}+\cdots \tag{52a}$$

$$A_2(s)=\frac{s-4}{s-4}=1-\frac{8}{s}+\frac{32}{s^2}+\cdots \tag{52b}$$

$$F_1(s)=\frac{-2}{(2s+1)^2}=0+0-\frac{0.5}{s^2}+\cdots \tag{53a}$$

$$F_2(s)=\frac{-32}{(s+4)^2}=0+0-\frac{32}{s^2}+\cdots \tag{53b}$$

且$B_1(s)=B_2(s)=-1$。借助于解析延拓理论，(49) 和(18)式可写成：

$$G(-s^2)=\frac{K_3}{1-s^6}=\rho_{12m}(s)\rho_{12m}(-s) \tag{54}$$

$$\rho_1(s)\rho_1(-s)=\rho_m(s)\rho_m(-s)=\alpha^6\frac{1-y^6}{1-s^6} \tag{55}$$

其中$\alpha^6=1-K_3$和$y=s/\alpha$。(54)和(55)式的最小相位解为：

$$\rho_{12m}(s)=\frac{\sqrt{K_3}}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{56}$$

$$\rho_m(s)=\alpha^3\frac{y^3+2y^2+2y+1}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{57}$$

把(17) 式中的任意正则全通函数$\eta(s)$可写成：
对于某个整数$b$，

$$\eta(s)=\prod_{i=1}^{b}\frac{s-\rho_i}{s+\rho_i}\qquad Re\quad \rho_i\geqslant 0 \tag{58}$$

把(57)和(58)式代入(17)式得到：

$$\pm\rho_1(s)=\eta(s)\rho_m(s)=\left[\prod_{i=1}^{b}\frac{s-\rho_i}{s+\rho_i}\right]$$

$$\frac{s^3+2\alpha s^2+2\alpha^2 s+\alpha^3}{s^3+2s^2+2s+1}=1-\frac{2\left[1-\alpha+\sum_{i=1}^{b}\rho_i\right]}{s}+\cdots \tag{59}$$

对于$k_1=1$，由$z_1(s)$所加的第II类约束（即(12b)式中令$i=1$）变为：

$$A_{01}=\rho_{01} \tag{60}$$

$$\frac{A_{11}-\rho_{11}}{F_{21}}\geqslant 0 \tag{61}$$

为了满足 (60) 式的约束，我们必须选取(59)或(19)式中的正号，因为$A_{01}=1$，从(52a)、(53a)和(59)式，约束(61)式变为：

$$2(1-K_3)^{1/6}\geqslant 1+2\sum_{i=1}^{b}\rho_i \tag{62}$$

因此，为使$K_3$最大，我们对所有的$i$，令$\rho_i=0$，从而得到：

$$K_{3,max}=63/64 \tag{63}$$

且从(56)和(57)式，我们得到(54)和(55)式的最小相位解为：

$$\rho_{12m}(s)=\frac{\sqrt{63}/8}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{64}$$

$$\rho_m(s)=\frac{s^3+s^2+s/2+1/8}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{65}$$

且$\rho_1(s)=\rho_m(s)$。将这些式子代入(47)式，得到：

$$\phi_2(s)=\frac{4s^2-3s-1}{4s^2+9s+8}\theta_0^2(s) \tag{66}$$

其中

$$f(s)=1-1/s \tag{67}$$

如同在(58)式那样，实正则全通函数$\theta_0(s)$可显式地表示为：对于某一个整数$c$，

$$\theta_0(s)=\prod_{i=1}^{c}\frac{s-q_i}{s+q_i} \qquad \text{Re} \quad q_i\geqslant 0 \tag{68}$$

利用（66）式中的$\theta_0(s)$，$\phi_2(s)$可在$s_{02}=\infty$处展成罗朗级数为：

$$\phi_2(s)=\phi_{02}+\frac{\phi_{12}}{s}+\cdots=1-\frac{3+4\sum_{i}^{c}q_i}{s}+\cdots \tag{69}$$

对于$k_2=1$的情况，由$z_2(s)$所加给的第II类约束，方程(12b)($i=2$)变为：

$$A_{02}=\phi_{02} \tag{70}$$

$$\frac{A_{12}-\phi_{12}}{F_{22}}\geqslant 0 \tag{71}$$

约束(70)式总是满足的。从(52b)、(53b)和(69)式，约束(71)式变为：

$$5\geqslant 4\sum_{i}^{c}q_i \tag{72}$$

为简单起见，对所有的$i$，选取$q_i=0$，从而得到$\theta_0(s)=1$以及

$$\phi_2(s)=\frac{4s^2-3s-1}{4s^2+9s+8} \tag{73}$$

这就表明定理3的条件（i）和(ii)是满足的，故可以综合所要求的均衡器。

为了实现这一均衡器，我们从(41)式计算阻抗函数$Z_{20}(s)$，且得到为：

$$Z_{20}(s)=\frac{4(12s^2+57s+36)}{(s+4)(20s^2+15s+28)}=\frac{48s+36}{20s^2+15s+28}$$

$$=\cfrac{1}{5s/12+\cfrac{1}{12s/7+9/7}} \tag{74}$$

可看出它是一个终端接一个电阻器的无损耗梯形网络。所要求的匹配网络示于图5。在我们的场合下，我们重新计算从$z_1(s)$看进去的输入阻抗$Z''_{11}(s)$：

$$Z''_{11}(s)=\frac{8s^2+12s+7}{3(2s+3)}=Z_{11}(s) \tag{75}$$

其中$Z_{11}(s)$由(21)式定义。

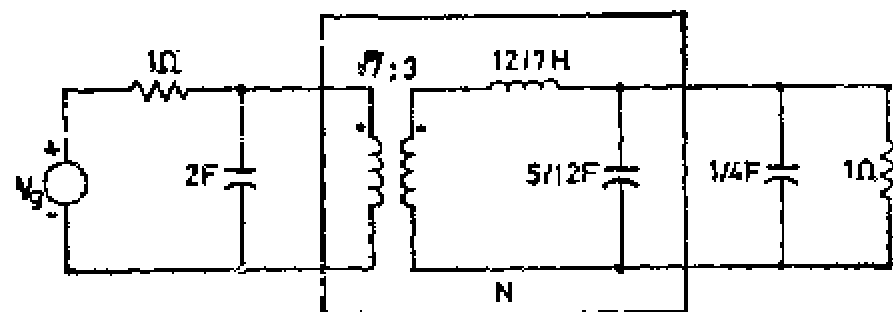



图5 例1中所得到的无损耗均衡器

## 结　论

已给出了一个无损耗互易均衡器存在的充要条件，它工作在一个具有给定的内阻抗的信号源和给定负载之间时，得到预给的传输功率增益特性。这一结果的意义在于避开了需得到信号源与负载阻抗的Darlington等效网络的要求，也避免了实现复数归一化散射矩阵的要求，因为就这一点来说也并不是一件简单的事情。在此处的方法中，均衡器的实现仅仅涉及到Darlington理论的策动点阻抗的综合问题。

利用宽带匹配理论来进行设计的方法和说明性的例子，将在另文中叙述。尤其是，我们将导出几种在实际信号源和负载之间实现任意阶的巴特沃思和切比雪夫传输功率增益特性的增益-带宽制约关系。

## 参　考　文　献


〔1〕BODE, H. W., Network analysis and feedback amplifier design, (Van Nostrand, Princeton, 1945)

〔2〕FANO, R. M., Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances, *J. Franklin Inst.*, 1950, 249, pp. 57-83 and 139-154。

〔3〕CHEN, W.K., Theory and design of broadband matching networks, (Pergamon Press, 1976)

〔4〕YOULA, D. C., An extension of the concept of scattering matrix, *IEEE Trans.*, 1964, CT-11, pp. 310-312

〔5〕YOULA, D. C., A new theory of broad-band matching, *ibid.*, 1964, CT-11, pp. 30-50

〔6〕CHAN, Y. T., and KUH, E. S.: 'A general matching theory and its applications to tunnel diode amplifiers, *Ibid.*, 1966, CT-13, pp. 6-18

〔7〕ROHRER, R.A., Optimal matching: A new approach to the matching problem for real linear time-invariant one-port networks', *Ibid.*, 1968, CT-15, pp. 118-124

〔8〕KU, W.H., and PETERSEN, W. C.: 'Optimum gain-bandwidth limitations of transistors amplifiers as reactively constrained active two-port networks', *Ibid.*, 1975, CAS-22, pp. 523-533

〔9〕FIELDER, D.C., Broadband matching between load and source systems, *IRE Trans.*, 1961, CT-8, pp. 138-153

〔10〕CHIEN, T.M., A theory of broadband matching of a frequency-dependent generator and load-Part I: Theory', *J. Franklin Inst.*, 1974, 298, pp. 181-199、

# 附录：陈惠开教授出版物的总目录

（书籍，论文、特邀论文、会议论文）


A. BOOKS

W.K. Chen; Applied Graph Theory. New York: American Elsevier Publishing Co.; and Amsterdam, The Netherlands:
North-Holland Publishing Co., 481 pp., 207 illustrations; 1971.

W.K. Chen, Theory and Design of Broadband Matching Networks. Oxford, England: Pergamon Press, 432 pp., 129 illustrations, 1976.
Russian translation. Moscow, Russia: Soviet Academy of Science; 288 pp., 1979.
Chinese translation. Chengdu, Sichuan, China: The People's Posts and Telecommunications Publishing Co., 384 pp., 1982.

W.K. Chen, Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks. New York: American Elsevier Publishing Co., and Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing Co.; 542 pp., 228 illustrations, Second Revised Edition, 1976.

W.K. Chen, Active Network and Feedback Amplifier Theory. New York: McGraw-Hill Book Co.; and Washington, D.C.:
Hemisphere Publishing Corps.; 494 pp., 297 illustrations, 1980. The book was selected by Electronics and Control Engineers' Book Club as December 1980 alternate selection.

W.K. Chen; Linear Networks and Systems, Monterey, Calif.:
Brooks/Cole Publishing Co., 712 pp., 334 illustrations, 1983.

W.K. Chen; Passive and Active Filters: Theory and Implementations. New York: John Wiley & Sons, 504 pp., 408 illustrations, 1986.

W.K. Chen, Solutions Manual. New York: John wiley & Sons; 139 pp.; 1986.

W.K. Chen, Theory of Nets. John wiley & Sons; 1987.

Contributing Author

S. P. Chan (editor), Network Topology and Its Engineering Applications Taipei, Taiwan: National Taiwan University press; 302 pp., 1975. Chapter 5; "The Order of Complexity and Unique Solvability of Linear Networks, "by W.K. Chen; pp.187-230.

M. Grayson (editor); Kirk/Othmer Encyclopedia of Chemical Technology. New York: Wiley-Interscience, Third Edition."Dimensional Analysis, "by W.K. Chen; Vol. 7; pp. 751-767; 1979.

W.W. Happ (editor); Preparing the planning Report.
Transportation and Distribution Division, American Institute of Industrial Engineers, 1977.

M. Grayson (editor), Kirk/Othmer Concise Encyclopedia of Chemical Technology. New York: Wiley-Interscience; "Dimensional Analysis; "by W.K. Chen; pp. 360-361, 1985.

B. Papers

1964

1. W.K. Chen; "On Signal-Flow Graphs; "Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers; Vol. 52; No. 8; p. 967, August 1964.
2. W.K. Chen; "The Inversion of Matrices by Flow Graphs; "Journal of the Society for Ind-

ustrial and Applied Mathematics, Vol. 12, No. 3, pp. 676-685, September 1964.

1965

3. W.K. Chen, "Topological Analysis for Active Networks," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-12, No. 1, pp. 85-91, March 1965.
4. W.K. Chen, "Flow Graphs: Some Properties and Methods of Simplification," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-12, No. 1, pp. 128-130, March 1965.
5. W.K. Chen, "Matrix Graphs and Bipartite Graphs," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-12, No. 2, pp. 268-269, June 1965.
6. W.K. Chen, "On the Modifications of Flow Graphs," Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 2, pp. 493-505, June 1965.
7. W.K. Chen, "Comment on the Flowgraph Evaluation of the Characteristic Polynomial of a Matrix," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-12, No. 3, P. 435, September 1965.

1966

8. W.K. Chen, "Boolean Matrices and Switching Nets," Mathematics Magazine, Vol. 39, No. 1, pp. 1-8, January 1966.
9. W.K.Chen, "On Directed Trees and Directed K-Trees of a Digraph and Their Generation," SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 14, No. 3, pp. 550-560, May 1966.
10. W.K.Chen, "On the Realization of a (p, s)-Digraph with Prescribed Degrees," Journal of the Franklin Institute, Vol. 281, No. 5, pp. 406-422, May 1966.
11. W.K. Chen, "On the Realization of Directed Trees and Directed 2-Trees," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-13, No.2, pp. 230-232, June 1966.
12. W.K. Chen, "Note on Topological Analysis for Active Networks," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-13, No. 4, pp. 438-439, December 1966.
13. W K. Chen, "A Generalization of the Equicofactor Matrix," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. 13, No. 4, pp. 441-442, December 1966.

1967

14. W. K. Chen, "On Flow Graph Solutions of Linear Algebraic Equations," SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 15, No. 1, pp. 136-142, January 1967.
15. W. K. Chen, "A Note on Topological Network Analysis by Algebraic Method," Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, (London), Vol. 114, No. 1, pp. 86-88, January 1967.
16. W. K. Chen, "Distributed Amplification: A New Approach," IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. ED-14, No. 4, pp. 215-221, April 1967.
17. W. K. Chen, "Hamilton Circuits in Directed-Tree Graphs," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-14, No. 2, pp. 231-233, June 1967.
18. W. K. Chen, "Distributed Amplifiers: Survey of the Effects of Lumped-Transmission-Line Design on Performance," Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, (London), Vol. 114, No. 8, pp. 1065-1074, August 1967.
19. W. K. Chen, "On Directed Graph Solutions of Linear Algebraic Equations," SIAM Review, Vol. 9, No. 4, pp. 692-707, October 1967.
20. W. K. Chen, "Unified Theory on Topological Analysis of Linear Systems," Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, (London), Vol. 114, No. 11, pp. 1630-1636, November 1967.

1968

21. W. K. Chen, "Inverse of a Laplace Transform," SIAM Review, Vol. 10, No. 2, pp. 224-225, April 1968.
22. W. K. Chen, "On Unisignants and Their Evaluation," SIAM Journal on Applied Mathem-

atics, Vol. 16, No. 3, pp. 603-619, May 1968.

23. W. K. Chen, "The Insertion of an Extra Section into the Networks of a Distributed Amplifier," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-15, No. 2, pp. 152-156, June 1968.
24. W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen, and N. Deo, "Generation of Complete Trees," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-15, No. 2, pp. 101-105, June 1968.
25. W. K. Chen, "Theory and Design of Transistor Distributed Amplifiers," IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol SC-3, No. 2, pp. 165-179, June 1968.
26. W. K. Chen, "Generation of Trees by Algebraic Method," Electronics Letters, Vol. 4, No. 21, pp. 456-457, October 1968.
27. W. K. Chen, "Iterative Procedure for Generating Trees and Directed Trees," Electronics Letters, Vol. 4, No. 23, pp. 516-518, November 1968.

1969

28. W. K. Chen and C. H. Cheng, "Transient Responses of Distributed Amplifiers Using Bridged-T Filter Sections," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 1, pp. 105-117, February 1969.
29. W. K. Chen, "The Effects of Grid Loading on the Gain and Phase-Shift Characteristics of a Distributed Amplifier," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 1, pp. 134-137, February 1969.
30. W. K. Chen and S. K. Mark, "On the Algebraic Relationships of Trees, Cotrees, Circuits and Cutsets of a Graph," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 2, pp. 176-184, May 1969.
31. W. K. Chen, "Theory and Design of Distributed Amplifiers," International Journal of Electronics, Vol. 26, No. 5, pp. 405-421, May 1969.
32. W. K. Chen, "Conversion of an Arbitrary Node into a Source Node in a Flow Graph," Electronics Letters, Vol. 5, No. 15, pp. 338-339, July 1969.
33. W. K. Chen, "On Generation of Trees without Duplications," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 57, No. 7, pp. 1292-1293, July 1969.
34. W. K. Chen, "Transient Responses of Conventional Distributed Amplifiers," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 3, pp. 394-397, August 1969.
35. W. K. Chen, "Unified Theory on the Generation of Trees of a Graph Part I. The Wang Algebra Formulation," International Journal of Electronics, Vol. 27, No. 2, pp. 101-117, August 1969.
36. W. K. Chen, "A Physical Interpretation of the Multiple-Node Removal Algorithm of a Flow Graph," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 57, No. 9, pp. 1691-1692, September 1969.
37. W. K. Chen and F. Y. Chen, "Topological Analysis of a Class of Lumped Vibrational Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 10, No. 2, pp. 198-207, September 1969.
38. W. K. Chen, "Generation of Trees and Cotrees of a Graph by Decomposition," Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, (London), Vol. 116, No. 10, pp. 1639-1643, October 1969.
39. W. K. Chen, "Unified Theory on the Generation of Trees of a Graph Part II. The Matrix Formulation," International Journal of Electronics, Vol. 27, No. 4, pp. 319-336, October 1969.
40. W. K. Chen, "Computer Generation of Trees and Cotrees in a Cascade of Multi-Terminal Networks," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 4, pp. 518-526, November 1969.
41. W. K. Chen, "Modification of Topological Formulas for Active Two-Port Networks," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 57, No. 12,

pp. 2166-2167, December 1969.

1970

42. W. K. Chen, "On the Nonsingular Submatrices of the Incidence Matrix of a Graph over the Real Field," Journal of the Franklin Institute, Vol. 289, No. 2, pp. 155-166, February 1970.
43. W. K. Chen and K. J. Barker, "Distributed Amplifiers with Paired-Plate Connection," International Journal of Electronics, Vol. 28, No. 4, pp. 319-326, April 1970.
44. W. K. Chen, "Graph-Theoretic Considerations on the Invariance and Mutual Relations of the Determinants of the Generalized Network Matrices and Their Generalized Cofactors," Quarterly Journal of Mathematics, (Oxford), Second Series, Vol. 21, No. 4, pp. 459-479, December 1970.

1971

45. W. K. Chen, "On d-Invariant Transformations of (p, s)-Digraphs," Journal of the Franklin Institute, Vol. 291, No. 2, pp. 89-100, February 1971.
46. W. K. Chen, "On Vector Spaces Associated with a Graph," SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 20, No. 3, pp. 526-529, May, 1971.
47. W. K. Chen and I. C. Goyal, "Tables of Essential Complementary Partitions," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, No. 5, pp. 562-563, September 1971.
48. W. K. Chen, "Topological Invariance of Electrical Networks," The Matrix and Tensor Quarterly, Vol. 22, No. 1, pp. 11-21, September 1971.
49. W. K. Chen, "Unified Theory on the Generation of Trees of a Graph Part III. Decomposition and Elementary Transformations," International Journal of Electronics, Vol. 31, No. 4, pp. 301-319, October 1971.
50. W. K. Chen, "Algebraic Theory of Dimensional Analysis," Journal of the Franklin Institute, Vol. 292, No. 6, pp. 403-422, December 1971.

1972

51. W. K. Chen, "Codifying Trees and Multitrees of a Complete Graph," Journal of the Franklin Institute, Vol. 293, No. 1, pp. 11-23, January 1972.
52. W. K. Chen, "Characterizations of Complete Directed Trees and Two-Trees," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-19, No. 3, pp. 241-247, May 1972.
53. W. K. Chen, "Topological Formulations and the Order of Complexity of Active Networks: A Unified Survey," Networks: An International Journal, Vol. 2, No. 3, pp. 237-260, 1972.
54. W. K. Chen, "On Matrices and Compositive Graphs of Active Networks," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-19, No. 5, pp. 510-511, September 1972.
55. W. K. Chen, "On Equicofactor and Indefinite-Admittance Matrices," The Matrix and Tensor Quarterly, Vol. 23, No. 1, pp. 26-28, September 1972.

1973

56. W. K. Chen and H. C. Li, "Computer Generation of Directed Trees and Complete Trees," International Journal of Electronics, Vol. 34, No. 1, pp. 1-21, January 1973.
57. W. K. Chen, "On Equivalence of Realizability Conditions of a Degree Sequence," IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 3, pp. 260-262, May 1973.
58. W. K. Chen, "The Scattering Matrix and the Passivity Condition," The Matrix and Tensor Quarterly, Vol. 24, No. 1, pp. 30-32, September 1973 and No. 2, pp. 74-75, December 1973.
59. W. K. Chen, "The Inverse of a Laplace Transform in Electrical Filter Theory," SIAM Review, Vol. 15, No. 4, pp. 790-792, October 1973.

1974

60. W. K. Chen and F. N. T. Chan, "On the Unique Solvability of Linear Active Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-21, No. 1, pp. 26-35, January 1974.
61. W. K. Chen, "Graph-Theoretic Considerations on the Invariance of the Return Difference," Journal of the Franklin Institute, Vol. 298, No. 2, pp. 81-100, August 1974.
62. W. K. Chen, "The Inverse Laplace Transform of a Function of the m-Derived Filters," International Journal of Circuit Theory and Applications, Vol. 3, No. 2, pp. 223-230, September 1974.
63. W. K. Chen, "Applications and Realizability of Degree Sequences of Directed Graphs without Parallel Edges and Self-Loops," The Matrix and Tensor Quarterly, Vol. 24, No. 4, pp. 123-130, June 1974 and Vol. 25, No. 1, pp. 1-7, September 1974.

1975

64. W. K. Chen, "On the Minimum-Phase Reflection Coefficient in Broadband Equalizers," International Journal of Electronics, Vol. 39, No. 3, pp. 357-360, March 1975.
65. W. K. Chen, "Relationships between Scattering Matrix and Other Matrix Representations of Linear Two-Port Networks," International Journal of Electronics, Vol. 38, No. 4, pp. 433-441, April 1975.
66. W. K. Chen, "Equalization of Darlington Type-C Load to Give Chebyshev or Elliptic Transducer Power-Gain Characteristics," International Journal of Electronics, Vol. 39, No. 6, pp. 667-680, December 1975.

1976

67. W. K. Chen, "Explicit Formulas for the Design of Transmission-Power Amplifiers," Journal of the Franklin Institute, Vol. 301, No. 4, pp. 357-370, April 1976.
68. W. K. Chen, "Dual Formulation of Youla's Theory of Broadband Matching," Electronics Letters, Vol. 12, No. 13, pp. 337-338, June 1976.
69. W. K. Chen, "On the Design of Broadband Elliptic Impedance-Matching Networks," Journal of the Franklin Institute, Vol. 301, No. 6, pp. 451-463, June 1976.
70. W. K. Chen, "Indefinite-Admittance Matrix Formulation of Feedback Amplifier Theory," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-23, No. 8, pp. 498-505, August 1976.
71. W. K. Chen, "Explicit Formulas for the Synthesis of Chebyshev Impedance-Matching Networks," Electronics Letters, Vol. 12, No. 16, pp. 412-413, August 1976.

1977

72. W. K. Chen and H. W. To, "Transient Responses of m-Derived Filters," Journal of the Franklin Institute, Vol. 303, No. 2, pp. 107-116, February 1977.
73. W. K. Chen, "Theory and Explicit Formulas for the Design of Optimum Nonreciprocal Negative-Resistance Amplifiers," Journal of the Franklin Institute, Vol. 303, No. 3, pp. 243-266, March 1977.
74. W. K. Chen, "Explicit Formulas for the Synthesis of Optimum Broadband Impedance-Matching Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-24, No. 4, pp. 157-169, April 1977. The paper was nominated for the Darlington Prize.
75. W. K. Chen and H. M. Elsherif, "The Determinant of the Null-Return Difference Matrix," Electronics Letters, Vol. 13, No. 10, pp. 306-307, May 1977.
76. W. K. Chen, "Network Functions and Feedback," International Journal of Electronics, Vol. 42, No. 6, pp. 617-618, June 1977.
77. W. K. Chen and H. W. To, "Transient Responses of Distributed Amplifiers Using the m-Derived Filter Sections," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-24, No. 7, pp. 389-399, July 1977.
78. W. K. Chen, "The Hybrid Matrix in Linear Multiple-Loop Feedback Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol CAS-24, No. 9, pp. 469-474, September

1977.

1978

79. W. K. Chen, "On Second-Order Cofactors and Null Return Difference in Feedback Amplifier Theory," International Journal of Circuit Theory and Applications, Vol. 6, No. 3, pp. 305-312, July 1978.

80. W. K. Chen and K. Kourounis, "Explicit Formulas for the Synthesis of Optimum Broadband Impedance-Matching Networks II," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-25, No. 8, pp. 609-620, August 1978.

81. W. K. Chen, "Analysis of Constrained Active Networks," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 66, No. 12, pp. 1655-1657, December 1978.

1979

82. W. K. Chen, "Topological Evaluation of Feedback Matrices in Multiple-Loop Feedback Amplifiers," Journal of the Franklin Institute, Vol. 308, No. 2, pp. 125-139, August 1979.

1980

83. C. Satyanarayana and W. K. Chen, "Theory of Broadband Matching and the Problem of Compatible Impedances," Journal of the Franklin Institute, Vol. 309, No. 4, pp. 267-280, April 1980.

84. W. K. Chen, "Physical Interpretation of the Multiport Return Difference Matrix," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 3, pp. 598-600, June 1980.

85. W. K. Chen and T. Chaisrakeo, "Explicit Formulas for the Synthesis of Optimum Band-Pass Butterworth and Chebyshev Impedance-Matching Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-27, No. 10, pp. 928-942, October 1980. The paper was nominated for Guillemin-Cauer Award.

86. W. K. Chen, "Unified Theory of Broadband Matching," Journal of the Franklin Institute, Vol. 310, No. 6, pp. 287-301, December 1980.

87. W. K. Chen, "Subgraphs and Their Degree Sequences of a Digraph," Journal of the Franklin Institute, Vol. 310, No. 6, pp. 349-363, December 1980.

1982

88. W. K. Chen and C. K. Tsai, "A General Theory of Broadband Matching of an Active Load," Circuits, Systems, and Signal Processing, Vol. 1, No. 1, pp. 105-122, 1982.

89. W. K. Chen, "Comments on Computer Generation of Trees and Co-trees in a Cascade of Multiterminal Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-29, No. 1, p. 62, January 1982.

90. K. Onaga and W. K. Chen, "Data Flow Analysis of Program Nets," Journal of the Franklin Institute, Vol. 313, No. 4, pp. 219-231, April 1982.

91. W. K. Chen and C. Satyanarayana, "General Theory of Broadband Matching," IEE Proceedings: Part G Electronic Circuits and Systems, Vol. 129, No. 3, pp. 96-102, June 1982.

92. Y. Kajitani, W. K. Chen and S. Shinoda, "A New Proof of the Evaluation Formula of the Nodal Determinant in terms of Directed Trees," International Journal of Circuit Theory and Applications, Vol. 10, No. 3, pp. 286-289, 1982.

93. Y. Kajitani, S. Ueno and W. K. Chen, "On the Number of Essential Complementary Partitions," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-29, No. 8, pp. 572-574, August 1982.

94. K. Onaga and W. K. Chen, "On Permutation by Spaghetti Amida," Matrix Tensor Quarterly, Vol. 32, No. 2, pp. 83-89, December 1982.

1983

95. S. Shinoda, W. K. Chen and S. P. Chan, "The Concept of Two-Chord Tiesets and Its

Application to an Algebraic Characterization of Non-Series-parallel Graphs, "SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, Vol. 4, No. 2, pp. 244-252, June 1983.

96. W. K. Chen, "Recent Advances in the Application of Graph Theory to Networks," Circuits and Systems Magazine, Vol. 5, No. 4, pp. 12-21, December, 1983.

1984

97. W. K. Chen, "A Theorem on the Summation of Return Differences and Some Consequences," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 72, No. 3, pp. 396-397, March 1984.

98. S. M. Alduhayan and W. K. Chen, "Synthesis of Bessel Filters with prescribed RLC Load," Journal of the Franklin Institute, Vol. 318, No. 1, pp. 1-14, July 1984.

99. Z. M. Wang and W. K. Chen, "Broad-Band Matching of Multiport Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-31, No. 9, pp. 788-796, September 1984.

1985

100. W. K. Chen, "A Dual Theorem on the Summation of Return Differences," Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 73, No. 1, pp. 157-159, January 1985.

101. J. L. Lan and W. K. Chen, "On Loop-Impedance Matrix Formulation of Feedback Amplifier Theory," Journal of the Franklin Institute, Vol. 320, No. 1, pp. 1-14, July 1985.

102. W. K. Chen and M. D. Tong, "On Indefinite-Impedance Matrix," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, No. 8, pp. 840-847, August 1985.

103. Y. S. Zhu and W. K. Chen, "Realizability of Lossless Reciprocal and Non-reciprocal Broadband Matching Networks," Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 3, pp. 325-340, March 1985.

104. J. L. Lan and W. K. Chen, "On f-Factors of a Graph," Journal of the Franklin Institute, Vol. 320, No. 2, pp. 55-62, August 1985.

105. Z. Fei and W. K. Chen, "On a Complex Normalized Scattering Matrix and Its Application to Broadband Matching of Multiport Networks," Journal of the Franklin Institute, Vol. 320, Nos. 3/4, pp. 175-190, September/October 1985.

106. J. L. Wan and W. K. Chen, "Broadband Matching of Multi-Port Networks Terminated in Frequency-Dependent Loads," Circuits, Systems and Signal Processing, Vol. 4, No. 3, pp. 385-411, 1985.

1986

107. M. D. Tong and W. K. Chen, "Hybrid Analysis of a Large-Scale Network by Node-Tearing," Journal of the Franklin Institute, Vol. 321, No. 5, pp. 273-287, May 1986.

108. J. L. Wan and W. K. Chen, "Realizability of Compatible Impedances Using Transformerless Ladder Two-Port Networks," Journal of the Franklin Institute, Vol. 322, No. x, pp. xxx-xxx, 1986.

1987

109. Z. Fei and W. K. Chen, "On Lossless Reciprocal and Nonreciprocal Matching Networks of an Active Load," Journal of the Franklin Institute, Vol. 323, No. x, pp. xxx-xxx, 1987.

110. M. Senguko, S. Shinoda, and W. K. Chen, "A Fault Diagnosis in a Nonlinear Location Network," Journal of the Franklin Institute, Vol. 323, No. x, pp. 395-405, 1987.

C. Invited Papers

1969

1. W. K. Chen, "Invariance and Mutual Relations of Generalized Network Matrices," Proceedings of the Twelfth Midwest Symposium on Circuit Theory, University of Texas, Austin, Texas, pp. VI. 2.1-VI. 2.8, April 21-22, 1969.

1970

2. W. K. Chen, "On Vector Spaces Associated with a Graph," Proceedings of the Thirteenth Midwest Symposium on Circuit Theory, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, pp. XI. 2.1-XI. 2.10, May 7-8, 1970.
3. W. K. Chen, "Foundations of Electrical Network Theory," Proceedings of the Chiao Tung Colloquium on Circuits and Systems, National Chiao Tung University, HsinChu, Taiwan, pp. 97-110, August 25-26, 1970.
1972
4. W. K. Chen, "Degree Realization Graphs with Applications," Proceedings of the National Electronics Conference, Vol. 27, pp. 341-346, October 9-11, 1972.
1973
5. W. K. Chen, "Solvability and the Order of Complexity of Linear Networks," Proceedings of the Sixteenth Midwest Symposium on Circuit Theory, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, pp. XII. 5.1-XII. 5.10, April 12-13, 1973.
1975
6. W. K. Chen, "Graph Theory and Feedback Systems," Proceedings of the Ninth Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, pp. 26-30, November 3-5, 1975.
1976
7. W. K. Chen, "Topological Analysis of Multiple-Loop Feedback Networks," Proceedings of the Tenth Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, pp. 192-197, November 22-24, 1976.
1977
8. W. K. Chen, "Topological Evaluation of the Null Return Difference in Feedback Amplifier Theory," Proceedings of the Eleventh Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, pp. 388-395, November 7-9, 1977.
1979
9. W. K. Chen, "Topological Analysis of Feedback Matrices," Proceedings of the Twelfth International Symposium on Circuits and Systems, Tokyo, Japan, pp. 837-840, July 17-19, 1979. IEEE Catalog No. 79 CH1421-7CAS.
10. W. K. Chen, "Graphs and Feedback Amplifier Theory," Proceedings of the International Colloquium on Circuits and Systems, Taipei, Taiwan, pp. 5-10, July 24-25, 1979.
11. W. K. Chen and T. Chaisrakeo, "Synthesis of Band-Pass Impedance-Matching Networks," Proceedings of the International Colloquium on Circuits and Systems, Taipei, Taiwan, pp. 55-58, July 24-25, 1979.
1980
12. W. K. Chen, "Mathematical Theory of Broadband Matching," Proceedings of the Thirteenth International Symposium on Circuits and Systems, Houston, Texas, pp. 517-520, April 28-30, 1980.
13. L. L. Lamb and W. K. Chen, "On the Design of Active Circulators," Proceedings of the Twenty-Third Midwest Symposium on Circuits and Systems, University of Toledo, Toledo, Ohio, pp. 289-293, August 4-5, 1980.
14. H. M. Elsherif and W. K. Chen, "State-Space Analysis of the Multiple-Loop Feedback Networks," *Proceedings of the Twenty-Third Midwest Symposium on Circuits and Systems*, University of Toledo, Toledo, Ohio, pp. 284-288, August 4-5, 1980.
15. W. K. Chen, "On the Realizability of the Degree Sequence of a Digraph," Proceedings of IEEE International Conference on Circuits and Computers, Port Chester, New York, pp. 616-619, October 1-3, 1980. IEEE Catalog No. 80CH1511-5CAS.
16. H.M. Elsherif and W. K. Chen, "Analysis of Multiple-Loop Feedback Networks," Proceedings

of IEEE International Conference on Circuits and Computers, Port Chester, New York, pp. 808-811, October 1-3, 1980. IEEE Catalog No. 80CH1511-5CAS.

17. S. Shinoda, Y. Kajitani and W. K. Chen, "Directed Trees and Bases," Proceedings of Fourteenth Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, Pacific Grove, California, pp. 173-177, November 17-19, 1980, IEEE Catalog No. 80CH1625-3.

1981

18. K. Onaga and W. K. Chen, "On Permutations by Spaghetti Amida," Proceedings of the Twenty-Fourth Midwest Symposium on Circuits and Systems, University of New Mexico, pp. 696-700, June 29-30, 1981.

19. K. Onaga and W. K. Chen, "Data Flow Analysis of Program Nets," Proceedings of the Twenty-Fourth Midwest Symposium on Circuits and Systems, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, pp. 480-484, June 29-30, 1981.

20. S. Shinoda, W. K. Chen and S. P. Chan, "The Concept of Two-Chord Tiesets and Its Application to an Algebraic Characterization of Non-Series-Parallel Graphs," Proceedings of the Twenty-Fourth Midwest Symposium on Circuits and Systems, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, pp. 468-473, June 29-30, 1981.

1982

21. S. Gao and W. K. Chen, "The Hybrid Method of Network Analysis and Topological Degree of Freedom, "Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Rome, Italy. pp. 158-161, May 10-12, 1982. IEEE Catalog No. 82CH1681-6.

22. S. Shinoda, W. K. Chen and T. Kuwahara, "A Sufficient Condition for Any Two Matroidally Isomorphic Graphs with the Same Edge Set to Have a Common Tree,"Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Rome, Italy, pp. 601-604, May 10-12, 1982, IEEE Catalog No. 82CH1681-6.

23. Z. M. Wang and W. K. Chen, "Broadband Matching of Multi-Port Networks,"Proceedings of the Twenty-Fifth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Michigan Technological University, Houghton, Michigan, pp. 235-239, August 30-31, 1982.

24. S. Q. Gao and W. K. Chen, "On Graph Classification with Applications," Proceedings of the Twenty-Fifth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Michigan Technological University, Houghton, Michigan, pp. 244-248, August 30-31, 1982.

25. S. Shinoda, K. Saishu, and W. K. Chen, "A Theorem on Central Trees," Proceedings of the Twenty-Fifth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Michigan Technological University, Houghton, Michigan, pp. 249-252, August 30-31, 1982.

26. E. Yasui and W. K. Chen, "Computerized Approximation of Tapered-Gain Distributed-Element Matching Networks for Microwave Amplifiers," Proceedings of the National Electronics Conference, Oak Brook, Illinois, Vol. 36, pp. 272-276, October 4-6, 1982.

1983

27. S.Shinoda, W.K.Chen and T.Kuwahara, "Covering Trees of a Graph and Their Properties," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Newport Beach, California, pp. 315-318, May 2-4, 1983. IEEE Catalog No. 83CH1845-7.

28. M. Jameel and W. K. Chen, "On Unique Realizability of a Digraph with Prescribed Degree-Pair Sequence," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Newport Beach, California, pp. 327-330, May 2-4, 1983. IEEE Catalog No. 83CH1845-7.

29. W. K. Chen, "Recent Progress on the Applications of Graph Theory to Networks," Proceedings of the Twenty-Sixth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Puebla, Mexico, pp. 134-138, August 15-16, 1983.

30. W. K. Chen, "Flows in Communication Nets," Proceedings of the National Electronics Conference, Oak Brook, Illinois, Vol. 37, pp. 473-478, October 24-26, 1983.

1984

31. S. Q. Gao and W. K. Chen, "Application of Lattice Theory to the Generation of Trees by Decomposition," Proceedings of the Twenty-Seventh Midwest Symposium on Circuits and Systems, Morgantown, W. Va., pp. 703-706, June 11-12, 1984.
32. Y. S. Zhu and W. K. Chen, "Realizability of Lossless Reciprocal and Nonreciprocal Broadband Matching Networks," Proceedings of the Twenty-Seventh Midwest Symposium on Circuits and Systems, Morgantown, W. Va., pp. 728-731, June 11-12, 1984.
33. W. K. Chen, "Enumeration of Trees and Directed Trees Without Duplications," Proceedings of the International Computer Symposium, Tamkang University, Taiwan, pp. 1025-1032, December 12-14, 1984.

1985

34. J. L. Wan and W. K. Chen, "Broadband Matching of Multi-Port Networks Having Noncontiguous Channels," Proceedings of the International Conference on Circuits and Systems, Beijing, China, pp. 387-391, June 10-12, 1985.
35. J. L. Wan and W. K. Chen, "Realizability of Compatible Impedances Using Transformerless Ladder Two-Port Networks," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kyoto, Japan, pp. 147-150, June 5-7, 1985. IEEE Publication No. 85CH2114-7.
36. Z. L. Fei and W. K. Chen, "On Lossless Reciprocal and Nonreciprocal Matching Networks of an Active Load," Proceedings of the International Conference on Circuits and Systems, Beijing, China, pp. 378-382, June 10-12, 1985.
37. Y. S. Zhu and W. K. Chen, "On the Design of a Diplexer Having Butterworth Characteristics," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kyoto, Japan, pp. 155-158, June 5-7, 1985. IEEE Publication No. 85CH2114-7.
38. J. Lan and W. K. Chen, "On Degree Sequences and f-Factors of a Graph," Proceedings of the Twenty-Eighth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Louisville, Kentucky, pp. 417-420, August 19-20, 1985.
39. W. K. Chen, "Recent Advances in Broadband Matching: Theory and Implementation," Proceedings of 1985 Seoul International Workshop on VLSI and CAD, Seoul, Korea, pp. 395-445, June 3-4, 1985.
40. K. Siri and W. K. Chen, "On the Design of Low-Pass Transmission Power Amplifiers," Proceedings of the Twenty-Eighth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Louisville, Kentucky, pp. 503-506, August 19-20, 1985.

1986

41. W. H. Liang and W. K. Chen, "Applications of Lattice Theory to Graph Decomposition," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Jose, California, pp. 772-775, May 5-7, 1986. IEEE Publication No. 86CH2255-8.
42. W. K. Chen, "Recent Progress in Broadband Matching Theory," Proceedings of Fifth Polish-English Seminar, 18 pp., Radziejowice, Poland, Sept. 8-12, 1986.

D. Conference Papers

1965

1. W. K. Chen, "On Active Topological Synthesis," Proceedings of the Eighth Midwest Symposium on Circuit Theory, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, pp. 26.0-26.11, June 14-15, 1965.
2. W. K. Chen, "Generation of Trees and k-Trees," Proceedings of the Third Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, Urbana, Illinois, pp. 389-399, October 20-22, 1965.

1966

3. W. K. Chen and R. C. Quisenberry, "On Network Topology," Proceedings of the Ninth

Midwest Symposium on Circuit Theory, Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma, pp. 8.0-8.14; May 9-10, 1966.

4. W. K. Chen; "*On the Generation of Non-Singular Submatrices and Their Corresponding* Subgraphs," Proceedings of the Fourth Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, Urbana; Illinois, pp. 207-217; October 5-7, 1966.

1967

5. W. K. Chen, "A New Approach to the Design of Distributed Amplifiers," Proceedings of the First Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems; Princeton University; Princeton; New Jersey; pp. 145-149; March 30-31, 1967.

6. W. K. Chen; "Distributed Amplification Theory," Proceedings of the Fifth Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory; University of Illinois; Urbana; Illinois, pp. 300-316, October 4-6, 1967.

7. W. K. Chen and S. K. Mark; "On the Generation of Trees, Cotrees, k-Trees, and k-Cotrees," Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems, Pacific Grove; California, pp. 659-668, November 1-3, 1967.

1968

8. W. K. Chen, "Computer Generation of Trees and Cotrees in a Cascade of n-Port Networks," Symposium Digest, IEEE International Symposium on Circuit Theory; Miami Beach; Florida; p. 79, December 4-6; 1968.

1969

9. W. K. Chen, "The Wang Algebra and Trees of a Graph," Proceedings of the Third Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, Princeton, New Jersey, pp. 7-12, March 27-28, 1969.

10. W. K. Chen, "Transient Analysis of Distributed Amplifiers," Proceedings of the Third Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems; Princeton University, Princeton, New Jersey; p. 132; March 27-28; 1969.

11. N. T. Chan and W. K. Chen; "On Kron's Method of Tearing," Proceedings of the Third Asilomar Conference on Circuits and Systems, Pacific Grove, California, pp. 497-501, December 10-12, 1969.

1970

12. W. K. Chen; "A Novel Code for Generating Trees and Multitrees of a Graph,"Proceedings of the Kyoto International Conference on Circuit and System Theory, Kyoto, Japan, pp. 47-48; September 9-11, 1970.

13. F. Y. Chen and W. K. Chen, "On the Realizability of Permutational Synthesis of Mechanisms,"Mechanisms Conference of the American Society of Mechanical Engineers,Columbus, Ohio; ASME Publication No. 70-Mech-58; pp. 11; November 1-4, 1970.

1974

14. W. K. Chen, "Graph-Theoretic Considerations on the Invariance of the Return Difference," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Francisco, California, pp. 319-323; April 22-24; 1974.

15. W. K. Chen, "Invariance and Mutual Relations of the General Null-Return-Difference Functions," Proceedings of European Conference on Circuit Theory and Design, London; England, pp. 371-376; July 23-26, 1974.

16. W. K. Chen and H. M. Elsherif, "The Return Difference Matrix in Multiple-Loop Feedback Systems," Proceedings of the Seventeenth Midwest Symposium on Circuits and Systems; The University of Kansas, Lawrence, Kansas; pp. 95-103; September 16-17; 1974.

1975

17. W. K. Chen; "Design Considerations of the Impedance-Matching Networks Having the Elliptic Gain Response," Proceedings of the Eighteenth Midwest Symposium on Circuits

and Systems, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, pp. 322-326, August 11-12, 1975.

18. W. K. Chen, "Synthesis of Chebyshev and Elliptic Impedance-Matching Networks," Proceedings of the Eighteenth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, pp. 327-331, August 11-12, 1975.
19. W. K. Chen, "Design Formulas for Optimum Transmission-Power Amplifiers Having Butterworth and Chebyshev Gain Responses," Proceedings of the Ninth Annual Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, pp. 217-221, November 3-5, 1975.

1976

20. W. K. Chen, "Theory and Design Formulas for Optimum Nonreciprocal Negative-Resistance Amplifiers," Proceedings of the Tenth Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, pp. 351-356, November 22-24, 1976.

1977

21. W. K. Chen, "Synthesis of Optimum Butterworth and Chebyshev Broadband Impedance-Matching Networks," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Phoenix, Arizona, pp. 360-365, April 25-27, 1977.

1978

22. W. K. Chen and K. G. Kourounis, "Explicit Formulas for Butterworth and Chebyshev Impedance-Matching Networks Using an All-Pass Section," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, New York, pp. 71-72, May 17-19, 1978. IEEE Publication No. 78CH1358-1 CAS.

1981

23. W. K. Chen, "On Factors of a Digraph," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Chicago, Illinois, pp. 794-797, April 27-29, 1981. IEEE Publication No. 81CH1635-2.

1983

24. S. M. Alduhayan and W. K. Chen, "On the Design of Bessel Filters with Prescribed RLC Load," Proceedings of the Twenty-Sixth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Puebla, Mexico, pp. 179-183, August 15-16, 1983.

1984

25. J. L. Wan and W. K. Chen, "Broadband Matching of Multiport Networks with Frequency-Dependent Loads," Proceedings of the Twenty-Seventh Midwest Symposium on Circuits and Systems, Morgantown, W. Va., pp. 706-711, June 11-12, 1984.
26. J. Lan and W. K. Chen, "Impedance-Matrix Formulation of Feedback Amplifier Theory," Proceedings of the Twenty-Seventh Midwest Symposium on Circuits and Systems, Morgantown, W. Va., pp. 712-715, June 11-12, 1984.

1985

27. Z. Fei and W. K. Chen, "On Complex Normalized Scattering Matrix and Its Application to Broadband Matching of Multiport Networks," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kyoto, Japan, pp. 1227-1230, June 5-7, 1985. IEEE Publication No. 85CH2114-7.
28. Z. Ye, X. Y. Wu and W. K. Chen, "Mixed Tree-Graph Representation for the Essential Complementary Partitions," Proceedings of the International Conference on Circuits and Systems, Beijing, China, pp. 162-165, June 10-12, 1985.
29. X. Y. Wu and W. K. Chen, "A Simplified Method for the Enumeration of Essential Complementary Partitions," Proceedings of the International Conference on Circuits and Systems, Beijing, China, pp. 166-169, June 10-12, 1985.
30. Y. S. Zhu and W. K. Chen, "Broadband Matching with Maximally-Flat Group Delay

Characteristic," Proceedings of the Twenty-Eighth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Louisville, Kentucky, pp. 494–498, August 19–20, 1985.

1986

31. Z. M. Wang and W. K. Chen, "On the Design of Channel Diplexers," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Jose, California, pp. 1105–1108, May 5–7, 1986. IEEE Publication No. 86CH2255-8.
32. M. D. Tong and W. K. Chen, "Hybrid Analysis of Large-Scale Networks by Node-Tearing," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Jose, California, pp. 178–181, May 5–7, 1986. IEEE Publication No. 86CH2255-8.
33. M. Sengoku, S. Shinoda, and W. K. Chen, "A Fault Diagnosis in a Nonlinear Location Network," Proceedings of the Twenty-Ninth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Lincoln, Nebraska, pp. xxx-xxx, August 11–12, 1986.
34. I. Shirakawa, S. Shinoda, M. Sengoku and W. K. Chen, "A Problem of Diagnosis of Mixed Networks," Proceedings of the Twenty-Ninth Midwest Symposium on Circuits and Systems, Lincoln, Nebraska, pp. xxx-xxx, August 11–12, 1986.